

240

# SIMULACIÓN

Y

200

## NUMÉRICA EN CIENCIAS

200

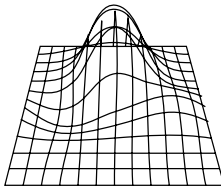
X

240

*Diferencias finitas  
y Lattice Boltzmann  
en matemáticas  
aplicadas y física*

# **SIMULACIÓN NUMÉRICA EN CIENCIAS**

*Diferencias finitas  
y Lattice Boltzmann  
en matemáticas  
aplicadas y física*



**Duitama Leal A. González Velandia J.J.F. Ramírez  
Camacho J.C. Pinzón Caballero L.M. Gómez García C.S.  
Moreno Ibagué A.B.**

Simulación numérica en ciencias. Diferencias Finitas y  
Lattice Boltzmann en Matemáticas Aplicadas y Física  
Editorial de la Universidad de Cundinamarca. 2021.

Fusagasugá.

319 p.

ISBN: 978-958-52730-7-8



**UDEC**  
UNIVERSIDAD DE  
CUNDINAMARCA



**Dr. Adriano Muñoz Barrera**  
Rector

**Dra. María Eulalia Buenahora  
Ochoa**  
Vicerrectora Académica

**Dr. Jaime Augusto Porras  
Jiménez**  
Director de Investigación  
Universitaria

**Mtra. Aura Esther Álvarez Lara**  
Decana de la Facultad de  
Educación

© Universidad de Cundinamarca, 2021  
Primera Edición, 2021

Facultad de Educación  
Programa de Licenciatura en Matemáticas

Autores:

**Alejandro Duitama Leal**  
**José John Fredy González Velandia**  
**Juan Carlos Ramírez Camacho**  
**Luz Magdalena Pinzón Caballero**  
**Carlos Stevens Gómez García**  
**Anyi Bibiana Moreno Ibagué**

Editorial:

Dirección y Editor: **Jaime Augusto Porras Jiménez**  
Editor: **Rosemberg del Carpio López Juárez**  
Corrección de estilo: **Yesid Castiblanco Barreto**  
Diseño editorial y diseño de cubierta:  
**Paula Karina Martínez Camelo**  
Registro digital: **Ana Milena Bejarano Torres**

Dirección de Investigación  
Universidad de Cundinamarca  
www.ucundinamarca.edu.co  
editorial@ucundinamarca.edu.co  
Diagonal 18 No. 20 - 29  
Fusagasugá - Cundinamarca

ISBN: 978-958-5195-04-2

#### DERECHOS RESERVADOS:

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro, sin permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

Los conceptos aquí expresados son responsabilidad exclusiva de sus autores y no necesariamente representan la posición oficial de la Universidad de Cundinamarca.

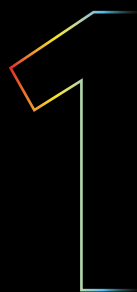
No comercial: no puede utilizar esta obra con fines comerciales de ningún tipo. Tampoco puede vender esta obra bajo ningún concepto ni publicar estos contenidos en sitios web que incluyan publicidad de cualquier tipo.

El presente libro es derivado de resultados de investigación del proyecto: Modelamiento Numérico de fluidos bifásico.

En cuanto a la información consignada en el presente documento, fue revisada y evaluada por pares evaluadores externos doble ciego con el fin de garantizar una valoración crítica e imparcial sobre la calidad de los manuscritos; por lo cual los autores fueron informados sobre las recomendaciones dadas por los pares para realizar los respectivos cambios y/o ajustes del caso, para finalmente ser aprobados por el Consejo Editorial de la Universidad de Cundinamarca.

**Modelado numérico de la  
distribución de deformación  
en la litósfera terrestre  
debido a una distribución  
de carga**

# Capítulo



Carlos Stevens Gómez García  
Alejandro Duitama Leal

---

Universidad de Cundinamarca, Facultad de Educación  
Licenciatura en Matemáticas  
Fusagasugá  
2020

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<hr/>	
<b>1. Justificación</b>	<b>11</b>
<hr/>	
<b>2. Marco referencial</b>	<b>13</b>
2.1 Marco de antecedentes	
2.2 Marco teórico	
<hr/>	
<b>3. Marco metodológico</b>	<b>29</b>
3.1 Método y técnica de investigación	
3.2 Diseño de investigación	
<hr/>	
<b>4. Desarrollo del proyecto</b>	<b>30</b>
4.1 Validación del modelo en diferencias finitas	
4.2 El Nevado del Tolima	
4.3 Geología del Nevado del Tolima	
4.4 Topografía del Nevado del Tolima	
4.5 Resultados	
<hr/>	
<b>Conclusiones</b>	<b>57</b>
<hr/>	
<b>Referencias</b>	<b>59</b>
<hr/>	
<b>Anexos</b>	<b>61</b>

## RESUMEN

Las placas externas de la Tierra se deforman debido a las cargas exteriores que producen esfuerzos, y por esfuerzos producidos en su zona más interior debido a las corrientes de convección que se generan en el manto y que producen un movimiento en toda la corteza. Estas deformaciones generadas por cargas externas pueden producir esfuerzos que están altamente relacionados con movimientos en la superficie terrestre afectando la topografía contigua y produciendo inestabilidades y fallas en el terreno. Por esa razón, el presente estudio busca modelar y analizar las deformaciones que se producen en la parte más somera de la corteza continental, producida por la carga del Nevado del Tolima.

Para el modelo se recurrió a información geológica y topográfica del Nevado del Tolima. De allí se discretizó el espacio y se generó una superficie topográfica del lugar. Simultáneamente, se desarrolló un código en C++ que permite solucionar numéricamente por diferencias finitas el modelo físico que dará paso a una simulación de la distribución de las deformaciones a profundidad que se producen en la corteza. Se encontró que se producen deformaciones de alrededor de 0.035 m en las zonas más cercanas al Nevado del Tolima, estas deformaciones decrecen con la profundidad, y se encuentra que, a profundidades cercanas a los 750 m, los contrastes en las deformaciones o gradientes son bajos.

**Palabras clave:** deformación, deflexión, diferencias finitas, esfuerzo, litósfera, Nevado del Tolima.

## INTRODUCCIÓN

Actualmente la geodinámica estudia agentes que afectan los procesos dinámicos de la Tierra, los cuales ejercen cambios en la estructura interna terrestre. En este sentido, se han desarrollado teorías para estudiar el comportamiento de las placas frente a fuerzas ejercidas sobre estas y, con la ayuda de la matemática, se han planteado modelos cuantitativos que ayudan a analizar las formaciones terrestres.

Las placas que conforman la parte externa de la Tierra se deforman dependiendo de las cargas exteriores, esfuerzos y tensiones internas de la Tierra; estas deformaciones en las placas pueden producir esfuerzos que están altamente relacionados con movimientos en la superficie terrestre. La distribución de esfuerzos y tensiones sobre una placa puede generar distintas formaciones en la superficie, y cuando esas fuerzas y tensiones son demasiado grandes, estas producen fracturas o deformaciones dúctiles.

Diferentes fenómenos geológicos en la superficie de la Tierra permiten un modelado matemático de la deflexión en la litósfera terrestre considerando un comportamiento elástico, “evidencia directa de estos comportamientos en la litósfera son las islas hawaianas y algunas otras cadenas de islas” (Turcotte y Schubert, 2014). Por esta razón, se han realizado diversos estudios referentes al comportamiento de la litósfera frente a esfuerzos generados por agentes externos.

El estudio del comportamiento geológico y estructural de los volcanes a lo largo de la cordillera de los Andes es de gran relevancia debido a la actividad presente. Es-



tudios hechos por el Instituto Colombiano de Geología y Minería determinan el estado geodinámico de los distintos volcanes hallados en la cordillera de los Andes, en especial aquellos que han tenido actividad volcánica como es el caso del Nevado del Ruiz y el Nevado del Tolima, los cuales, junto con el Nevado del Huila, hacen parte de lo que se conoce con el nombre de Parque de los Nevados. Además, la cercanía de este sistema volcánico complejo con las zonas pobladas hace que tome mayor importancia. Estudios como los de Robertson (2002), Alfaro y Romero (2009) y el Servicio Geológico Colombiano (2018), entre otros, permiten dar una idea de la actividad interna generada por los procesos naturales de la zona que pueden ocasionar actividad volcánica y sismológica. De allí la importancia que el presente trabajo tiene y es lograr determinar las zonas de mayor deformación en la corteza terrestre, y que permita inferir zonas en donde los cambios de deformación grandes se puedan correlacionar con sistemas de fallas geológicas. Por lo tanto, al analizar las deflexiones en la litósfera con esfuerzos horizontales o verticales, se pueden analizar zonas que estén sometidas a esfuerzos muy grandes, los cuales pueden dar paso a movimientos en la capa externa de la Tierra o desarrollar mayores esfuerzos a lo largo del tiempo.

El objetivo será por tanto analizar estas deflexiones debido a que pueden generar esfuerzos internos en la corteza terrestre, que propiciaría movimientos internos del subsuelo, y formación de fallas internas en las capas exteriores de la Tierra, permitiendo la posible explicación a múltiples formaciones geológicas a partir del comportamiento elástico de la litósfera en, por ejemplo, la cuenca de Michigan o las islas hawaianas, mencionadas anteriormente (Turcotte y Schubert, 2014).

Para desarrollar el proyecto se recurrirá a información geológica y topográfica del Nevado del Tolima. De allí se discretizará el espacio y se dispondrá de una superficie topográfica del lugar. Simultáneamente, se desarrollará un código en C++ que permite solucionar numéricamente por

diferencias finitas el modelo físico que proporcionará una simulación de la distribución de las deformaciones a profundidad que se producen en la corteza, para finalizar en el análisis de las deflexiones numéricas obtenidas con el método utilizado, tomando diversas muestras a distintas profundidades de la litósfera.

# 1. JUSTIFICACIÓN

Según afirman Turcotte y Schubert (2014), una razón relevante para el análisis del comportamiento elástico de la litósfera es establecer el estado de los esfuerzos. Esta distribución de esfuerzos es responsable de la ocurrencia de terremotos. Por lo tanto, desarrollar un modelo que establezca la deflexión de una placa sometida a cargas por medio de diferencias finitas dará paso para analizar los resultados, de modo que en un futuro se puedan producir modelos más exactos que ayuden a encontrar áreas en las cuales haya esfuerzos de gran magnitud que afecten la topografía del lugar por movimientos internos de la placa.

El método de diferencias finitas en este proyecto es utilizado por su sencillez, además de constituir un procedimiento adecuado para la resolución de una ecuación diferencial parcial de cuarto orden en un recinto finito.

El presente trabajo propone un modelo de litósfera con una carga superficial, en este caso el Nevado del Tolima, con la cual se determinarán zonas en las que posiblemente pueden existir esfuerzos de gran magnitud, favoreciendo posibles alteraciones en la topografía debido a movimientos en los linderos cerca de la falla.

Se planteará una metodología acertada para poder analizar las deformaciones y los esfuerzos de la carga soportada por la litósfera, en este caso la superficie del Nevado del Tolima, teniendo en cuenta que los resultados adquiridos pueden ser utilizados en el futuro para estudiar detalladamente una estructura más compleja como el Parque de los Nevados, que está compuesto principalmente

por el Nevado del Tolima, el Nevado de Santa Isabel, el Cerro Machín y el Nevado del Ruiz, información de utilidad para conocer los esfuerzos de la zona en cuestión.

## 2. MARCO REFERENCIAL

### 2.1 Marco de antecedentes

En la presente sección se encuentra la Tabla 1, en la cual se recopila información de distintas fuentes bibliográficas referentes a la flexión de placas sometidas a tensiones y esfuerzos, así como la resolución del problema mediante métodos variados, además de lograr apreciar una gama de conocimiento referentes al Nevado del Tolima y algunos estudios realizados con la actividad volcánica de la zona.

Aunque es poca la información que se encontró al respecto, fue la necesaria y suficiente para enriquecer el discurso teórico.

**Tabla 1***Lista de antecedentes del problema de la flexión en placas*

<b>Año</b>	<b>Autor(es)</b>	<b>Detalle</b>
1997	Speare y Kemp	Teoría de flexión de placas incluyendo fuerzas de corte.
1982	Turcotte y Schubert	Fundamentos físicos necesarios para entender los fenómenos geológicos de la Tierra.
1998	Instituto Colombiano de Geología y Minería	Geología de la Plancha 225 Nevado del Ruiz y el Nevado del Tolima.
2010	Semie	Solución del problema de la deflexión en placas utilizando métodos finitos.
2012	Sudhir	Análisis de la deformación de una placa usando el método de elementos finitos.
2018	Servicio Geológico Colombiano	Información del subsuelo, seguimiento y monitoreo de amenazas de origen geológico.

**Fuente:** elaboración propia.

## 2.1.1 Estado del arte

En 1977, Kenneth y Speare (1977) publicaron el trabajo titulado *Una teoría simplificada para la deformación de placas*, en el que exponen el análisis de la deformación de una placa isotrópica homogénea en dos dimensiones utilizando dos términos de dos variables: la primera, el desplazamiento, compuesta por ecuación de cuarto orden, y la segunda, una función de esfuerzo estructurada por ecuaciones de segundo orden, siendo el sistema de ecuaciones usado de sexto orden que incluye esfuerzos de corte y esfuerzos directos transversales.

La placa elástica considerada es de forma rectangular, simplemente apoyada en dos bordes opuestos con los otros dos bordes libres y una carga distribuida uniformemente, la cual se solucionará por medio del método de diferencias finitas y el método de Ritz para determinar el comportamiento de la placa propuesta y la viabilidad del modelo utilizado dentro del margen de este proyecto, considerando las limitaciones que el modelo presupone, las cuales implican omisiones de ciertos esfuerzos en la estructura de la placa.

Los resultados del trabajo realizado por Kenneth y Speare (1977) consideran un error de orden  $O(h)$  debido al método de diferencias finitas, usado para hallar la deflexión en la placa elástica, mas no por las aproximaciones de algunas variables que se han realizado, logrando una aproximación válida para el modelo expuesto inicialmente.

Una de las conclusiones del trabajo realizado por Kenneth y Speare (1977) ha enunciado que las soluciones numéricas [del fenómeno de la flexión en placas] pueden ser obtenidas usando diferencias finitas, considerando errores de orden  $O(h)$ , por lo cual esto ha permitido en el presente proyecto implementar el uso del método de diferencias finitas centradas para calcular soluciones numéricas de la deflexión en la litósfera, considerando una distribu-

ción de masa sobre ella.

En 1982 se realizó una primera edición de *Geodynamics* de Donald Turcotte y Gerald Schubert, en la que se describe el comportamiento de placas lineales en condiciones determinadas tales como las superficies sometidas a cargas.

Su contenido se basa en una amplia gama de conocimiento referente a fenómenos de la geología, realizando analogías desde un contexto físico-matemático, además de brindar ejemplos claros comprendidos en sus diversos capítulos. Así mismo, presenta la ecuación diferencial para trabajar y propiedades de rocas que son de gran utilidad para el presente proyecto. La variedad de conocimientos de este libro permite un acercamiento a los aspectos básicos por conocer del fenómeno de la flexión, así como algunos problemas planteados y solucionados en una dimensión para la deflexión.

En su contenido, exactamente en el capítulo 3 titulado "Elasticidad y flexión", se determina mediante el análisis de los momentos, torques y fuerzas ejercidas en una placa de dos dimensiones la ecuación del bilaplaciano, estructura matemática definida por una ecuación diferencial de cuarto grado y exhibida en este trabajo en el marco teórico, la cual se utilizará para hallar la deflexión de la litósfera sometida a la carga del Nevado del Tolima. Además, se utilizarán parámetros explícitos en este proyecto, enunciados por Turcotte y Schubert, como lo son las propiedades de algunas rocas que se encuentran ubicadas en la zona de interés del Nevado del Tolima.

En 1988 es presentada la Plancha 225 del Nevado del Ruiz (Mosquera *et al.*, 2010), la cual incluye la geología de una zona ubicada en los departamentos de Tolima, Risaralda, Caldas y Quindío, la cual se enfoca en el Nevado del Ruiz y el Nevado del Tolima, y es analizada en 1998 por Mosquera *et al.* (2010) para el Instituto Colombiano de Geología y Minería. Esta tiene como objetivo elaborar un mapa que represente la geología general, además de iden-



tificar áreas amenazadas por fallas estructurales conocidas que posiblemente pueden dar paso a movimientos de tierra o influir en la actividad volcánica del lugar.

Se dan especificaciones de las formaciones rocosas en la zona alrededor del Nevado del Ruiz y el Nevado del Tolima, como lo son el tipo de roca, sus características de formación y su tiempo de origen, iniciando en el periodo paleozoico y concluyendo en el cenozoico.

En el presente proyecto se utilizará la información de la Plancha 225 (Servicio Geológico Colombiano, 2018) para conocer los aspectos geológicos del Nevado del Tolima, ya que esta plancha presenta un corte transversal del nevado pasando aproximadamente por su punto más alto; además, evidencia a profundidad las formaciones geológicas de la zona, información que se pretende utilizar en el modelo del presente trabajo.

En 2010, Additsu Gezahegn Semie (2010) realizó una tesis enfocada al modelado numérico computacional de la flexión en placas titulada “Modelado numérico de placas usando elementos finitos” para el Departamento de Ciencias Computacionales de la Universidad Addis Ababa (Etiopía).

El primer capítulo de la tesis inicia con una introducción del planteamiento del proyecto desde las ciencias computacionales, además de incluir la identificación del problema, los objetivos del trabajo y la importancia de la labor desarrollada; el segundo capítulo abarca antecedentes del tema estipulado y el método de elementos finitos; el tercer capítulo muestra el sistema matemático modelado y la implementación analítica del método para solucionar las ecuaciones diferenciales de la flexión; y el último capítulo analiza los resultados obtenidos con el código realizado.

La construcción de conocimiento en este proyecto implica tomar un modelo matemático planteado para el fenómeno de la flexión, una ecuación diferencial de cuar-

to grado, para luego aplicarle diferentes características físicas y aplicar el método numérico escogido por el autor en un código desarrollado en el lenguaje de programación Fortran, para finalizar en el análisis de los resultados, los cuales van dirigidos al estudio del método aplicado en la computación, además de comparar los resultados con un modelo construido en el *software* de simulación ANSYS.

El autor en su proyecto logra concluir que:

1. El método de elementos finitos usado en el proyecto es un medio bastante robusto para solucionar problemas de flexión en estructuras isotrópicas.
2. Los resultados numéricos proporcionados por el *software* desarrollado para esta tesis o cualquier otro código numérico requieren un cuidadoso análisis e interpretación para garantizar que los principios conocidos de la mecánica aplicada se hayan dado de manera adecuada y relevante para la solución en cuestión. Por esto se recomienda empezar con un problema simplificado (como en este caso, una placa de borde simplemente sostenida y sujeta) antes de pasar a una más compleja (Semie, 2010).

Por lo tanto, este proyecto intentará dar una solución de la flexión usando el método de diferencias finitas centradas, esperando que sea un método menos robusto; además, se tendrá en cuenta la segunda conclusión mencionada anteriormente, con la cual se desarrollará un problema más sencillo para luego solucionar el problema deseado, considerando la litósfera y la carga impuesta por el Nevado del Tolima.

La tesis de Sudhir (2012) presentada al Departamento de Ingeniería del Instituto Nacional de Tecnología (India), titulada *Análisis de la deformación de una placa usando el método de elementos finitos*, examina diversos casos en los que se aplica el método de elementos finitos para determinar la deflexión de placas rectangulares con

condiciones de frontera iniciales variadas. De este modo, compara los resultados de una placa rectangular de metal sometida a una carga inicial con deflexiones que se obtuvieron con un *software* especializado llamado LISA en el fenómeno de la flexión.

Al inicio, desarrolla el método de elementos finitos para la teoría de flexión de placas tomando 400 nodos para calcular la flexión de una placa de acero sometida a una carga continua. Luego continúa con una comparación de los resultados con el *software* anteriormente mencionado, y concluye con un análisis respectivo de todo el trabajo realizado.

Aunque el método de Sudhir difiere con el método para utilizar en este trabajo, se espera que los resultados que se puedan obtener con la solución numérica usando diferencias finitas centradas no discrepen de los resultados conseguidos con el uso de elementos finitos, y así poder continuar con el presente proyecto.

El modelo que se construyó utilizará la información dada por Sudhir para realizar una comparación del código que se va a realizar con C++ en diferencias finitas centradas para el desarrollo de la flexión, y así validar el buen funcionamiento de la solución numérica utilizada en el presente trabajo.

En 1916 se creó Ingeominas (Servicio Geológico Colombiano) para encargarse de la recopilación de información referente a la topografía y geología del suelo colombiano. Así, esta entidad gubernamental se ha dedicado a lo largo de los años a analizar y catalogar la superficie del terreno colombiano y, a su vez, a estudiar los fenómenos que se producen geológicamente, dando continuamente al público general un estado actual de la topografía colombiana.

El Servicio Geológico Colombiano en 2018 entregó análisis actualizados de distintas zonas de Colombia que exhiben actividad sísmica a la población en general, con

generalidades de distintos volcanes a lo largo de Colombia. Su mayor interés en cuanto a estos volcanes se refiere a su actividad volcánica y los riesgos para las zonas que los rodean, por ello presentan periódicamente información detallada del estado de los volcanes teniendo en cuenta las observaciones y los estudios realizados recientemente.

También presenta del Nevado del Tolima la ubicación, geología, forma y mapa de amenazas volcánicas (lahares, flujos de lava y fallas), e información relevante para el presente proyecto. En lo concerniente a este trabajo muestra algunas características del Nevado del Tolima como ubicación y estructura, conocimientos básicos necesarios para establecer el contexto de la investigación. De este modo, además de presentar algunas características básicas fundamentales para conocer la zona de estudio, también ha desarrollado mapas que permiten conocer las fallas que existen en el Nevado del Tolima y alrededores, tal es el caso de la Plancha 225 (Servicio Geológico Colombiano, 2018).

## **2.2 Marco teórico**

### **2.2.1 Esfuerzos**

Para determinar una relación entre los ejes de esfuerzo y deformación que puede presentar una placa elástica en sus tres dimensiones, se contemplan las siguientes ecuaciones con las cuales se pueden determinar los esfuerzos dependiendo de las características del cuerpo elástico estudiado:

$$\sigma_1 = (\nu + 2G) \epsilon_1 + \lambda \epsilon_2 + \lambda \epsilon_3 \quad (1.1)$$

$$\sigma_2 = \lambda \epsilon_1 + (\nu + 2G) \epsilon_2 + \lambda \epsilon_3 \quad (1.2)$$

$$\sigma_3 = \lambda \epsilon_1 + \lambda \epsilon_2 + (\nu + 2G) \epsilon_3 \quad (1.3)$$

Donde  $\lambda$  y  $G$  son conocidos como los parámetros de Lamé;  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  son los ejes de esfuerzo para  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente;  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  son los ejes de deformación para  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

## 2.2.2 Bilaplaciano

Distintos autores han propuesto diversos modelos matemáticos para poder determinar la deflexión de cuerpos. Uno de estos autores es Turcotte, quien propone un modelo geofísico para modelar la deformación de la litósfera. Este modelo contiene un término que es el bilaplaciano, el cual es una derivada de cuarto orden respecto a las variables espaciales.

En este trabajo se anexa la construcción del bilaplaciano, en la cual presenta un parafraseo de la construcción del bilaplaciano realizada por Turcotte (Anexo A). La ecuación del bilaplaciano se presenta a continuación:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} + (\rho_m - \rho_c) g w = q_a(x) \quad (1.4)$$

En la cual el valor de  $D$  está dado por:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.5)$$

Y cada uno de los parámetros elastomecánicos que corresponden al modelo geológico se pueden ver en la Tabla 2.

**Tabla 2**

*Parámetros del bilaplaciano*

<b>Parámetro</b>	<b>Descripción</b>	<b>Unidades</b>
$w$	Deflexión	$m$
$D$	Rigidez flexural	$Nm$
$P$	Fuerza horizontal	$Nm^{-1}$
$\rho_m$	Densidad de la litósfera	$kg/m^3$
$\rho_c$	Densidad de la corteza continental	$kg/m^3$
$g$	Gravedad	$m/s^2$
$E$	Módulo de Young	$Pa$
$h$	Grosor de la placa	$m$
$\nu$	Coficiente de Poisson	
$q_a(x)$	Carga soportada	$P$

**Fuente:** elaboración propia.

El primer término de la ecuación 1.4 está asociado a la segunda derivada de los momentos torsionales en la placa, de allí se origina el bilaplaciano. El término  $q(x)$  corresponde al peso aparente de la placa, ya que actúa el peso y una fuerza de empuje producida por el manto. El último término hace referencia a los esfuerzos normales que producen deflexiones positivas o negativas según corresponda a las condiciones iniciales, estas son las que dan origen a los pliegues, zonas de deformación anticlinal y sinclinal de las cadenas montañosas.

La ecuación 1.4 expuesta en la presente sección, sin pérdida de generalidad, se puede reescribir para tres dimensiones de la siguiente manera:

$$D \left( \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d^4 w}{dy^4} + \frac{d^4 w}{dz^4} \right) + (\rho_m - \rho_c) g w \quad (1.6)$$

$$= q(x) - P \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right)$$

En este proyecto se considerará la siguiente condición inicial:

$$w(x, y, z) = 0 \quad 0 < x < l_0, 0 < y < l_1, 0 < z < l_2 \quad (1.7)$$

En la cual  $l_0, l_1$  y  $l_2$  son los límites del dominio finito. Además, se tendrán las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{dw}{dx} = 0, \text{ en } (0, y, z) \quad (l_0, y, z) \quad (1.8)$$

$$\frac{dw}{dy} = 0, \text{ en } (x, 0, z) \text{ } (x, l_1, z) \quad (1.9)$$

$$\frac{dw}{dz} = 0, \text{ en } (x, y, 0) \text{ } (x, y, l_2) \quad (1.10)$$

### 2.2.3 El método de diferencias finitas

La solución de problemas de placas por medio de métodos analíticos está limitada por condiciones iniciales y de frontera, si estas condiciones son muy complejas, los análisis pueden llegar a ser muy complejos y, por tanto, el análisis se vuelve tedioso e incluso imposible. En tales casos, los métodos numéricos son la mejor opción para desarrollar una aproximación de la solución. Entre las técnicas numéricas presentes disponibles, el método de diferencias finitas es uno de los más conocidos y utilizado para resolver ecuaciones diferenciales parciales por su eficiencia y sencillez, presentando errores en un margen ínfimo.

Las diferencias finitas son una herramienta que permite la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales considerando una aproximación para una cantidad finita de elementos.

El método consiste en una aproximación de las derivadas parciales por expresiones algebraicas con los valores de la variable dependiente en un número finito de puntos seleccionados en el dominio. Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de



ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados. El valor de los puntos seleccionados se convierte en las incógnitas. La solución del sistema elaborado permite obtener la solución aproximada en cada punto seleccionado de la malla. (Borrero *et al.*, 2009)

## 2.2.4 Discretización del bilaplaciano

Esta sección incluye la discretización del bilaplaciano, y su desarrollo se determina en una parte de los anexos. Este procedimiento es requerido para poder obtener la solución numérica de la deflexión en una placa, teniendo en mente que esta placa ha de tener sus medidas discretas para utilizar la recursividad del método sobre cada uno de los nodos que se pueda construir sobre el área para trabajar.

Para comenzar a discretizar la ecuación 1.6, se consideran las discretizaciones espaciales para segundo y cuarto orden. Su construcción es presentada en los Anexos B y C del presente trabajo. En estas ecuaciones se hace contracción en la notación, teniendo en cuenta que el subíndice  $i$  es para el eje  $x$ , el subíndice  $j$  es para el eje  $y$ , y el subíndice  $k$  es para el eje  $z$ . Por ejemplo, el valor numérico  $i + 2$  hace referencia a  $x + 2\Delta x$ . Las ecuaciones necesarias para el debido procedimiento son:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_{\{i+1,j,k\}} - 2w_{\{i,j,k\}} + w_{\{i-1,j,k\}}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (1.11)$$

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{w_{\{i,j+1,k\}} - 2w_{\{i,j,k\}} + w_{\{i,j-1,k\}}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (1.12)$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{w_{\{i,j,k+1\}} - 2w_{\{i,j,k\}} + w_{\{i,j,k-1\}}}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2) \quad (1.13)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{w_{\{i+2,j,k\}} - 4w_{\{i+1,j,k\}} + 6w_{\{i,j,k\}} - 4w_{\{i-1,j,k\}} + w_{\{i-2,j,k\}}}{\Delta x^4} + O(\Delta x^4) \quad (1.14)$$

$$\frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{w_{\{i,j+2,k\}} - 4w_{\{i,j+1,k\}} + 6w_{\{i,j,k\}} - 4w_{\{i,j-1,k\}} + w_{\{i,j-2,k\}}}{\Delta y^4} + O(\Delta y^4) \quad (1.15)$$

$$\frac{d^4 w}{dz^4} = \frac{w_{\{i,j,k+2\}} - 4w_{\{i,j,k+1\}} + 6w_{\{i,j,k\}} - 4w_{\{i,j,k-1\}} + w_{\{i,j,k-2\}}}{\Delta z^4} + O(\Delta z^4) \quad (1.16)$$

Para solucionar la ecuación diferencial conocida como bilaplaciano (ecuación 1.6), se utilizó el método de diferencias finitas de cuarto orden y centradas; para ello, se parte de la serie de Taylor. Luego se soluciona el sistema de ecuaciones lineales y se obtienen las respectivas soluciones para las derivadas parciales de primer, segundo, tercer y cuarto orden; estas dos últimas necesarias para la solución del bilaplaciano son las ecuaciones anteriores.

Después se reemplazan las ecuaciones adquiridas anteriormente en la ecuación 1.6 para realizar el respectivo procedimiento (Anexo D) para concluir en la siguiente discretización:

$$\begin{aligned}
 & W_{\{i,j,k\}} = \\
 & = \left( q(x) \right. \\
 & \left. - D \left( \frac{W_{\{i+2,j,k\}} - 4W_{\{i+1,j,k\}} + 6W_{\{i,j,k\}} - 4W_{\{i-1,j,k\}} + W_{\{i-2,j,k\}}}{\Delta x^4} \right) \right) - \\
 & D \left( \frac{W_{\{i,j+2,k\}} - 4W_{\{i,j+1,k\}} + 6W_{\{i,j,k\}} - 4W_{\{i,j-1,k\}} + W_{\{i,j-2,k\}}}{\Delta y^4} \right) - \\
 & D \left( \frac{W_{\{i,j,k+2\}} - 4W_{\{i,j,k+1\}} + 6W_{\{i,j,k\}} - 4W_{\{i,j,k-1\}} + W_{\{i,j,k-2\}}}{\Delta z^4} \right) - \\
 & P \left( \frac{W_{\{i+1,j,k\}} - 2W_{\{i,j,k\}} + W_{\{i-1,j,k\}}}{\Delta x^2} \right. \\
 & \left. + \frac{W_{\{i,j+1,k\}} - 2W_{\{i,j,k\}} + W_{\{i,j-1,k\}}}{\Delta y^2} \right) - \\
 & P \left( \frac{W_{\{j,k+1\}} - 2W_{\{i,j,k\}} + W_{\{i,j,k-1\}}}{\Delta z^2} \right) * \\
 & \left( \left( \frac{6D}{\Delta x^4} + \frac{6D}{\Delta y^4} + \frac{6D}{\Delta z^4} \right) - \left( \frac{2P}{\Delta x^2} + \frac{2P}{\Delta y^2} + \frac{2P}{\Delta z^2} \right) + (\rho_m - \rho_c)g \right) \quad (1.17)
 \end{aligned}$$

A medida que se den las iteraciones requeridas por el método de diferencias finitas, se acumulará un error en la aproximación requerida por la ecuación 1.6.

## 2.2.5 Error de truncamiento

En la discretización de cada una de las derivadas espaciales, las ecuaciones 1.11 - 1.16 llevan un error debido al truncamiento realizado y, por lo tanto, la ecuación 1.17 considera un error de truncamiento respecto a sus derivadas parciales, esto es:

$$\begin{aligned}
 E_{\{x,y,z\}} = D & \left( \frac{8}{15} \frac{d^5 w}{dx^5} \Delta x^5 + \frac{8}{15} \frac{d^5 w}{dy^5} \Delta y^5 + \frac{8}{15} \frac{d^5 w}{dz^5} \Delta z^5 \right) \\
 & + P \left( \frac{-1}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} \Delta x^4 + \frac{-1}{12} \frac{d^4 w}{dy^4} \Delta y^4 + \frac{-1}{12} \frac{d^4 w}{dz^4} \Delta z^4 \right) + O(\Delta x^4 \\
 & \quad + \Delta x^4 + \Delta x^4)
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Con esta aproximación, se estima el valor del error por el truncamiento. Por lo tanto, con tomar valores de  $\Delta x$  y  $\Delta y$  no muy grandes se puede obtener una buena aproximación.

## 3. MARCO METODOLÓGICO

### 3.1 Método y técnica de investigación

El presente proyecto es guiado por una investigación cuantitativa y emplea un método deductivo en la estructura del proyecto, por tanto, el proyecto se limitará a analizar los datos que se puedan obtener con la hipótesis planteada.

### 3.2 Diseño de investigación

El proyecto se desarrolla teniendo en cuenta las siguientes fases:

1. Obtener una aproximación en diferencias finitas para el bilaplaciano.
2. Desarrollar un código que facilite el uso del método de diferencias finitas centradas aplicadas al bilaplaciano.
3. Validar el código realizado con ayuda de fuentes bibliográficas.
4. Determinar la topografía del Nevado del Tolima.
5. Reemplazar la superficie de la validación con una de la superficie del Nevado del Tolima.
6. Plantear el modelo de la litósfera con una carga de masa sobre la superficie.
7. Analizar la distribución de las deformaciones sobre la placa en función de la profundidad.

Al finalizar, se darán los resultados y las conclusiones pertinentes para los datos obtenidos en el modelo planteado.

## 4. DESARROLLO DEL PROYECTO

### 4.1 Validación del modelo en diferencias finitas

Para determinar que el modelo matemático desarrollado en diferencias finitas implementado en un código de C++ se puede utilizar como una aproximación adecuada, se tomará como referencia la tesis realizada titulada Plate bending analysis using finite element method (Sudhir, 2012), en la cual se calculó la deflexión de una placa con ayuda del método de elementos finitos, además de un software especializado. Dada una placa rectangular fija en todos sus lados con dimensiones de  $3 \times 2 \text{ m}$ , el material que la compone es metal con un módulo de Young de  $21 \times 10^{10} \text{ Pa}$  y un coeficiente de Poisson de 0.3, la carga ejercida sobre la superficie de la placa es de  $14 \times 10^4 \text{ Pa}$ . Sudhir dedujo el valor máximo de la deflexión, el cual es 1.668 cm por medio del método de elementos finitos, además de compararlo con el cómputo de la máxima deflexión desarrollada con el software especializado llamado LISA, el cual es 1.6397 cm.

Ahora, tomando sin pérdida de generalidad el biaplaciano en dos dimensiones para desarrollar simples placas sometidas a alguna distribución de carga, la ecuación diferencial de cuarto orden queda determinada por:

$$D \left( \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{d^4 w}{dy^4} \right) + (\rho_m - \rho_c) g w = q(x) - P \left( \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} \right) \quad (1.19)$$

Para solucionar la ecuación diferencial 1.19, se utilizó el método de diferencias finitas centradas de cuarto orden. Para ello, se soluciona el sistema de ecuaciones lineales y se obtienen las respectivas soluciones para las derivadas parciales de segundo y cuarto orden. Posteriormente, se reemplazan las ecuaciones en diferencias finitas necesarias y se obtiene el bilaplaciano discretizado.

**Tabla 3**

*Parámetros para la simulación*

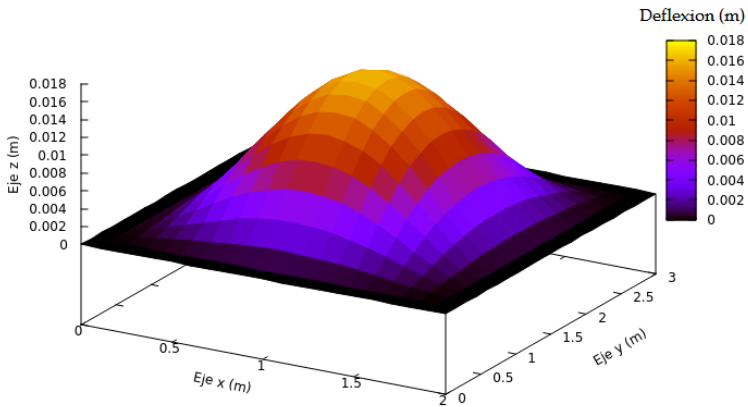
Parámetro	Valor
$\nu$	0.3
$E$	$21 \times 10^{10} Pa$
$h$	0.025 m
$\rho_c$	$0 kgm^{-3}$
$\rho_w$	$0 kgm^{-3}$
$g$	$9.8 ms^{-2}$
$P$	$0 Nm^{-1}$

**Fuente:** elaboración propia.

Desarrollado el código en C++ con la ecuación 1.19 ya discretizada, se procede a calcular la deflexión que se produce en la placa debido a la carga con la que es sometida y con los parámetros dados en la Tabla 3, teniendo en cuenta que los extremos de la placa están fijos. Los resultados se pueden ver en las Figuras 1 y 2.

### Figura 1

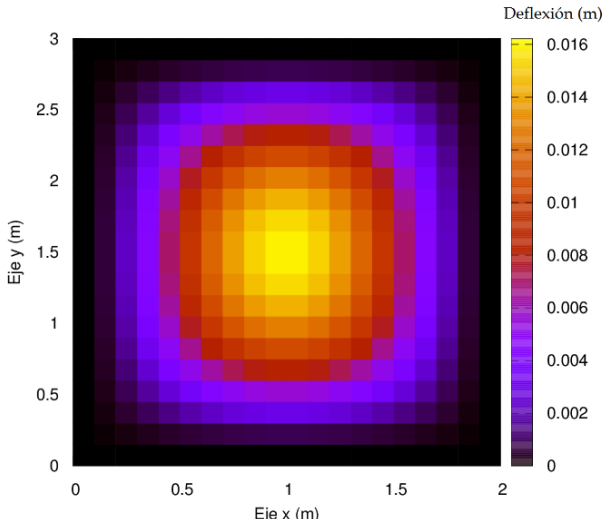
*Deflexión de una placa de 2 x 3 m sometida a una carga continua de  $14 \times 10^4 \text{ Pa}$ . Escala en metros*





## Figura 2

Vista superior. Deflexión de una placa de  $2 \times 3$  m sometida a una carga continua de  $14 \times 10^4 \text{ Pa}$ . Escala en metros



Los resultados obtenidos por medio del método de diferencias finitas centradas sobre la placa de  $2 \times 3$  m y demás parámetros impuestos proporciona un valor máximo de deflexión de  $0.0162172$  m, de tal forma que concuerda el orden de centímetros con los datos en la tesis de Sudhir realizada con el *software* y el método de elementos finitos, quien obtuvo una deformación alrededor del valor de  $1.66$  cm; aun así, se presenta un error en el orden de milímetros, esto debido al error de truncamiento y computacional que existe al utilizar el método de diferencias finitas centradas, el cual en este caso es de orden  $O(h)$ .

## 4.2 El Nevado del Tolima

En la presente subsección se determina la superficie que se dispondrá para el proyecto, en este caso la superficie del Nevado del Tolima, un estratovolcán el cual se localiza alrededor de las coordenadas geográficas  $4^{\circ}39'N$  y  $75^{\circ}22'W$  y hace parte del departamento del Tolima, en la Cordillera Central de los Andes de Colombia –colindando con los volcanes Nevado de Santa Isabel, Nevado del Ruiz y Cerro Machín–. Su punto más alto se ubica sobre los  $5280\text{ m}$  aproximadamente (Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales [Ideam], 2018). El territorio abarcado por el Nevado del Tolima exhibe una forma de cono apuntando hacia el cielo, y en su pico se presenta un pequeño glaciar con un área de  $0.57\text{ Km}^2$ , como se puede ver en la Figura 3.



**Figura 3**

*Imágenes del Nevado del Tolima, 2012*

**Fuente:** Servicio Geológico Colombiano  
(2018).4.3 Geología del Nevado del Tolima

Para continuar con el proceso para hallar las deflexiones producidas por el Nevado del Tolima, se tendrá presente que la estructura de estudio está formada principalmente por andesita, granodiorita, cuarzo y cuarcita, según la Plancha 225 anexada en el presente trabajo.

Su composición es característica de una zona volcánica, así:

El Nevado del Tolima se formó sobre un basamento de vulcanitas miopleistocénicas y rocas cristalinas del Batolito de El Bosque y del Grupo de Cajamarca. La formación del Tolima incluye dos etapas ocurridas en el cuaternario, una inicial caldérica ción del actual cono (Tolima moderno). (Servicio Geológico Colombiano, 2018).

En la zona definida por el nevado se encuentran depósitos glaciares en la parte superior, depósitos piroclásticos en el exterior de la corteza, rocas intrusivas (andesitas) a profundidad en el este, esquistos cuarzo-sericíticos micasos cuarzosos en el oeste y andesitas en la parte central a profundidad del nevado, como se puede ver en la Plancha 225 del Nevado del Ruiz (Mosquera *et al.*, 2010).

Dentro de la zona de estudio existen diversas fallas que pertenecen a la familia de Fallas Palestina, una de las de mayor interés para este trabajo, la cual presenta un inicio en el pantano del Quindío en dirección sureste, y una discontinuidad por el centro del Nevado del Tolima y finaliza cerca de la quebrada Los Andes.

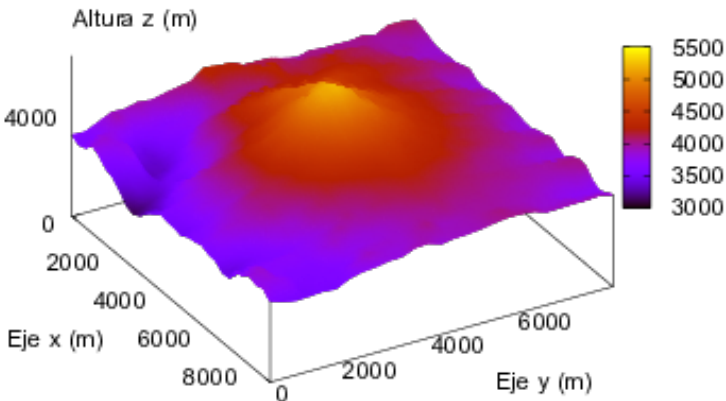
Teniendo en cuenta la información anterior y la representada en la Plancha 225, se consideran en este trabajo los tipos de rocas predominantes en la zona de estudio según su densidad para determinar una carga específica en las respectivas zonas del Nevado del Tolima en el modelo que se construirá en C++; además, se ha de utilizar la información de la ubicación de las fallas para encontrar alguna relación posible con los resultados para hallar con el modelo que se construirá.

## 4.4 Topografía del Nevado del Tolima

Con la ayuda de la página de libre acceso Alaska Satellite Facility (Facility, 2018), se descargó un modelo digital de elevación (.DEM) del Nevado del Tolima, el cual se cargó en el *software* comercial ARCGIS (ESRI, 2018) para extraer la correcta medición de las coordenadas de la superficie con su respectiva altura ósea de las coordenadas  $x, y, z$ , las cuales se modificaron para facilitar su uso en el presente proyecto, obteniendo el siguiente resultado digitalizado con el *software* Gnuplot (2018):

### Figura 4

*Topografía del Nevado del Tolima. Escala de colores en metros*



Los datos de elevación de la superficie posteriormente se cargan en el código desarrollado en C++, para luego calcular la carga que genera el Nevado del Tolima con la ayuda de la altura y la densidad de la roca en su respectiva zona. Cuantificada esta carga, se procede a considerarla en la ecuación del bilaplaciano solucionado en el código computacional de C++. Al finalizar, se reproducirá el código para obtener las deflexiones y esfuerzos para poder analizar los resultados obtenidos. Es preciso mencionar que no se consideran efectos producidos por presiones internas térmicas debido a la cámara magmática, únicamente el efecto debido a la distribución de masa del Nevado del Tolima.

## 4.5 Resultados

Conforme al modelo matemático establecido, se procedió a la ejecución del código en el cual los parámetros usados para las rocas predominantes del Nevado del Tolima están dados en la Tabla 5, junto a sus propiedades mecánicas utilizadas en el trabajo. Debido a que se necesita la topografía del lugar de estudio, se hizo un procesamiento para obtenerla, enunciado anteriormente en la subsección 4.4. Esta topografía se cargó en el código y se obtuvo la imagen mostrada en la Figura 4. Allí se evidencia la forma del Nevado del Tolima y se observa un pico aproximado en la coordenada  $x = 4000$  m y  $y = 4000$  m. Para la simulación se tomó un valor de  $\Delta x = 50 \frac{m}{div}$ ,  $\Delta y = 50 \frac{m}{div}$ ,  $\Delta z = 50 \frac{m}{div}$  para una grilla de  $n_x = 154div$ ,  $n_y = 159div$  y  $n_z = 50div$ , es decir,  $154 \times 159 \times 50$  divisiones.

**Tabla 4***Parámetros de la simulación*

Parámetro	Valor
$\rho_c$	3300 $kgm^{-3}$
$\rho_w$	2800 $kgm^{-3}$
$g$	9.8 $ms^{-2}$
$P$	$-10^{13}$ $Nm^{-1}$

**Fuente:** elaboración propia.

Los valores utilizados en el bilaplaciano se muestran en la Tabla 4, los cuales son propuestos para determinar una aproximación adecuada de las deflexiones de la litósfera.

**Tabla 5***Propiedades de las rocas*

Tipo de roca	Densidad ( $kg/m^3$ )	$E$ (GPa)	$\nu$
Andesita	2500 - 2800	10-70	0.2
Granodiorita	2700	0.7	0.25

Cuarzo	2 2 0 0 - 2600	70	0.17
Cuarcita	2 2 0 0 - 2300	24-44	0.23

**Fuente:** elaboración propia.

La densidad, el módulo de Young y el coeficiente de Poisson utilizados para hallar la rigidez flexural en áreas específicas serán determinados por la roca predominante según la geología del Nevado del Tolima; estos valores  $\bar{m}$  pueden ver en la Tabla 5; la gravedad se tomó como  $9.8 \frac{m}{s^2}$ .

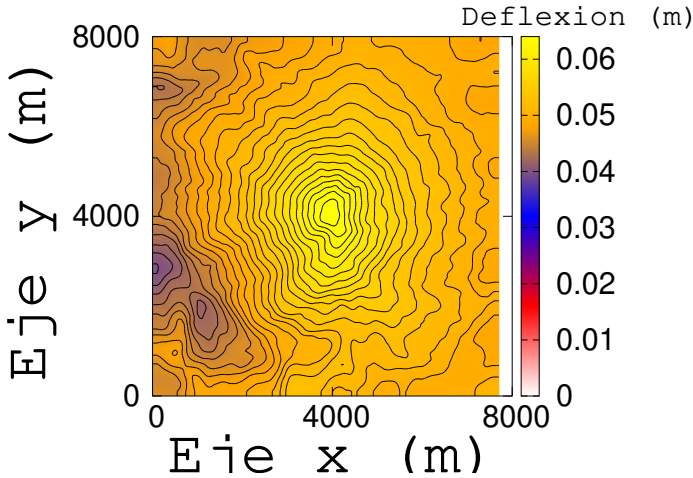
Con la información topográfica establecida se crea una función de carga, la cual depende necesariamente de la densidad de la roca adecuada, además de la altura de la columna que se encuentra encima de cada posición  $x, y$ . Posteriormente, se obtuvieron los mapas de deformación mostrados en las Figuras 5, 8, 11 y 14.

Para continuar, se producen mapas de esfuerzo uniaxial del dominio estudiado en el modelo, es decir, esfuerzos en la dirección de  $x, y, z$ , los cuales son evidenciados después de cada mapa de deformación.

### Figura 5

*Distribución de la deformación a una profundidad de 0 m donde alcanza un valor máximo de deflexión de 0.064 m*





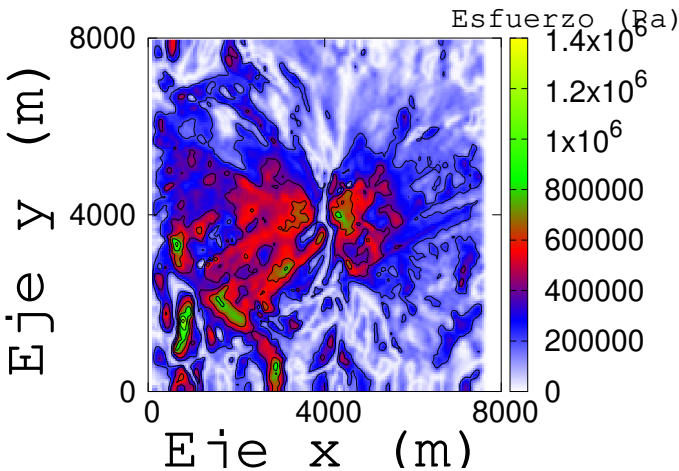
Los colores azul y rojo representan zonas donde hubo una menor deformación, mientras que la región naranja tendiendo al amarillo representa las zonas donde hubo una mayor deformación de la corteza. Es evidente que justo debajo del Nevado del Tolima (coordenada  $4000 \text{ m}$ ,  $4000 \text{ m}$ ), y más en la zona central, hay una mayor deformación de la litósfera. Estos valores se encuentran en el margen de la fracción de centímetros. Un aspecto importante es que a mayor profundidad la deformación se hace menor, es decir, que la corteza se deforma en mayor medida en las capas más someras, y depende de la forma y distribución de la masa.

Es preciso mencionar que, con este modelo, se pueden encontrar zonas en donde haya mayor cantidad de esfuerzos almacenados en forma de energía potencial elástica. Esto ocurre debido a que los lugares donde hay una mayor deformación en la roca están asociados inherentemente a una mayor presencia de esfuerzos para lograr esas deformaciones. Lo anterior ocurre por la ley

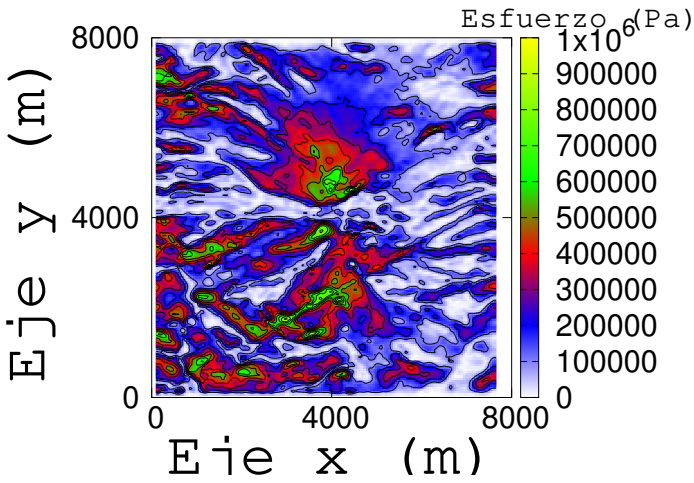
de Hooke que establece la relación de proporcionalidad directa entre la deformación  $v$  el esfuerzo. Para profundidades del orden de los 2500 m (Figura 5) no se evidencian gradientes de las deformaciones que sean significativas y la deformación producida por el nevado es muy baja (del orden de los 0.06  $m$ ). Esto daría un indicio de que, para un sistema como el Nevado del Tolima, las fracturas ocurrirían en las profundidades más someras de la litósfera, ya que los gradientes en las deformaciones son más pronunciados y marcados en profundidades de los 200 m a 1200 m.

### Figura 6

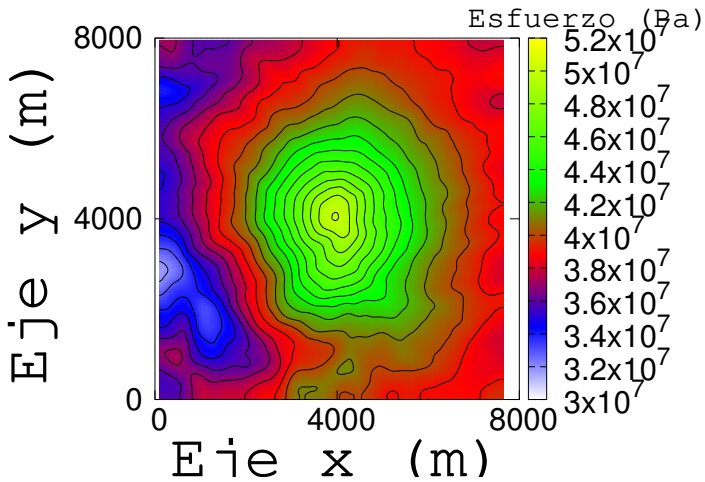
*Esfuerzos uniaxiales en  $x, y$  y  $z$  a una profundidad de 0 m*



(a) *Esfuerzos en la dirección x.*



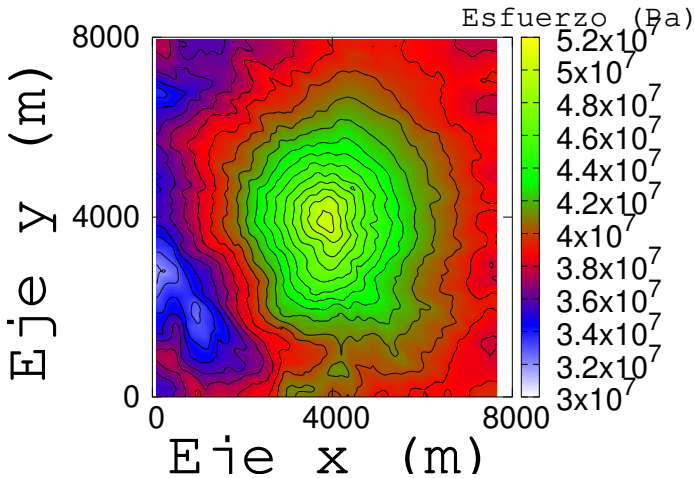
(b) Esfuerzos en la dirección y.



(c) Esfuerzos en la dirección z.

### Figura 7

Distribución de esfuerzos totales a una profundidad de 0 m donde alcanza un valor máximo de esfuerzo de 5 0370 900 Pa

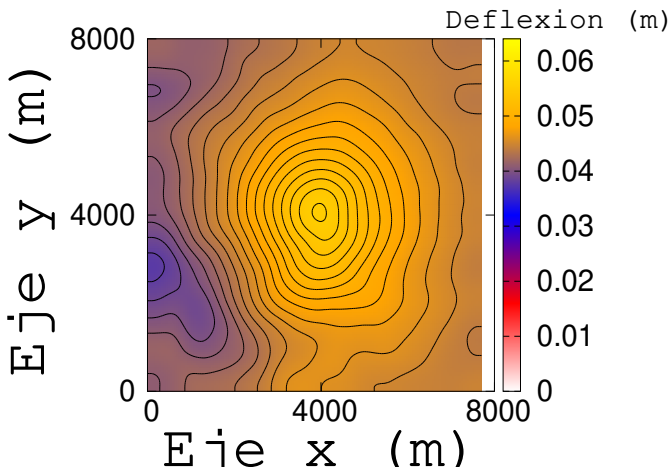


En los mapas de esfuerzo, los colores amarillo y verde representan zonas donde se concentra la mayor cantidad de esfuerzos, y las zonas blancas, azules y rojas son aquellas donde los esfuerzos contemplan bajas cantidades en la respectiva profundidad. Los diferentes mapas de esfuerzo uniaxiales permiten ver cómo los esfuerzos son distribuidos a lo largo del área, siendo el mapa de esfuerzo uniaxial en la dirección  $z$  aquel que contiene los esfuerzos de mayor cantidad, en el orden de  $10^7$  Pa, y el mapa de esfuerzo uniaxial en la dirección  $x$  y  $y$  aquellos con la menor cantidad de esfuerzo distribuido, estando estos en la escala de  $10^6$  Pa, para la profundidad de 0 m. Los esfuerzos totales evidenciados en la Figura 7 presentan una gran concentración en la zona central del dominio, con un esfuerzo máximo de 503709000 Pa, esto debido a que las deflexiones de mayor cantidad se

encuentran en el mismo lugar; al acercarse a las fronteras del dominio estos esfuerzos han disminuido sin llegar a ser nulos. Las líneas negras en cada una de las muestras tomadas del modelo representan un cambio en la cantidad de deflexión o de esfuerzo según sea el caso: cuanto más cercana esté una línea de otra, quiere decir que el cambio de cantidad es veloz, mientras que, si la distancia entre dos de estas líneas es grande, el cambio que se produce se realiza de manera lenta. Los cambios más relevantes en los mapas de esfuerzo son los mencionados en el primer caso, donde las líneas están más cercanas entre sí debido a que, al haber grandes concentraciones de esfuerzos y haber un cambio veloz en la cantidad de estos, hay una mayor deformación en la zona, como se puede ver en la zona alrededor de la coordenada 4000,4000 de la Figura 7.

### Figura 8

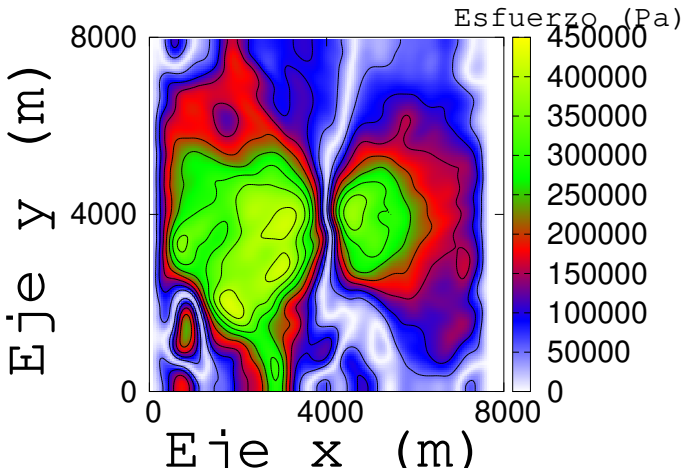
*Distribución de la deformación a una profundidad de 250 m donde alcanza un valor máximo de deflexión de 0.055 m*



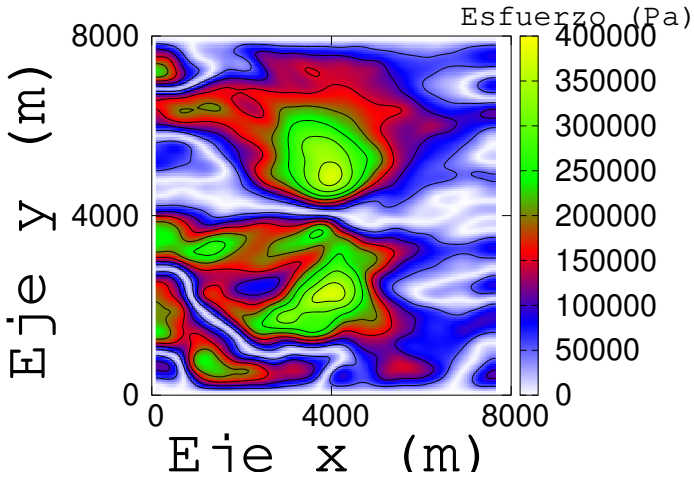
Las muestras tomadas de los resultados del modelo establecido presentan una discontinuidad de las deformaciones a medida que aumenta la profundidad en la litósfera, como se observa en las muestras tomadas. En las Figuras 5 y 8 se puede presenciar que las deformaciones encontradas están en el margen de los 0.03 m y los 0.064 m , esto quiere decir que, a lo largo de los 0 m y los 250 m, los esfuerzos y las tensiones ejercidos en la litósfera producidos por la flexión a causa de la estructura soportada llegan a ser de gran magnitud, y esto es demostrado por los mapas de fallas y de esfuerzo presentados.

### Figura 9

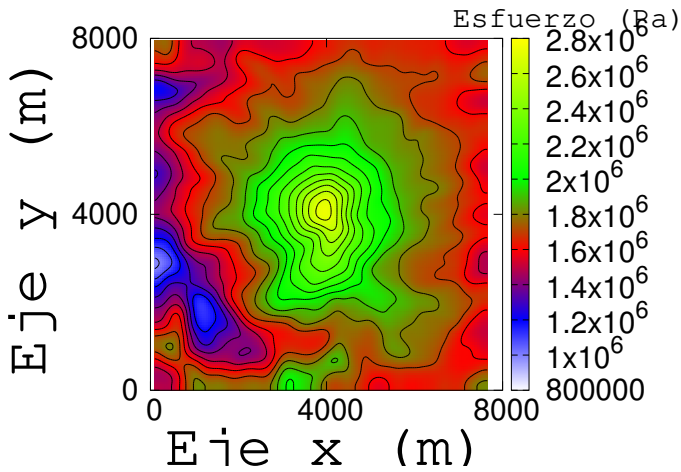
*Esfuerzos uniaxiales a una profundidad de 250 m*



(a) *Esfuerzos en la dirección x.*



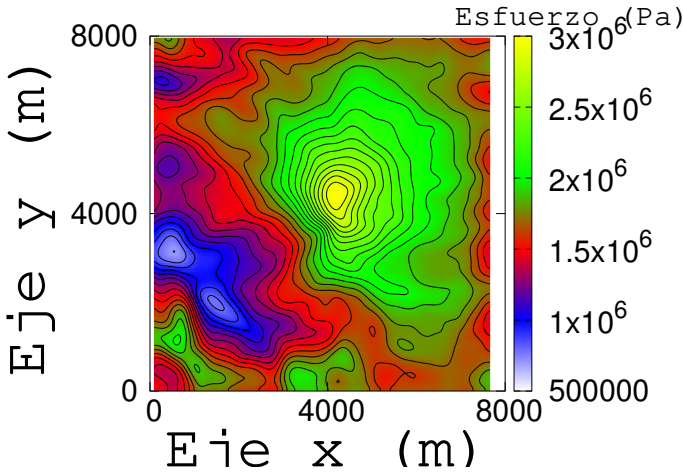
(b) Esfuerzos en la dirección y.



(c) Esfuerzos en la dirección z.

### Figura 10

*Distribución de esfuerzos uniaxiales totales a una profundidad de 250 m*



Al encontrar la profundidad de 250 m, las deflexiones han disminuido de magnitud e igualmente los esfuerzos son menores, aun así, ejercen una gran presión en las rocas que se encuentran en la litósfera. La mayor cantidad de estos esfuerzos se encuentran acumulados alrededor de la coordenada 4000,4000 del dominio, que se pueden ver en la Figura 11, llegando a tener magnitudes de  $10^6 Pa$ .

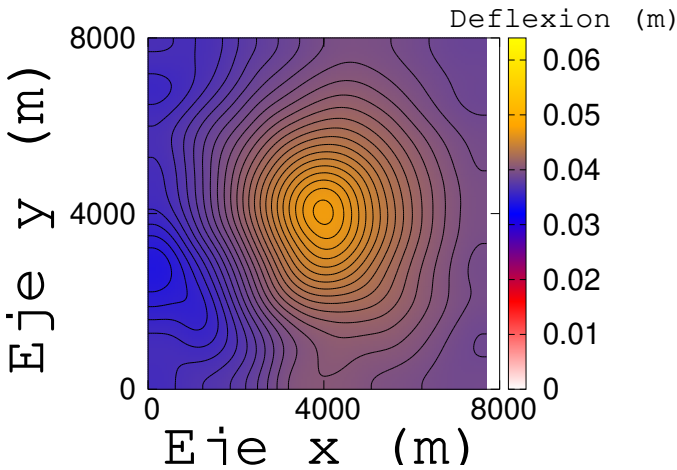
Las muestras de esfuerzos uniaxiales en cada dirección para las profundidades tomadas presentan variaciones bruscas en la magnitud de esfuerzos para los esfuerzos uniaxiales en la dirección  $x$  alrededor de las rectas  $x = 0$ ,  $x = 4000$ ; para los esfuerzos uniaxiales



en la dirección y alrededor de las rectas  $y = 0$ ,  $y = 4000$  ; los esfuerzos uniaxiales en la dirección z presentan una distribución de esfuerzos más homogénea.

### Figura 11

*Distribución de la deformación a una profundidad de 500 m donde alcanza un valor máximo de deflexión de 0.047 m*

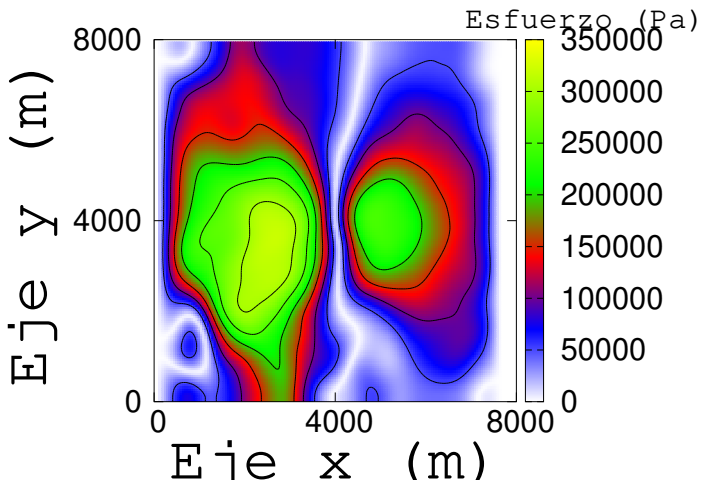


En la profundidad de la estructura de la litósfera (Figuras 8 y 11) esto es entre una profundidad de 250 m y 500 m, se concede una vista de las variaciones que se obtienen en la deflexión en el interior del sistema simulado, las cuales por la profundidad a la que se encuentran las deflexiones en esta zona han disminuido considerablemente, esto debido a que los esfuerzos

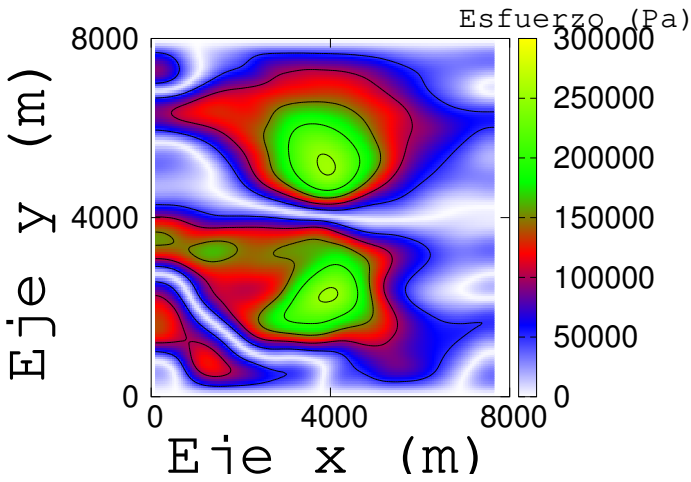
producidos por la carga se han distribuido a profundidad de la roca que constituye la litósfera. Es de apreciar que la mayor deformación está ubicada en el centro de las gráficas, persistiendo esta característica en las diversas profundidades de la litósfera.

### Figura 12

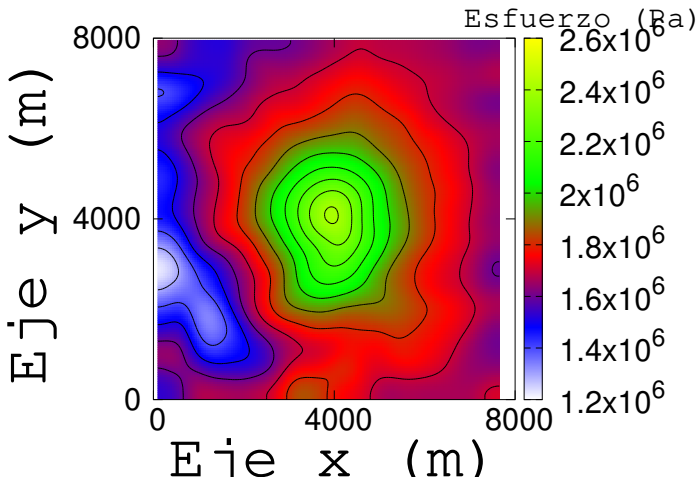
*Esfuerzos uniaxiales a una profundidad de 500 m*



(a) *Esfuerzos en la dirección x.*



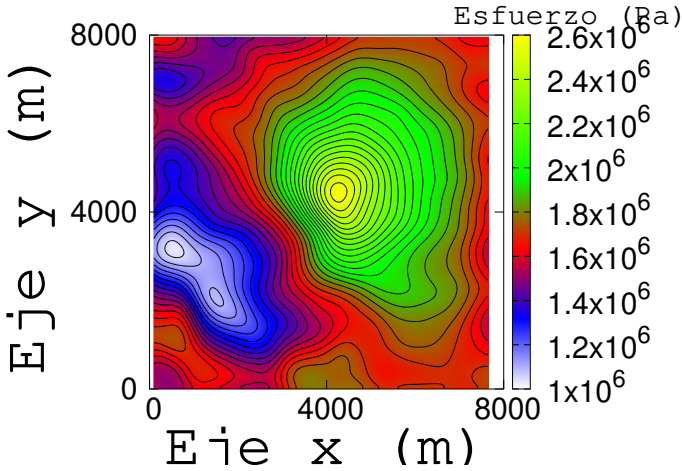
(b) Esfuerzos en la dirección y.



(c) Esfuerzos en la dirección z.

### Figura 13

*Distribución de esfuerzos totales a una profundidad de 500 m*

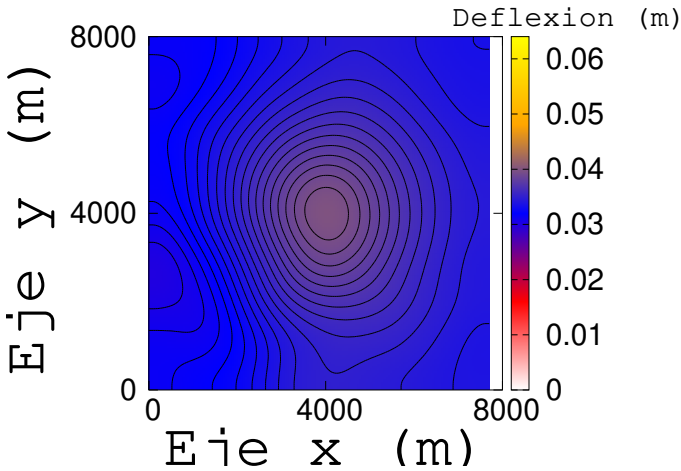


La Figura 13 presenta un comportamiento similar a la presentada en la profundidad de  $500 \text{ m}$ , donde los esfuerzos se concentran en los contornos del área definida media del dominio, con una considerable disminución en la cantidad de esfuerzo.

En profundidades inferiores a los  $500 \text{ m}$  (Figura 14), se logra advertir las pequeñas cantidades de deflexión en distintas zonas de la litósfera, por ende, se puede afirmar que las deformaciones que se presentan en estos lugares pueden no lograr esfuerzos lo suficientemente grandes para generar fallas en la estructura.

**Figura 14**

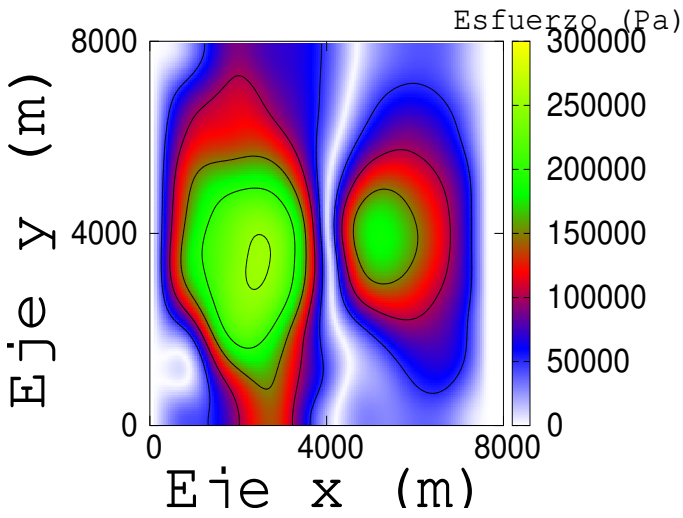
*Distribución de la deformación a una profundidad de 750 m donde alcanza un valor máximo de deflexión de 0.039 m*



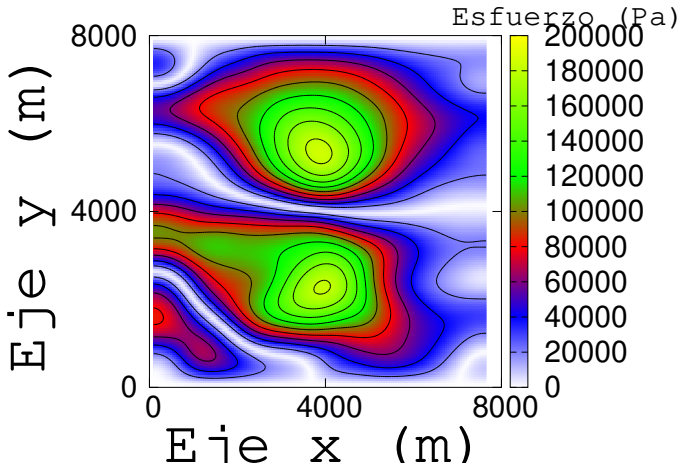
Cuanto más se descende en la litósfera, las deformaciones se reducen eventualmente, así mismo, los esfuerzos que se encuentran en profundidades más allá de los 750 m de profundidad son mínimos en comparación con los encontrados en la profundidad inicial (Figura 5). Por lo tanto, se ha de despreciar los datos hallados a mayor profundidad de 1000 m, ya que estos tienden a ser imperceptibles.

**Figura 15**

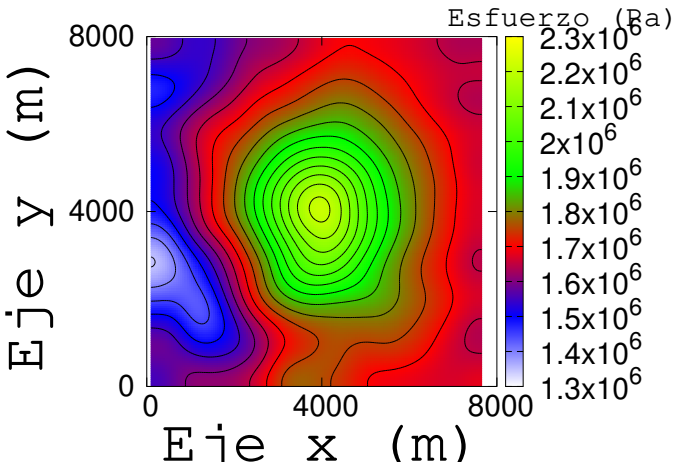
*Esfuerzos uniaxiales a una profundidad de 750 m*



(a) *Esfuerzos en la dirección x.*



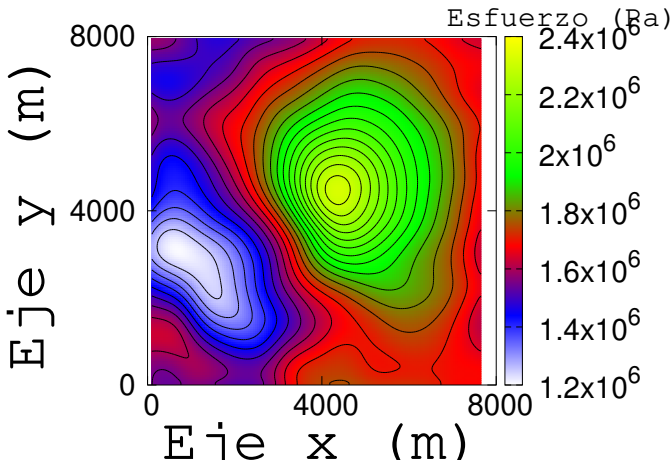
(b) Esfuerzos en la dirección  $y$ .



(c) Esfuerzos en la dirección  $z$ .

### Figura 16

*Distribución de esfuerzos totales a una profundidad de 750 m*



Construido el modelo y conseguido los resultados, se ha de tener en cuenta que las soluciones obtenidas son aproximaciones de lo que son las deflexiones en la litósfera por el peso del Nevado del Tolima, considerando un error  $O(h)$  (ecuación 2.18) por el método de diferencias finitas centradas utilizado; además, se comprenden las características que no se han considerado del modelo establecido, a saber aspectos como la anisotropía de las rocas que componen la litósfera, el comportamiento de las deflexiones respecto a las estructuras aledañas al Volcán del Tolima y otros fenómenos, además de la flexión que puede ejercer influencia en las deformaciones producidas a profundidad.



## 5. CONCLUSIONES

- Se determinó una resolución aproximada de la ecuación del bilaplaciano utilizando el método de diferencias finitas.
- Sobre un área de dimensiones  $8000\text{ m} \times 8000\text{ m}$  que modela la litósfera, se ha reproducido una superficie que representa el Nevado del Tolima, gracias a los datos de elevación adquiridos. Luego, estos datos se han cargado en un código desarrollado en C++ junto a los datos de densidad respectivos para la zona de estudio, y así determinar la carga ejercida sobre la litósfera.
- Desarrollado el código con las discretizaciones adecuadas, se logró hallar resultados similares con el modelo realizado por Sudhir, teniendo en cuenta un error de truncamiento, de redondeo y de cómputo, confirmando de este modo el éxito del método de diferencias finitas para utilizar.
- Determinada la carga que supone la superficie del Nevado del Tolima y desarrollado el código, se continuó para determinar las deformaciones a profundidad sobre la litósfera.
- Se encontró una primera aproximación para establecer el orden de las deformaciones que se producen en la litósfera, justo por debajo del Nevado del Tolima.
- Entre los  $200\text{ m}$  de profundidad se evidencia en grado muy bajo de contrastes en la deformación de la corteza, es decir, que, a esta profundidad, aún la carga del nevado podría producir fracturas en algunas

zonas de la corteza, especialmente si se pasan de zonas donde la deformación es considerable a zonas donde la deformación es mínima.

- A profundidad, la zona de más interés resulta estar entre los 0 m y los 750 m, esto debido a que las deflexiones encontradas en este margen son cantidades considerables; en zonas más someras las deflexiones se pueden considerar despreciables.
- En este proyecto se han encontrado esfuerzos de gran cantidad en la parte central superior de la litósfera. En consecuencia, es posible que el comportamiento de esta parte proceda de manera frágil y, por ende, genere fallas en el futuro o actividad sísmica. La parte inferior de la litósfera se presenta de manera dúctil debido a la pequeña cantidad de esfuerzos que existen en la zona.
- Al desarrollar las deflexiones por medio de un código construido en el lenguaje de programación C++, permite ciertas facilidades en cuanto a velocidad de procesamiento. Se recomienda para futuros estudios realizar la construcción del método en otros lenguajes de programación de más alto nivel, para desarrollar posiblemente una construcción más sencilla y eficaz del procesamiento de los modelos matemáticos para la deflexión, por medio del método de diferencias finitas centradas.
- Las deflexiones encontradas del Nevado del Tolima son una aproximación adecuada, aun así, se debería considerar en un futuro las estructuras en derredor de esta para determinar cómo las cargas ejercidas en zonas cercanas afectan las deformaciones de la zona estudiada en este proyecto.

## REFERENCIAS

- Alfaro, A. y Romero, M. (2009). Dificultades en la evaluación de la amenaza sísmica de Ibagué debido a la escasez de datos. *Revista Épsilon*, (13), 241-253. [http://www.ciees.org/doc\\_estudios/05\\_Romero\\_Alfaro\\_2009b.pdf](http://www.ciees.org/doc_estudios/05_Romero_Alfaro_2009b.pdf)
- Borrero, C., Castillo, H., Toro, L. y Alvarán, M. (2009). Geochemistry and tectonic controls of the effusive activity related with the ancestral Nevado del Ruiz volcano, Colombia. *Geofísica Internacional*, 48(1), 149-169. <http://www.scielo.org.mx/pdf/geoint/v48n1/v48n1a11.pdf>
- Carrillo, A., González, K. y Mendoza, Ó. (2015). *Introducción al método de diferencias finitas y su implementación computacional*. Universidad Autónoma de México. [https://www.academia.edu/43368237/Introducci%C3%B3n\\_al\\_M%C3%A9todo\\_de\\_Diferencias\\_Finitas\\_y\\_su\\_Implementaci%C3%B3n\\_Computacional](https://www.academia.edu/43368237/Introducci%C3%B3n_al_M%C3%A9todo_de_Diferencias_Finitas_y_su_Implementaci%C3%B3n_Computacional)
- ESRI. (2018, 11 de octubre). *ArcGIS Online*. <http://www.arcgis.com/index.html>
- Facility, A. (2018, 25 de septiembre). *Fairbanks University*. <https://www.asf.alaska.edu/>
- Gnuplot. (2018). *Gnuplot homepage*. <http://www.gnuplot.info/>
- Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales [Ideam]. (2018). *Volcán Nevado del Tolima*. <http://www.ideam.gov.co/web/ecosistemas/volcan-nevado-tolima>
- Kenneth, O. y Speare, P. (1977). A simplified reissner theory for plate bending. *International Journal of Solids and Structures*, 13(11), 1073-1079. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(77\)90077-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90077-4)

- Ministerio de Obras Públicas. (2018). *Instituto Nacional de Prevención Sísmica*. <http://contenidos.inpres.gov.ar/docs/Fallas%20Geol%C3%B3gicas.pdf>
- Mosquera, D., González, H., Marín, P. y Vesga, C. (2010). *Geología de la Plancha 225 Nevado del Ruiz*. Instituto Colombiano de Geología y Minería.
- Robertson, K., Flórez, A. y Ceballos, J. L. (2002). Geomorfología volcánica, actividad reciente y clasificación en Colombia. *Cuadernos de Geografía, Revista Colombiana de Geografía*, 11(1-2), 37-76. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/rcg/article/view/71596>
- Semie, A. (2010). *Numerical modelling of thin plates using the finite element method*. Tesis de maestría, Addis Ababa University (Etiopía). <http://etd.aau.edu.et/bitstream/handle/123456789/7199/Addisu%20Gezahegn.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Servicio Geológico Colombiano. (2018). *Generalidades volcán Nevado del Tolima*. <https://www2.sgc.gov.co/sgc/volcanes/VolcanNevadoTolima/Paginas/generalidades-volcan-nevado-tolima.aspx>
- Sudhir, N. (2012). *Plate bending analysis using finite element method*. Trabajo de grado, National Institute of Technology, Rourkela (Deemed University), India. <http://ethesis.nitrkl.ac.in/3303/1/108ME015.pdf>
- Turcotte, D. y Schubert, G. (2014). *Geodynamics* (3.ª edición). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511843877>

## ANEXOS

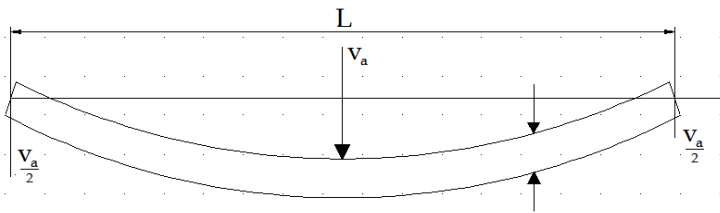
### A. Construcción del bilaplaciano

Inicialmente, para determinar el modelo matemático se ha de tener en cuenta que estas presentan un comportamiento elástico en tiempos geológicos, además que están sometidas a distintas cargas, por ejemplo, volcanes, montes submarinos, etcétera, las cuales flexionan la litósfera debido a las cargas ejercidas por estas topografías.

Relacionando la flexión de la litósfera con sus cargas superficiales, podemos deducir las propiedades elásticas y la deflexión de las placas. Primero se ha de considerar un ejemplo simple de la flexión: una placa de grosor  $h$  fija en sus extremos y deformándose en una carga puntual de fuerza  $V_a$  ( $\text{N m}^{-1}$ ) aplicada en su centro (Figura 17).

**Figura 17**

Placa de longitud  $L$  y grosor  $h$  fija en sus extremos y flexionada en una carga  $V_a$

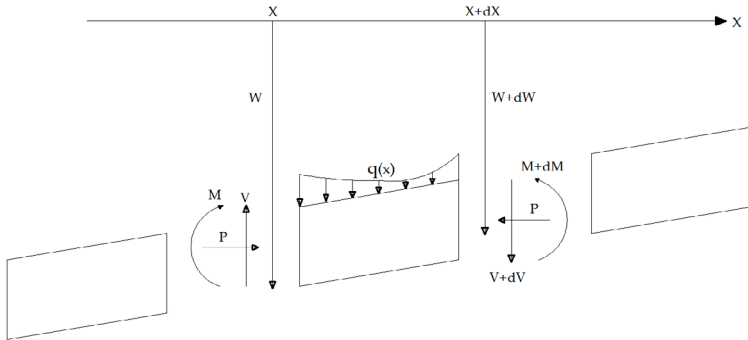


**Fuente:** Turcotte y Schubert (2014).

Las fuerzas aplicadas verticalmente y la simetría de la situación requieren que la fuerza lineal vertical aplicada en cada uno de los soportes sea igual a  $V_a/2$ . Se asume que  $h \ll L$  y  $w \ll L$ , la deflexión de la placa puede ser determinada en el equilibrio de la acción de todas las fuerzas y los torques ejercidas en esta. Las fuerzas y los torques en una sección de la placa entre localizaciones horizontales  $x$  y  $x + dx$  son mostradas en la Figura 18.

## Figura 18

*Fuerzas y torques en una sección pequeña de la placa deformada*



**Fuente:** Turcotte y Schubert (2014).

$q(x)$  es una fuerza hacia abajo por unidad de área ejercida en la placa que representa la carga por unidad de longitud en la dirección  $z$  entre  $x$  y  $x + dx$ . La combinación de todos los esfuerzos de corte sobre el área en cuestión es dada por una fuerza neta de cizalla  $V$  por unidad de longitud en la dirección  $z$ , perpendicular al plano de la figura.

Una fuerza horizontal  $P$  independiente de  $x$  por unidad de longitud en la dirección  $z$  es aplicada a la placa. El momento neto de deformación  $M$  por unidad de longitud en la dirección de  $z$  que actúa en una sección transversal de la placa es el producto de los momentos ejercidos por

la tensión normal  $\sigma_{xx}$ , también conocida como la “estrés fibra”.

En el eje  $x$ , a lo largo de la placa, las fuerzas de corte son  $V$ , el momento de deformación es  $M$ , y la deflexión es  $w$ ; en  $x + dx$ , la fuerza de corte es  $V + dV$ , el momento de deformación es  $M + dM$ , y la deflexión es  $w + dw$ . Hay que recalcar que  $V$ ,  $M$  y  $P$  están en unidades de longitud en la dirección  $z$ , por tanto, un balance de las fuerzas en la dirección vertical de elementos entre  $x$  y  $x + dx$  es:

$$q(x)dx + dV = 0. \quad (1)$$

0

$$\frac{dV}{dx} = -q(x). \quad (2)$$

Los momentos  $M$  y  $M + dM$  concertan un torque antihorario  $dM$  en el elemento. Las fuerzas  $V$  y  $V + dV$  son separadas por una distancia  $dx$  (una sección de momento infinitesimal) y ejerce un torque neto  $Vdx$  en el elemento en un sentido horario. La fuerza horizontal  $P$  ejerce un torque neto antihorario  $-Pdw$  en el elemento a través de sus momentos asociados a la sección  $-dw$ . Un balance de todos los torques resulta:

$$dM - Pdw = Vdx. \quad (3)$$

0



$$\frac{dM}{dx} = V + P \frac{dw}{dx}. \quad (4)$$

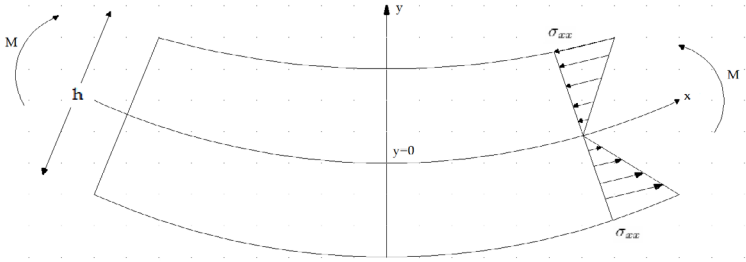
Para continuar, se deriva la ecuación 4 respecto a  $x$ , y se sustituye en la ecuación 2. Se obtiene:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q + P \frac{d^2w}{dx^2}. \quad (5)$$

Se puede ver que  $M$  es inversamente proporcional al cuadrado de la curvatura de la placa  $R$  y que  $R^{-1}$  es  $-d^2w/dx^2$ .

### Figura 19

*Tensiones normales en una sección transversal de una placa elástica curvada*



**Fuente:** Turcotte y Schubert (2014).

Luego, si la placa es deformada, como se evidencia en la Figura 19 la parte superior es contraída y la tensión longitudinal  $\sigma_{xx}$  es positiva; la parte inferior de la placa es extendida y  $\sigma_{xx}$  es negativa. La “estrés fibra”  $\sigma_{xx}$  es cero en la mitad de la placa, por tanto,  $y = 0$ . El efecto neto de estas tensiones ejercidas produce un momento de deformación antihorario en la sección transversal de la placa.

La fuerza en la sección transversal de la placa de grosor  $dy$  es  $\sigma_{xx}ydy$ . Luego de obtener este torque se puede alcanzar el momento:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} y dy. \quad (6)$$

En la cual,  $h$  es el grosor de la placa.

## Deformación de un plano

El estado de esfuerzos de un plano existe cuando hay un único componente cero en los principales esfuerzos, esto es,  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$  ó  $\sigma_3 \neq 0$ . La relación entre esfuerzo y deformación se da de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3.$$

$$\epsilon_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 + \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3.$$

$$\epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{1}{E} \sigma_3.$$

Donde  $E$  es el módulo de Young,  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $\epsilon$  es el componente principal de deformación y  $\sigma$  es el componente principal de esfuerzo, cada uno en su respectiva dirección.

Las anteriores ecuaciones fueron determinadas de las siguientes ecuaciones, las cuales relacionan los principales ejes de esfuerzo y deformación de un elemento elástico:

$$\sigma_1 = (\nu - 2G) \epsilon_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

$$\sigma = \lambda_1 + (\nu - 2G) \epsilon + \lambda_3.$$

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + (\nu - 2G) \epsilon.$$

$$\sigma = (\nu - 2G) \epsilon + \lambda_2 + \lambda_3.$$

$$\sigma = \lambda_1 + (\nu - 2G) \epsilon + \lambda_3.$$

$$\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + (\nu - 2G) \epsilon.$$

Donde  $\lambda$  y  $G$  son conocidos como los parámetros de Lamé;  $G$  también es conocido como el módulo de rigidez.

La tensión de deformación  $\sigma$  es acompañada por el esfuerzo longitudinal  $\epsilon$  positivo (contracción) en la mitad superior de la placa y negativo (extensión) en la mitad inferior. No hay esfuerzo en la dirección perpendicular al plano  $x$  y  $y$ , por tanto,  $\epsilon = 0$ , además,  $\sigma = 0$ . Así, la deformación de la placa es un ejemplo de la tensión en planos, y se pueden utilizar las ecuaciones 7, 8 y 9 para relacionar la tensión con el esfuerzo, esto es:

$$\epsilon = \frac{1}{E} \sigma - \nu \epsilon_{zz}. \quad (13)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu \sigma_{xx}). \quad (14)$$

Escribiendo estas ecuaciones se logra identificar los principales esfuerzos  $\epsilon_1, \epsilon_2$  con  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{zz}$  y las principales tensiones  $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}$ , con  $\epsilon_{zz} = 0$ . De las ecuaciones 13 y 14 resulta:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \nu^2} \epsilon_{xx}. \quad (15)$$

La ecuación 6 para el momento de deformación puede ser reescrito usando la ecuación 15 como:

$$M = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xx} y dy. \quad (16)$$

El esfuerzo longitudinal  $\epsilon_{xx}$  depende de la distancia de la mitad de la placa  $y$ , y el radio local de curvatura de la placa  $R$ . La Figura 20 muestra una sección doblada de la placa originalmente de longitud  $l$  ( $l$  es infinitesimal). La longitud de la sección medida a lo largo de la mitad regresa a  $l$ . El ángulo pequeño  $\phi$  es  $l/R$  en radianes. La geometría de la Figura 20 muestra que el cambio en longitud de la sección  $\delta l$  a la distancia  $y$  de la mitad del plano es:

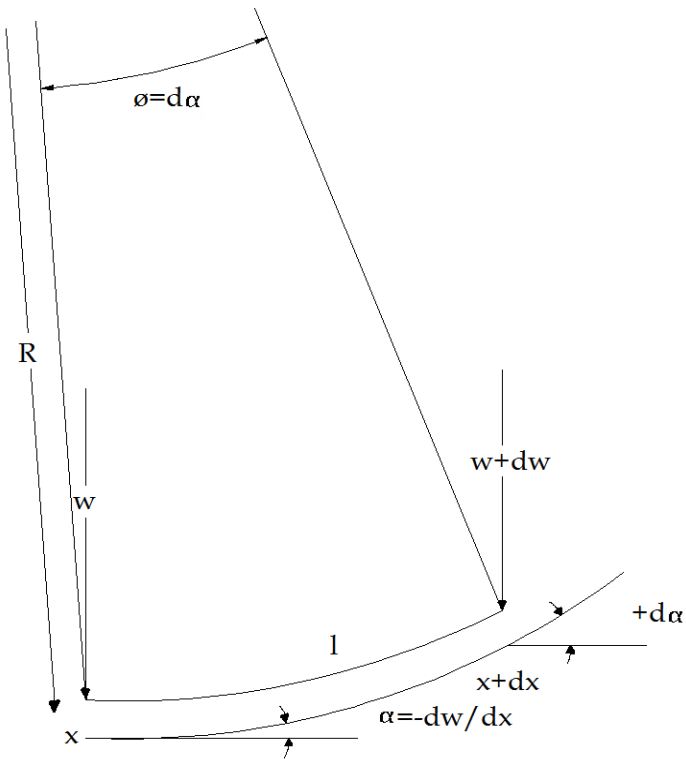
$$\delta l = -y\phi = -y \frac{l}{R}. \quad (17)$$

Donde el signo menos está incluido, ya que hay contracción cuando  $y$  es positivo. Así, el esfuerzo es:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\delta l}{l} = \frac{y}{R}. \quad (18)$$

### Figura 20

Extensión longitudinal y contracción en la distancia  $y$  de la mitad de la placa



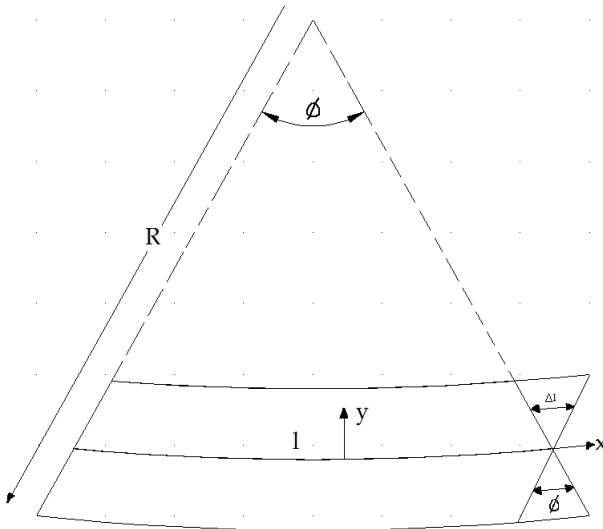
Fuente: Turcotte y Schubert (2014).

El radio local de curvatura  $R$  es determinado por el cambio en la pendiente de la mitad de la placa con distancia horizontal. La geometría es mostrada en la Figura 21. Si  $w$  es pequeño,  $-dw/dx$ , la pendiente de la mitad es también la deflexión angular de la placa desde la horizontal  $\alpha$ . El ángulo pequeño  $\phi$  en la Figura 21 es simplemente el cambio en  $\alpha$ , es decir, la distancia  $l$  o  $dx$ :

$$\phi = d\alpha = \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left( -\frac{dw}{dx} \right) = -\frac{d^2w}{dx^2} dx. \quad (19)$$

### Figura 21

Figura que ilustra las relaciones geométricas en la deformación de la placa



Fuente: Turcotte y Schubert (2014).

Y se encuentra:

$$\frac{1}{R} = \frac{\phi}{l} \approx \frac{\phi}{dx} = -\frac{d^2w}{dx^2}. \quad (20)$$

Y el momento de deformación puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} M &= \frac{-E}{(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy. \\ &= \frac{-E}{(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \left( \frac{y^3}{3} \right)_{-h/2}^{h/2}. \\ &= \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

El coeficiente de  $-d^2w/dx^2$  en el lado derecho de la ecuación 21 es llamado "rigidez flexural"  $D$  de la placa.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (22)$$

De acuerdo con las ecuaciones 20, 21 y 22, el momento de deformación es la "rigidez flexural" de la placa dividida por su curvatura.



$$M = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{D}{R}. \quad (23)$$

Al sustituir la segunda derivada de la ecuación 23, en la ecuación 5 se consigue:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - P \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (24)$$

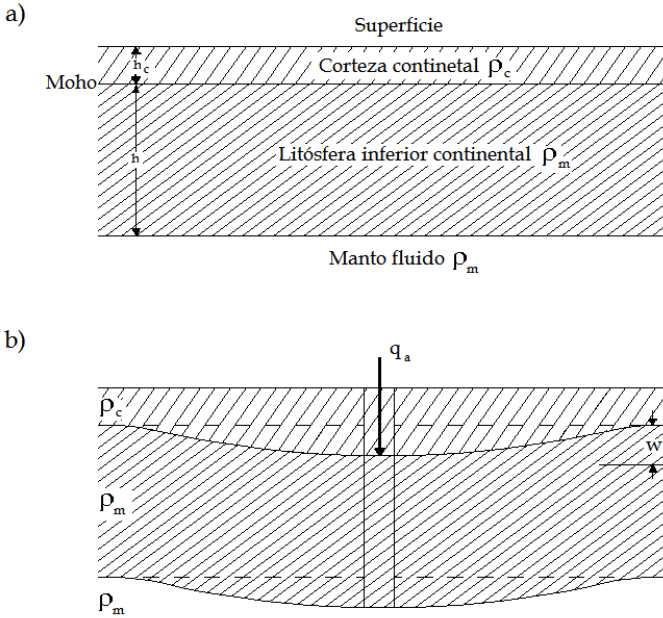
La igualdad 24 es la ecuación general para la deflexión de una placa sometida a una carga  $q(x)$ , donde  $D$  es la rigidez flexural y  $P$  es la fuerza horizontal ejercida sobre la placa.

## Aplicación a la litósfera terrestre

Para encontrar la deflexión de la litósfera terrestre debido a una carga aplicada, se debe tener en cuenta el incluir la fuerza de restauración hidrostática causada por el efecto de reposición de las rocas del manto en la ecuación 24.

### Figura 22

*Modelo para el cálculo de la fuerza de restauración hidrostática en la litósfera, flexionada por una carga aplicada  $q_a$ . Caso continental*



**Fuente:** Turcotte y Schubert (2014).

La Figura 22 muestra un caso continental donde la parte a) de la figura muestra la corteza de grosor  $h_c$  y densidad  $\rho_c$  separadas por Moho (donde el Moho es la zona de transición entre la corteza y el manto), sobre la litósfera de grosor  $h$  y densidad  $\rho_m$ . La litósfera continental se sitúa sobre el manto fluido de densidad  $\rho_m$ . La parte b) de la Figura 22 muestra la placa flexionada hacia abajo una distancia  $w$  por una carga aplicada en la topografía. El Moho siendo parte de la litósfera también se flexiona hacia abajo una distancia  $w$ . La corteza debajo de la carga es efectivamente la cantidad  $w$ , por el cual el Moho es comprimido. El peso por unidad de área de una columna

vertical extendida desde la base de la placa deformada a la superficie es:

$$\rho_c g(h_c + w) + \rho_m gh.$$

La presión en la profundidad  $h_c + h + w$  en los alrededores del manto es:

$$\rho_c gh_c + \rho_m g(h + w).$$

La diferencia entre estas dos cantidades es la fuerza de restauración hidrostática por unidad de área.

$$\begin{aligned} \rho_c gh_c + \rho_m g(h + w) - [\rho_c g(h_c + w) + \rho_m gh] & \quad (25) \\ = (\rho_m - \rho_c)gw. \end{aligned}$$

Luego, la fuerza neta por unidad de área actuando en la litósfera continental elástica es:

$$q = q_a - (\rho_m - \rho_c)gw. \quad (26)$$

La ecuación 24 para la deflexión de la litósfera se convierte en:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} + (\rho_m - \rho_c)gw = q_a(x). \quad (27)$$

Donde el valor de D está dado por:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (28)$$

## B. Discretización en $x, y, z$ hasta 2° orden

Se determinan las diferencias finitas para utilizar desarrolladas por medio del teorema de Taylor para funciones de segundo y cuarto grado.

**Diferencia finita para la segunda derivada de  $w$  respecto a  $x$**

$$w_{i+1,j,k} = w_{i,j,k} + w' \Delta x + \frac{w'' \Delta x^2}{2!} + \frac{w''' \Delta x^3}{3!} + \frac{w''''(\xi) \Delta x^4}{4!} \quad (29)$$

$$w_{i-1,j,k} = w_{i,j,k} - w' \Delta x + \frac{w'' \Delta x^2}{2!} - \frac{w''' \Delta x^3}{3!} + \frac{w''''(\xi) \Delta x^4}{4!} \quad (30)$$

Al sumar 29 y 30 se obtiene:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{w''''(\xi) \Delta x^2}{12} \quad (31)$$

**Diferencia finita para la segunda derivada de  $w$  respecto a  $y$**

$$w_{i,j+1,k} = w_{i,j,k} + w' \Delta y + \frac{w'' \Delta y^2}{2!} + \frac{w''' \Delta y^3}{3!} + \frac{w''''(\xi) \Delta y^4}{4!} \quad (32)$$

$$w_{i,j-1,k} = w_{i,j,k} - w' \Delta y + \frac{w'' \Delta y^2}{2!} - \frac{w''' \Delta y^3}{3!} + \frac{w''''(\xi) \Delta y^4}{4!} \quad (33)$$

Al sumar 32 y 33, se obtiene:

$$\frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{w_{i,j+1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} - \frac{w''''(\xi) \Delta y^2}{12} \quad (34)$$

**Diferencia finita para la segunda derivada de  $w$  respecto a  $z$**

$$w_{i,j,k+1} = w_{i,j,k} + w' \Delta z + \frac{w'' \Delta z^2}{2!} + \frac{w''' \Delta z^3}{3!} + \frac{w''''(\xi) \Delta z^4}{4!} \quad (35)$$

$$w_{i,j,k-1} = w_{i,j,k} - w' \Delta z + \frac{w'' \Delta z^2}{2!} - \frac{w''' \Delta z^3}{3!} + \frac{w''''(\xi) \Delta z^4}{4!} \quad (36)$$

Al sumar 35 y 36, se obtiene:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} - \frac{w''''(\xi) \Delta z^2}{12} \quad (37)$$

### C. Discretización en $x, y, z$ hasta 4° orden

Diferencia finita para la cuarta derivada de  $w$  respecto a  $x$

$$w_{i+2,j,k} = w_{i,j,k} + 2w' \Delta x + \frac{4w'' \Delta x^2}{2!} + \frac{8w''' \Delta x^3}{3!} + \frac{16w'''' \Delta x^4}{4!} + \frac{32w''''(\xi) \Delta x^5}{5!} \quad (38)$$

$$-4w_{i+1,j,k} = -4\left(w_{i,j,k} + w' \Delta x + \frac{w'' \Delta x^2}{2!} + \frac{w''' \Delta x^3}{3!} + \frac{w'''' \Delta x^4}{4!} + \frac{w''''(\xi) \Delta x^5}{5!}\right) \quad (39)$$

$$-4w_{i-1,j,k} = -4\left(w_{i,j,k} - w' \Delta x + \frac{w'' \Delta x^2}{2!} - \frac{w''' \Delta x^3}{3!} + \frac{w'''' \Delta x^4}{4!} - \frac{w''''(\xi) \Delta x^5}{5!}\right) \quad (40)$$

$$w_{i-2,j,k} = w_{i,j,k} - 2w' \Delta x + \frac{4w'' \Delta x^2}{2!} - \frac{8w''' \Delta x^3}{3!} + \frac{16w'''' \Delta x^4}{4!} - \frac{32w''''(\xi) \Delta x^5}{5!} \quad (41)$$

Al sumar 38, 39, 40 y 41, se obtiene:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{w_{i+2,j,k} - 4w_{i+1,j,k} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i-1,j,k} + w_{i-2,j,k}}{\Delta x^4} + \frac{8w''''(\xi) \Delta x}{15} \quad (42)$$

**Diferencia finita para la cuarta derivada de  $w$  respecto a  $y$**

$$w_{i,j+2,k} = w_{i,j,k} + 2w' \Delta y + \frac{4w'' \Delta y^2}{2!} + \frac{8w''' \Delta y^3}{3!} + \frac{16w'''' \Delta y^4}{4!} + \frac{32w''''(\xi) \Delta y^5}{5!} \quad (43)$$

$$-4w_{i,j+1,k} = -4\left(w_{i,j,k} + w' \Delta y + \frac{w'' \Delta y^2}{2!} + \frac{w''' \Delta y^3}{3!} + \frac{w'''' \Delta y^4}{4!} + \frac{w''''(\xi) \Delta y^5}{5!}\right) \quad (44)$$

$$-4w_{i,j-1,k} = -4\left(w_{i,j,k} - w' \Delta y + \frac{w'' \Delta y^2}{2!} - \frac{w''' \Delta y^3}{3!} + \frac{w'''' \Delta y^4}{4!} - \frac{w''''(\xi) \Delta y^5}{5!}\right) \quad (45)$$

$$w_{i,j-2,k} = w_{i,j,k} - 2w' \Delta y + \frac{4w'' \Delta y^2}{2!} - \frac{8w''' \Delta y^3}{3!} + \frac{16w'''' \Delta y^4}{4!} - \frac{32w''''(\xi) \Delta y^5}{5!} \quad (46)$$

Al sumar 43, 44, 45 y 46, se obtiene:

$$\frac{d^4 w}{y^4} = \frac{w_{i,j+2,k} - 4w_{i,j+1,k} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i,j-1,k} + w_{i,j,k-2}}{\Delta y^4} + \frac{8w''''(\xi) \Delta y}{15} \quad (47)$$

Diferencia finita para la cuarta derivada de  $w$  respecto a  $z$

$$w_{i,j,k+2} = w_{i,j,k} + 2w' \Delta z + \frac{4w'' \Delta z^2}{2!} + \frac{8w''' \Delta z^3}{3!} + \frac{16w'''' \Delta z^4}{4!} + O(\Delta z^4) + \frac{32w''''(\xi) \Delta z^5}{5!} \quad (48)$$

$$-4w_{i,j,k+1} = -4\left(w_{i,j,k} + w' \Delta z + \frac{w'' \Delta z^2}{2!} + \frac{w''' \Delta z^3}{3!} + \frac{w'''' \Delta z^4}{4!} + \frac{w''''(\xi) \Delta y^5}{5!}\right) \quad (49)$$

$$-4w_{i,j,k-1} = -4\left(w_{i,j,k} - w' \Delta z + \frac{w'' \Delta z^2}{2!} - \frac{w''' \Delta z^3}{3!} + \frac{w'''' \Delta z^4}{4!} - \frac{w''''(\xi) \Delta y^5}{5!}\right) \quad (50)$$

$$w_{i,j,k-2} = w_{i,j,k} - 2w' \Delta z + \frac{4w'' \Delta z^2}{2!} - \frac{8w''' \Delta z^3}{3!} + \frac{16w'''' \Delta z^4}{4!} - \frac{32w''''(\xi) \Delta z^5}{5!} \quad (51)$$

Al sumar 48, 49, 50 y 51, se obtiene:



$$\frac{d^4 w}{dz^4} = \frac{w_{i,j,k+2} - 4w_{i,j,k+1} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k-2}}{\Delta z^4} + \frac{8w''''(\xi) \Delta z}{15} \quad (52)$$

## D. Discretización del bilaplaciano

Al reemplazar las ecuaciones en diferencias finitas 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16 en la ecuación 2.6, se obtiene:

$$\begin{aligned} & D \left( \frac{w_{i+2,j,k} - 4w_{i+1,j,k} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i-1,j,k} + w_{i-2,j,k}}{\Delta x^4} \right) + \\ & D \left( \frac{w_{i,j+2,k} - 4w_{i,j+1,k} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i,j-1,k} + w_{i,j,k-2}}{\Delta y^4} \right) + \\ & D \left( \frac{w_{i,j,k+2} - 4w_{i,j,k+1} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k-2}}{\Delta z^4} \right) + \\ & (\rho_m - \rho_c) g w_{i,j,k} = q(x) - P \left( \frac{w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right) - \\ & P \left( \frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) - P \left( \frac{w_{i,j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

Al organizar las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned}
 & D \left( \frac{w_{i+2,j,k} - 4w_{i+1,j,k} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i-1,j,k} + w_{i-2,j,k}}{\Delta x^4} \right) + \\
 & D \left( \frac{w_{i,j+2,k} - 4w_{i,j+1,k} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i,j-1,k} + w_{i,j,k-2}}{\Delta y^4} \right) + \\
 & D \left( \frac{w_{i,j,k+2} - 4w_{i,j,k+1} + 6w_{i,j,k} - 4w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k-2}}{\Delta z^4} \right) + \\
 & P \left( \frac{w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right) + P \left( \frac{w_{j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) + \\
 & P \left( \frac{w_{j,k+1} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) + (\rho_m - \rho_c)g w_{i,j,k} = q(x)
 \end{aligned} \tag{54}$$

Al agrupar los términos necesarios:

$$\begin{aligned}
 & 6D \left( \frac{w_{i,j,k}}{\Delta x^4} + \frac{w_{i,j,k}}{\Delta y^4} + \frac{w_{i,j,k}}{\Delta z^4} \right) - 2P \left( \frac{w_{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j,k}}{\Delta z^2} + \frac{w_{i,j,k}}{\Delta z^2} \right) + \\
 & (\rho_m - \rho_c)g w_{i,j,k} = q(x) - D \left( \frac{w_{i+2,j,k} - 4w_{i+1,j,k} - 4w_{i-1,j,k} + w_{i-2,j,k}}{\Delta x^4} \right) - \\
 & D \left( \frac{w_{i,j+2,k} - 4w_{i,j+1,k} - 4w_{i,j-1,k} + w_{i,j,k-2}}{\Delta y^4} \right) - \\
 & D \left( \frac{w_{i,j,k+2} - 4w_{i,j,k+1} - 4w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k-2}}{\Delta z^4} \right) - \\
 & P \left( \frac{w_{i+1,j,k} + w_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{w_{j,k+1} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right) + \\
 & P \left( \frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{55}$$

Al factorizar términos semejantes:

(56)

$$\begin{aligned}
& \left( 6D \left( \frac{1}{\Delta x^4} + \frac{1}{\Delta y^4} + \frac{1}{\Delta z^4} \right) - 2P \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \right) w_{i,j,k} + \\
& ((\rho_m - \rho_c)g)w_{i,j,k} = q(x) - D \left( \frac{w_{i+2,j,k} - 4w_{i+1,j,k} - 4w_{i-1,j,k} + w_{i-2,j,k}}{\Delta x^4} \right) - \\
& D \left( \frac{w_{i,j+2,k} - 4w_{i,j+1,k} - 4w_{i,j-1,k} + w_{i,j,k-2}}{\Delta y^4} \right) - \\
& D \left( \frac{w_{i,j,k+2} - 4w_{i,j,k+1} - 4w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k-2}}{\Delta z^4} \right) - \\
& P \left( \frac{w_{i+1,j,k} + w_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{w_{j,k+1} + w_{j,k-1}}{\Delta z^2} \right) + \\
& P \left( \frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right)
\end{aligned}$$

Al despejar la deflexión en la posición  $i, j, k$ , es decir, despejando  $w_{i,j,k}$ :

(57)

$$\begin{aligned}
w_{i,j,k} &= (q(x) - D \left( \frac{w_{i+2,j,k} - 4w_{i+1,j,k} - 4w_{i-1,j,k} + w_{i-2,j,k}}{\Delta x^4} \right) - \\
& D \left( \frac{w_{i,j+2,k} - 4w_{i,j+1,k} - 4w_{i,j-1,k} + w_{i,j,k-2}}{\Delta y^4} \right) - \\
& D \left( \frac{w_{i,j,k+2} - 4w_{i,j,k+1} - 4w_{i,j,k-1} + w_{i,j,k-2}}{\Delta z^4} \right) - \\
& P \left( \frac{w_{i+1,j,k} + w_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{w_{j,k+1} + w_{j,k-1}}{\Delta z^2} \right) - \\
& P \left( \frac{w_{i,j,k+1} + w_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} \right)) \\
& \left( 6D \left( \frac{1}{\Delta x^4} + \frac{1}{\Delta y^4} + \frac{1}{\Delta z^4} \right) - \right. \\
& \left. 2P \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + (\rho_m - \rho_c)g \right)^{-1}
\end{aligned}$$

Modelación de un derrame  
de petróleo a partir del método  
de Lattice Boltzmann

Capítulo

2

Juan Carlos Ramírez Camacho  
José John Fredy González

---

Universidad de Cundinamarca, Facultad de Educación  
Licenciatura en Matemáticas  
Fusagasugá  
2020

## RESUMEN

Se planteó la aplicación del método de Lattice Boltzmann para simular un derrame de petróleo en un río, por lo que se hace uso de la ecuación de advección-difusión para lograr la descripción cualitativa de un derrame de petróleo. La evolución de los procesos de advección-difusión se logra implementando el método de Lattice Boltzmann a un código computacional que muestre el desarrollo de estos procesos a lo largo del tiempo. Para la validación del código, se realizan una serie de experimentos numéricos cuyos resultados se comparan con resultados previamente conocidos en la bibliografía. Además, se lleva a cabo una comparación cualitativa de una simulación sobre el río Sava (Eslovenia) con lo que se verifica la estabilidad del modelo. Finalmente, se presentan los resultados para las simulaciones realizadas sobre dos segmentos del río Magdalena (Colombia) y un análisis descriptivo sobre los niveles de concentración obtenidos por las simulaciones.

**Palabras clave:** método de Lattice Boltzmann, derrame de petróleo, modelación, advección-difusión.

## ABSTRACT

Lattice Boltzmann method to modeling an oil spill in a river was proposed. For this, advection-diffusion equation was used to achieve a qualitative description of an oil spill; advection-diffusion evolution processes are achieved by implementing the Lattice Boltzmann method to a computational code that shows the development of this processes over time. To validate the program, a series of numerical experiments was performed and over the obtained results a comparison with previously known results from the bibliography was made. Additionally, a qualitative comparison with a model results of Sava river (Slovenia) shows the stability of the model. Finally, results obtained for simulations carried out on two different segments on Magdalena river (Colombia) and a descriptive analysis of the concentration levels is shown on this.

**Keywords:** Lattice Boltzmann method, oil spill, modeling, advection-diffusion.

# Contenido

<b>Lista de símbolos</b>	<b>89</b>
<hr/>	
<b>Introducción</b>	<b>93</b>
<hr/>	
Planteamiento del problema	
Justificación	
Objetivos	
<hr/>	
<b>1. Modelación de fluidos</b>	<b>99</b>
1.1 Fluidos	
1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes	
1.3 Función de distribución de Maxwell-Boltzmann	
1.4 Ecuación de Boltzmann	
1.5 ¿Por qué Lattice Boltzmann?	
<hr/>	
<b>2. Modelo de Lattice Boltzmann</b>	<b>114</b>
2.1 Ecuación de Lattice Boltzmann	
2.2 Colisión y propagación	
2.3 Condiciones de frontera	
2.4 Condiciones de estabilidad	
2.5 Medición del error	

<b>3. Derrames de petróleo</b>	<b>126</b>
3.1 Características físicas de los derrames de petróleo	
3.2 Modelación de derrames de petróleo	
<b>4. Modelo de advección-difusión</b>	<b>135</b>
4.1 Ecuación diferencial del proceso de advección-difusión	
4.2 Extensión del método de Lattice Boltzmann para la ecuación de advección-difusión	
<b>5. Validación del modelo</b>	<b>140</b>
5.1 Difusión gaussiana	
5.2 Flujo de Poiseuille	
<b>6. Implementación del método de Lattice Boltzmann al caso de un derrame de petróleo en un río</b>	<b>151</b>
6.1 Generación de un campo de velocidades	
6.2 Simulación de un derrame de petróleo	
<b>Recomendaciones</b>	<b>168</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>170</b>
<b>Referencias</b>	<b>173</b>



# LISTA DE SÍMBOLOS

**Tabla 1**

*Símbolos con letras latinas*

Símbolo	Término	Unidad SI
$A$	Área	$m^2$
$c$	Velocidad en el Lattice	<i>adimensional</i>
$c_s$	Velocidad del sonido	$\frac{m}{s}$
$C_r$	Número de Courant	
$C$	Concentración	<i>adimensional</i>
$C_0, \rho_0, u_0 \dots$	Cantidades iniciales	
$D$	Parámetro de difusión	<i>adimensional</i>
$D_r$	Parámetro de difusión	$\frac{m^2}{s}$
$f$	Función de distribución	$\frac{kg s^3}{m^6}$
$f^{eq}$	Función de equilibrio	$\frac{kg s^3}{m^6}$
$f^{In}$	Partículas después de la propagación	$\frac{kg s^3}{m^6}$

$f^{out}$	Partículas después de la colisión	$\frac{kg s^3}{m^6}$
$F$	Fuerza	$N$
$L$	Longitud del dominio	$m$
$m$	Masa	$kg$
$N$	Cantidad de nodos	
$q_a$	Solución analítica	
$q_n$	Solución numérica	
$V$	Volumen	$m^3$
$t$	Tiempo	$s$
$u$	Velocidad	$\frac{m}{s}$
$u_{max}$	Velocidad máxima	$\frac{m}{s}$
$u_x$	Velocidad en la dirección horizontal	$\frac{m}{s}$
$u_y$	Velocidad en la dirección vertical	$\frac{m}{s}$
$\nu$	Viscosidad cinemática	$\frac{m^2}{s}$
$w$	Peso	
$x, y, H$	Longitud	$m$

**Fuente:** elaboración propia.

**Tabla 2***Símbolos con letras griegas*

Símbolo	Término	Unidad SI
$\epsilon$	Error	
$\rho_r$	Densidad	$\frac{kg}{m^3}$
$\rho,$	Densidad	<i>adimensional</i>
$\sigma$	Esfuerzo cortante	
$\sigma_0$	Parámetro que controla el ancho de la función gaussiana	
$\mu$	Viscosidad dinámica	$\frac{kg}{m \cdot s}$
$\Omega$	Operador de colisión	
$\tau$	Tiempo de relajación	<i>s</i>
$\tau'$	Tiempo de relajación local	
$\Delta x$	Intervalo espacial	<i>adimensional</i>
$\Delta x_r$	Intervalo espacial	<i>m</i>
$\Delta t$	Paso de tiempo	<i>adimensional</i>
$\Delta t_r$	Paso de tiempo	<i>s</i>

**Fuente:** elaboración propia.

**Tabla 3***Abreviaturas*

<b>BGK</b>	Bhatnagar, Gross & Krook
<b>LB</b>	Lattice Boltzmann
<b>MLB</b>	Método de Lattice Boltzmann
<b>DCF</b>	Dinámica computacional de fluidos
<b>NS</b>	Navier-Stokes
<b>ENS</b>	Ecuaciones de Navier-Stokes

**Fuente:** elaboración propia.

## INTRODUCCIÓN

La modelación de derrames de petróleo ha sido un tema de interés científico debido a la necesidad emergente de predecir su evolución desde los primeros intentos registrados en la década de los años 60. El primero en abordar esta travesía fue Fay quien en 1971 propuso el primer modelo matemático que describía la dispersión del crudo en condiciones de mar en calma (Estrada y Antuña, 2004).

Una de las principales debilidades de este modelo fue precisamente su simplicidad, ya que los derrames de crudo involucran múltiples procesos físico-químicos importantes cuando se pretende cuantificar de forma acertada la cantidad y movilidad del petróleo. Sin embargo, este fue apenas el primero de una serie de pasos que llevarían al desarrollo de modelos cada vez más complejos y acertados, a tal punto que hoy en día se tienen herramientas muy sofisticadas capaces de detallar estos eventos.

Estos modelos se basan en ecuaciones diferenciales que buscan describir los procesos físicos involucrados desde el momento en el que el derrame inicia, tales como la advección, difusión y la evaporación, entre otros, y hacen uso de diferentes *software* computacionales que se encargan de generar gráficos para su interpretación. Ejemplo de esto es el modelo presentado por Álvarez y Trento (2013) en el artículo en el que emplean el sistema computacional SisBaHiA para simular su hidrodinámica de un derrame de crudo en el río Paraíba Du Sul.

Las ecuaciones diferenciales usadas pueden en el mejor de los casos contar con una solución analítica, no obstante, no siempre es así, y es en estas situaciones en las que la modelación computacional se lleva a cabo para aproximar las soluciones de las ecuaciones que gobiernan el proceso físico de interés mediante el uso de métodos numéricos.

Es aquí donde entra en juego un modelo que en las dos últimas décadas ha ganado relevancia para modelar problemas que involucran fluidos: el método de Lattice Boltzmann (MLB) (Krüger *et al.*, 2017). Este método tiene sus fundamentos en la física estadística y modela los fluidos teniendo en cuenta la evolución de la distribución de sus partículas a lo largo del tiempo y de esta forma describe su comportamiento macroscópico; esto se logra discretizando el espacio en pequeñas celdas en las que se establece una función de probabilidad que describe una población de partículas moviéndose con una velocidad discreta. Este método ha demostrado poseer dos grandes ventajas: es sencillo aplicarlo y efectivo, lo que ha contribuido a su creciente popularidad.

A pesar de que en sus orígenes el MLB se diseñó para resolver problemas de hidrodinámica, este ha mostrado una alta capacidad de adaptación, lo que ha hecho que a lo largo de estos años se hayan logrado las modificaciones necesarias para resolver múltiples problemas, entre los que se encuentran aquellos relacionados con el transporte de sustancias. Por todo esto, en este documento se propuso la implementación de un modelo 2D para el estudio del comportamiento de un derrame de petróleo en un curso de agua haciendo uso del método de Lattice Boltzmann.

Teniendo en cuenta lo anterior, el desarrollo de este proceso se encuentra dividido a lo largo de este documento en seis secciones. En la primera sección se ha expuesto de una forma amena el fundamento teórico necesario para

la construcción del método, y en la segunda sección se explica la teoría básica que requiere este para su aplicación a un algoritmo computacional. Esto incluye no solamente los procesos básicos relacionados con la función de distribución, sino que se incluye en esta exposición las condiciones básicas de la frontera y la medición del error a través de la norma L2.

Posterior a esto, en la tercera sección se hace una descripción de los procesos principales que se pueden encontrar en un evento de derrame de petróleo, con el propósito de familiarizar al lector con conceptos que se tendrán en cuenta más adelante. Sin embargo, de los procesos expuestos en esta sección se tiene en cuenta para el modelo aquí desarrollado únicamente los procesos de advección y difusión dejando para un estudio posterior la inclusión de los procesos de evaporación y retención en costas que resultan trascendentales en estos eventos. Ahora, esto abre paso a las modificaciones necesarias que se deben realizar a la teoría expuesta anteriormente para adaptar el modelo y que describa un evento de transporte de masa, como se evidencia en la cuarta sección.

En la quinta sección, se llevaron a cabo tres procesos de validación para el proceso desarrollado: dos casos de difusión para un punto de concentración gaussiana que incluye un proceso de advección dominante y otro de difusión dominante, ambos analizados en comparación con los expuestos por Krüger *et al.* (2017) y que muestran correspondencia con los resultados allí expuestos. Adicional a esto, se aplica el mismo modelo para generar los campos de advección que se comparan con los propuestos por Maslo (2015) nuevamente mostrando la eficacia del modelo que estamos trabajando dada la precisión de los resultados que se exponen en la sexta sección.

Finalmente, todo concluye con el proceso teórico y se muestran los resultados para un par de simulaciones hechas en dos trayectos del río Magdalena, soportadas por la construcción hecha anteriormente.

## **Planteamiento del problema**

La modelación de derrames de petróleo ha sido un tema ampliamente estudiado internacionalmente durante las últimas décadas, el cual es abordado a través de diferentes sistemas computacionales diseñados especialmente con este propósito y que tienen en cuenta distintos parámetros según el año de estudio y la tecnología disponible.

En Colombia, el problema de estos derrames es cada vez más alarmante debido a la gran cantidad de casos presentados anualmente (Velásquez, 2017) y al poco control efectivo que se les da a estos en algunas zonas de difícil acceso en el país (Mira, 2015). Es en este campo que los modelos matemáticos suponen una gran ayuda técnica tanto para los investigadores como para las empresas involucradas en la explotación de este recurso, pues permiten predecir con determinado grado de precisión la evolución de la mancha del contaminante. Por este motivo, resulta relevante abordar los estudios sobre este tema e instaurar nuevas estrategias en las universidades que contribuyan en la mitigación de estos hechos.



## Justificación

El método de Lattice Boltzmann se ha hecho un recurso popular en la simulación de fluidos durante las últimas décadas, constituyéndose como una herramienta simple, eficaz y con amplio margen de implementación; sin embargo, su uso en Colombia resulta ser una materia emergente.

Sumado a esto, a pesar del amplio recurso disponible en las diferentes revistas científicas acerca de los derrames petroleros y los estudios realizados internacionalmente, se encuentra la constante de que en su gran mayoría se ha validado el método para un escenario marino, siendo los resultados sobre afluentes hídricos en los continentes (lagunas, ríos y quebradas, entre otros) más escasos en la literatura.

Ya que las diferencias entre aquellos escenarios son notorias<sup>1</sup> y dados los recurrentes casos registrados en el país, se hace necesario iniciar este tipo de estudios que permitan conocer de antemano un aproximado del comportamiento de este agente contaminante y plantear estrategias eficaces que contribuyan con la protección del medioambiente.

---

1 Grandes velocidades de corrientes con variación en el trayecto. Los ríos son cuerpos de agua confinados con curvas y obstáculos, entre otros (Yapa et al., 1994).

## **Objetivos**

### **Objetivo general**

- Modelar un derrame de petróleo en un curso de agua a partir del método de Lattice Boltzmann.

### **Objetivos específicos**

1. Estudiar las características básicas que requiere la implementación del método de Lattice Boltzmann en un algoritmo computacional.
2. Desarrollar un modelo de difusión-advección que describa el comportamiento de un derrame petrolero en un afluente con topografía simple.

# 1. MODELACIÓN DE FLUIDOS

En este capítulo se hace una introducción a las herramientas básicas que se necesitarán para entender el método de Lattice Boltzmann. Empieza por una sencilla definición de qué es un fluido hasta llegar a la ecuación de Boltzmann. Para concluir, se dan algunas razones del por qué el método de Lattice Boltzmann es una buena elección para modelar fluidos.

## 1.1 Fluidos

Toda la materia en su estado natural puede clasificarse en cuatro estados principales: sólido, líquido, gaseoso y plasmático. Los más comunes para nosotros desde la experiencia con nuestro entorno son los tres primeros que encontramos en elementos tan cotidianos como el agua que bebemos, el aire que respiramos y el suelo que pisamos. El estudio de estos resulta fundamental para entender el mundo en el que vivimos, su comportamiento y aprovechamiento de este en una forma eficiente.

Si analizamos un poco sus características principales, nos encontramos con que al menos dos nos permiten moldearlos sin oponer resistencia (claro, siempre y cuando podamos contenerlos); esta característica es la que nos permite definir un material como fluido. Si hablamos de una forma un poco más específica, la característica fundamental que define un fluido es que sus moléculas se

ordenan aleatoriamente manteniéndose juntas por fuerzas cohesivas y adhesivas (Serway y Jewett, 2005).

La cantidad de moléculas que conforman una sustancia es lo que denominamos como la masa ( $m$ ) de la sustancia, y como es natural estas moléculas ocupan una determinada cantidad de espacio, es decir, un volumen ( $V$ ). Pensemos por un momento en las moléculas como esferas y tomemos dos esferas del mismo tamaño de sustancias distintas, por ejemplo, hierro e icopor. Claramente la esfera de hierro es más pesada que la de icopor, a pesar de ambas tener el mismo tamaño, esto debido a que la cantidad de masa que existe en ambos materiales es distinta, lo que nos lleva a definir una relación importante cuando hablamos del estudio de la materia que es la densidad ( $\rho$ ) definida como la relación entre la cantidad de masa y el volumen que esta ocupa, es decir:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1-1)$$

Ahora imaginemos una capa de fluido como una columna de pequeñas capas de goma y supongamos que ejercemos una fuerza tangencial sobre la capa superior tratando de desplazar estas capas, el resultado de esto es que cada capa de goma va a experimentar una resistencia al movimiento debido a la fricción que se genera entre ellas. Esta fricción que se presenta entre las diferentes capas de fluido es lo que llamamos viscosidad, definida como una medida de la resistencia por fluir. Así, por ejemplo, la viscosidad del aire es mucho menor que la viscosidad de la miel.

La ley de fricción de Newton relaciona el esfuerzo cortante ( $\sigma$ ) con el gradiente de velocidad ( $u$ ) de un fluido newtoniano (Sukop y Thorne, 2006).

$$\sigma = \mu \frac{du}{dx} = \mu \frac{\rho du}{\rho dx} = \nu \frac{\rho du}{dx} \quad (1-2)$$

En la cual  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $\nu$  es la viscosidad cinemática (que no es otra cosa que el cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad del fluido).

Ahora, supongamos que ponemos en movimiento estas esferas, si limitamos el espacio a través del cual estas se mueven, esto dará lugar a colisiones entre ellas; pero como claramente lo indica la segunda ley de Newton, la cantidad de movimiento total del sistema se conservará y, además de esto, la cantidad de esferas durante las colisiones no cambiará, lo que implica que la masa es otra cantidad que naturalmente se conserva en esta dinámica.

Si bien es cierto que cuando un fluido entra en movimiento, son las moléculas que lo conforman las que cambian de posición a medida que el tiempo transcurre. Para realizar una descripción matemática macroscópica se interpreta este como un continuo, permitiendo así que las ecuaciones que describen su comportamiento sean funciones continuas de espacio y tiempo. Las ecuaciones que describen este movimiento son las ecuaciones de Navier-Stokes de las cuales se hablará a continuación.

## 1.2 Ecuaciones de Navier-Stokes

Una de las fortalezas más grandes de la ciencia es predecir determinados eventos a partir de modelos que describen la dinámica de estos hechos. Matemáticamente las ecuaciones de Navier-Stokes (ENS) permiten conocer el movimiento de un fluido en el futuro.

Uno de los esfuerzos más loables en este camino fue el hecho por Leonard Euler en el siglo XVIII, quien aplicó el principio de conservación de la masa y la segunda ley de Newton a una región infinitesimal del espacio que ocupa un fluido en un instante de tiempo y dedujo las ecuaciones de movimiento del flujo en su forma diferencial. Euler tuvo en cuenta las fuerzas que actúan sobre el fluido a distancia (como la gravedad) y las fuerzas debidas a la presión, pero no tuvo en cuenta las fuerzas debidas a la viscosidad que actúan internamente. Estas no fueron deducidas sino hasta entrado el siglo XIX, con trabajos independientes de Navier, Poisson, Cauchy y Stokes, entre otros (Mora, 2017).

Consideremos un elemento volumétrico infinitesimal<sup>2</sup> de fluido con densidad  $\rho$ . De la ecuación 1-1 deducimos que la masa del fluido es:

$$\int_{V_n} \rho dV \tag{1-3}$$

Si consideramos la entrada y salida de masa del volumen debido al flujo como:

---

2 Esta expresión "elemento infinitesimal" se refiere a una cantidad muy pequeña.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_n} \rho dV = - \oint_{\partial V_n} \rho u \cdot dA \quad (1-4)$$

Y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_n} \rho dV = - \int_{V_n} \nabla \cdot \rho u dV \quad (1-5)$$

Lo que lleva a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1-6)$$

Que es la ecuación de continuidad en la dinámica de fluidos y representa la conservación de la masa.

Para aplicar este mismo procedimiento al momento  $\rho u$  hay que tener en cuenta que para un fluido ideal los cambios de momento pueden deberse al flujo, diferencias de presión y fuerzas externas ( $F$ ).

$$\frac{d}{dt} \int_{V_n} \rho u dV = - \oint_{\partial V_n} \rho u u \cdot dA + \oint_{\partial V_n} p dA + \int_{V_n} F dV \quad (1-7)$$

Nuevamente aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_{\partial V_n} \nabla \cdot \rho u u dV + \oint_{\partial V_n} \nabla p dV + \int_{V_n} F dV \quad (1-8)$$

Lo que lleva a la ecuación de Euler que describe la conservación del momento en un fluido ideal<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u u) = -\nabla p + F \quad (1-9)$$

La transferencia descrita por la ecuación 1-9 solo incluye transferencias de momento reversibles, pero para un fluido real necesitamos incluir las transferencias de momento internas, es decir, transferencias de momento debido a la viscosidad, lo cual es irreversible.

Si se asume que tanto la viscosidad como la densidad son constantes, la ecuación de Navier-Stokes (ENS) toma la forma:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \nu \nabla^2 u + F \quad (1-10)$$

### 1.3 Función de distribución de Maxwell-Boltzmann

Lidiar con un gran número de partículas puede ser una situación engorrosa. Supongamos, por ejemplo, el caso de unas elecciones regionales en las que un gran número de personas vota por su candidato predilecto y se quiere encontrar el voto de una persona específica entre todos

---

3 En física es considerado como fluido ideal aquel en que cumple: i) Es un fluido no viscoso, por lo que se pueden despreciar la fricción interna. ii) Es incompresible, por lo que su densidad permanece constante en el tiempo. iii) Es estacionario, por lo que su velocidad permanece constante en el tiempo y iv) es irrotacional, es decir, que no presenta movimiento angular en ningún punto.



los tarjetones (imposible e ilegal). Saber exactamente quién votó por un candidato no es significativo para los resultados, sin embargo, lo que sí es representativo para estos son los porcentajes totales que obtuvo cada candidato.

¿Pero qué tiene que ver esto con la dinámica de partículas? De igual forma como no es significativo saber por cuál candidato votó exactamente cada persona, conocer exactamente en qué posición se encuentra y con qué velocidad se mueve una partícula específica de un fluido no es relevante, pero sí lo es saber cómo se comporta en promedio la mayor parte de esas partículas en una región determinada, pues el resultado de este es el comportamiento de las variables macroscópicas.

Esta deducción fue la que hizo Maxwell en 1859 cuando se enfrentó a este problema. Para ello caracterizó el efecto de las moléculas a través de una función de distribución: ¿qué porcentaje de moléculas en una cierta posición tiene velocidad dentro de cierto rango? Entonces, para  $N$  partículas el número de partículas que tienen velocidad entre  $u_x$  y  $u_x + du_x$  es  $Nf(u_x)du_x$ , en la cual la función  $f(u_x)$  es la fracción de partículas que tienen velocidad en este intervalo. Entonces la probabilidad de que la velocidad esté entre  $u_x$  y  $u_x + du_x$ ,  $u_y$  y  $u_y + du_y$  y  $u_z$  y  $u_z + du_z$  será  $Nf(u_x)f(u_y)f(u_z)du_xdu_ydu_z$ .

Ahora, al ser los valores arrojados por esta función una probabilidad, es claro que si sumamos sobre todos los posibles resultados de la velocidad el resultado es:

$$\iiint f(u_x)f(u_y)f(u_z)du_xdu_ydu_z = 1 \quad (1-11)$$

La función de distribución no depende de la dirección de la partícula, sino solamente de su velocidad cuyos valores deben estar comprendidos entre 0 y 1, por lo que:

$$f(u_x)f(u_y)f(u_z) = \Phi(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \quad (1-12)$$

Puede mostrarse que una función que cumple con esta propiedad es (Mohamad, 2011):

$$f(u) = Ae^{-B|u|^2} \quad (1-13)$$

Si pensamos en la distribución de partículas en un espacio de velocidades tridimensional donde cada partícula está representada por un punto, entonces todos los puntos ubicados sobre una esfera centrada en el origen tienen la misma velocidad, luego el número de partículas que tienen velocidad entre  $v$  y  $v + dv$  es igual al número de partículas que se encuentran entre dos esferas de radio  $u$  y  $u + du$ :

$$f(u)du = 4\pi|u|^2 A^3 e^{-B|u|^2} du \quad (1-14)$$

Tomando la energía cinética promedio por partícula se llega a que:

$$f(u) \propto 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} |u|^2 e^{-\frac{m|u|^2}{2kT}} \quad (1-15)$$

En la cual  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura.

Esta ecuación es llamada la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (Mohamad, 2011).

## 1.4 Ecuación de Boltzmann

Ya sabemos lo que representa la función  $f$ , ahora cabe preguntarnos cómo evoluciona, después de aplicar una fuerza externa  $F$  al sistema representado por  $f$ , si no existen colisiones entre las partículas, la diferencia entre las poblaciones antes y después de las colisiones es:

$$f(x + \delta x, u + \delta u, t + \delta t) dx du - f(x, u, t) dx du = 0 \quad (1-16)$$

Sin embargo, si las colisiones tienen lugar entre las partículas la diferencia neta entre las funciones de distribución se llama operador de colisión ( $\Omega$ ) y la ecuación para la evolución de las partículas se puede escribir como:

(1-17)

$$f(x + \delta x, u + \delta u, t + \delta t) dx du - f(x, u, t) dx du = \Omega(f) dx du dt$$

Al dividir entre  $dx du dt$  y tomar el límite cuando  $dt$  tiende a 0:

(1-18)

$$\frac{df}{dt} = \Omega(f)$$

Luego, la tasa de cambio de la función de distribución nos proporciona la tasa de cambio de las colisiones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega(f) \quad (1-19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{F}{m} + \frac{\partial f}{\partial t} = \Omega(f) \quad (1-20)$$

La relación entre esta ecuación y las cantidades macroscópicas tales como la densidad y la velocidad son:

$$\rho(x, t) = \int m f(x, u, t) dx \quad (1-21)$$

$$\rho(x, t) u(x, t) = \int m u f(x, u, t) du \quad (1-22)$$

La principal dificultad en la ecuación 1-20 es el operador  $\Omega$ , el cual es una función que depende de  $f$ , lo que lo hace difícil de resolver. Sin embargo, Bhatnagar, Gross y Krook en 1954 introdujeron una aproximación válida para este operador de colisión (BGK) (Bhatnagar et al., 1954).

$$\Omega = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq}) \quad (1-23)$$

El término  $\frac{1}{\tau}$  es llamado la frecuencia de colisión, mientras que el término  $\tau$  se conoce como factor de relajación. La función  $f^{eq}$  es la de distribución de equilibrio, la cual es la función de distribución de Maxwell Boltzmann (1-15). Con esta aproximación, la ecuación 1-20 puede ser escrita como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{F}{m} + \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq}) \quad (1-24)$$

Ahora, para sistemas en los que no interviene una fuerza externa esta ecuación puede ser escrita como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \nabla f = -\frac{1}{\tau} (f - f^{eq}) \quad (1-25)$$

Esta última ecuación es la base del método de Lattice Boltzmann y reemplaza la ENS en las simulaciones de dinámica computacional de fluidos. Se debe notar que esta ecuación diferencial parcial luce como una ecuación de advección con término fuente en la que el lado derecho representa el proceso de advección y el izquierdo un proceso de colisión (Mohamad, 2011).

## 1.5 ¿Por qué Lattice Boltzmann?

Usualmente para modelar fluidos existen dos ramas: los modelos que dibujan la trayectoria de cada una de las partículas que componen el fluido (euleriano) y los modelos que interpretan el fluido como un continuo, es decir, resolviendo numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes que derivan de su comportamiento (lagrangiano) (Estrada y Antuña, 2004).

El método de Lattice Boltzmann se encuentra en la mitad de ambos mundos, ya que tiene en su desarrollo un

poco de los dos. Por un lado, tiene su origen en el modelo de Lattice Gas Automata ideados por Hardy, Pomeau y Pazzis (Perumal y Dass, 2015), el cual es un sencillo modelo 2D en el que las partículas interactúan a través de colisiones en una sección del espacio dividido regularmente.

La evolución del sistema se logra mediante una serie de reglas preestablecidas y las interacciones se limitan a pasos de colisión y propagación entre los elementos. Por otro lado, el modelo de Lattice Boltzmann reproduce los efectos macroscópicos del fluido como resultado de las interacciones microscópicas de las partículas y representadas a través de la función de distribución sobre la que se fundamenta, es decir, mediante el uso de este modelo se logran ver los efectos macroscópicos en el fluido como consecuencia de los efectos generados a nivel microscópico.

Algunas de las ventajas y desventajas del modelo se resumen en la Tabla 4.

**Tabla 4**

Principales ventajas y desventajas al usar el método de Lattice Boltzmann

<b>Ventajas</b>	<b>Desventajas</b>
Gana simplicidad al solucionar las ecuaciones de Navier-Stokes.	Requiere conocimientos sobre la ecuación de Boltzmann para su manipulación y desarrollo.

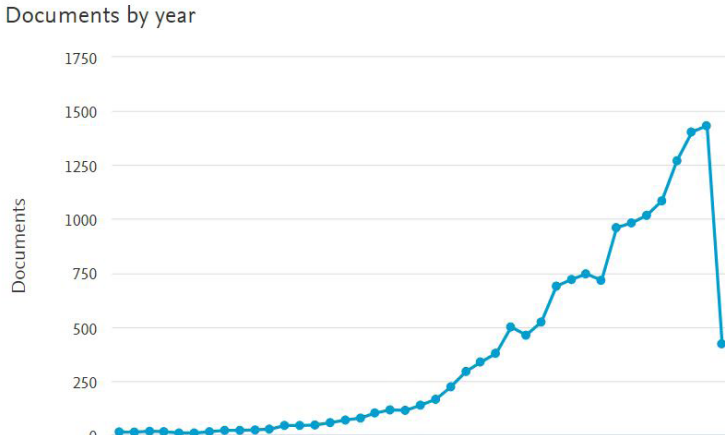
El modelo se desarrolla en nodos, lo cual permite que se realicen cálculos simultáneos.	Requiere un equipo de cómputo diseñado para procesar en paralelo y sacar el máximo provecho al método.
Permite lidiar fácilmente con geometrías complejas.	Dependiendo del tamaño del dominio, el tiempo de cómputo puede extenderse.
Fácil implementación en un código si se conoce la teoría de trasfondo.	El desconocimiento de la teoría que fundamenta el método puede llevar a errores de programación que desembocarían en inestabilidades numéricas.

**Fuente:** elaboración propia.

Además de esto, el interés en la comunidad científica por el método ha ido incrementando desde su aparición a finales de los años 80, como ya lo había mostrado Sukop en su libro (Sukop y Thorne 2006). Una búsqueda reciente en la base de datos de Scopus arroja estos resultados para el número de documentos por año con la búsqueda “Lattice Boltzmann”, en la cual se ve una clara tendencia creciente que muestra 1432 publicaciones registradas terminando el 2019, y al menos 422 hasta abril de 2020.

## Figura 1

*Resultados para el número de documentos por año para la búsqueda "Lattice Boltzmann"*



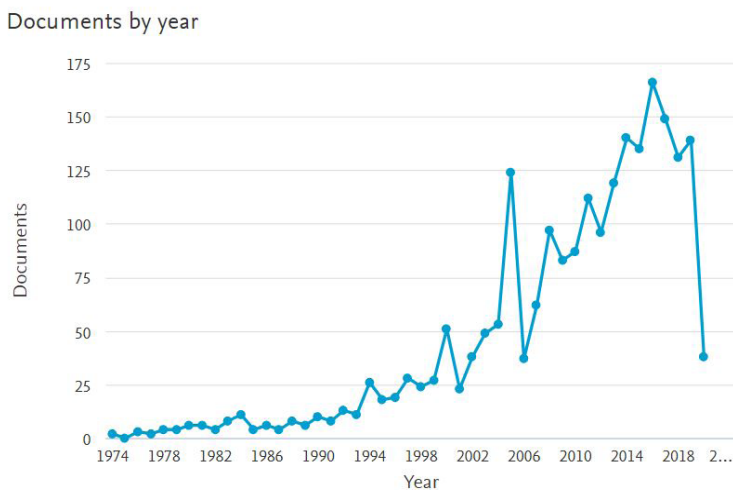
**Fuente:** Scopus (2020).

De igual forma, con la búsqueda "oil spill modeling" vemos una tendencia al alza en las últimas dos décadas en el número de artículos producidos sobre derrames de petróleo (Figura 2), lo que evidencia la relevancia y trascendencia en la actualidad del método y su aplicación a estos estudios.



**Figura 2**

*Resultados para el número de documentos por año para la búsqueda "oil spill modeling"*



**Fuente:** Scopus (2020).

## 2. MODELO DE LATTICE BOLTZMANN

Para empezar a hablar del método en cuestión, debemos tener en cuenta que se trata de un modelo discreto, es decir, no tratamos las ecuaciones involucradas como un continuo, sino que las evaluamos en determinadas divisiones tanto temporales como espaciales.

El espacio que estamos trabajando lo dividimos en pequeños cuadrados de lado  $\Delta x$ <sup>45</sup>, a través de esta división nuestro espacio de trabajo ahora es una grilla como la cuadrícula de un cuaderno. Cada uno de estos espacios, que ahora llamaremos nodos, vienen discretizados por un conjunto de velocidades  $c_i$  propio del modelo que estemos usando. Este conjunto de velocidades viene determinado por el problema que pretendamos resolver, pero el más usado para el caso bidimensional es el modelo de 9 velocidades<sup>6</sup> en el que las partículas pueden tomar los siguientes vectores de velocidad.

---

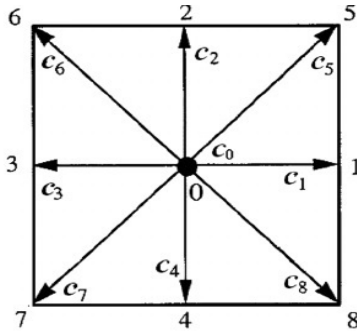
4 En este estudio usamos cuadrados para tener la misma medida en cada lado de las subdivisiones, sin embargo, se pueden usar rectángulo e incluso existen hoy en día métodos para usar coordenadas curvilíneas (Velasco, 2017).

5 Por practicidad y un poco de costumbre, denotamos  $x$  a las medidas de longitudes espaciales mientras que usamos  $t$  para las medidas temporales.

6 Los modelos de Lattice Boltzmann usualmente se clasifican con la nomenclatura  $DdQq$ , en la cual  $d$  se refiere al número de dimensiones del modelo y  $q$  al número de velocidades en cada nodo. Así, un modelo bidimensional de nueve velocidades sería un modelo  $D2Q9$ .

### Figura 3

Vectores de velocidad en un modelo D2Q9



Fuente: Krüger et al. (2017).

A cada una de estas direcciones le corresponde un peso  $w_i$  que viene determinado por:

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & i = 0 \\ \frac{1}{9} & i = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{36} & i = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (2-1)$$

En la cual estos pesos cumplen:

$$\sum w_i = 1 \quad \sum w_i c_i = 0 \quad (2-2)$$

Observe que no todos los vectores tienen la misma longitud, que se puede interpretar como la probabilidad de que las partículas en el nodo lleguen a los nodos vecinos determinados por la dirección en la que apuntan.

De la misma forma que el espacio, el tiempo se divide en intervalos de longitud  $\Delta t$ .

Ahora, entre las cantidades más importantes cuando trabajamos con el método de Lattice Boltzmann está la función de distribución discreta, que se diferencia de 1-25 precisamente por el conjunto de velocidades discretas  $c_i$  para cada nodo de la grilla. A partir de esta función se pueden recuperar las variables macroscópicas del fluido simplemente teniendo en cuenta 1-21 y 1-22. Se deduce que para recuperar la densidad y el momento, y por lo tanto la velocidad, a partir de la  $f_i$  se aplica:

$$\rho = \sum f_i \quad (2-3)$$

$$\rho u = \sum c_i f_i \quad (2-4)$$

Además de esto, deberemos tener en cuenta la velocidad del sonido en un modelo isotérmico  $c_s$  que en los modelos de Lattice Boltzmann es<sup>7</sup>:

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2-5)$$

La cual se encuentra relacionada con la viscosidad cinemática a través del parámetro de relajación  $\tau$  por<sup>8</sup>:

$$v = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \quad (2-6)$$

---

7 Note que con la premisa de que  $\Delta x = \Delta t = 1$  la velocidad  $c_s$  se reduce a  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  que es el valor de  $c_s$  que usaremos de aquí en adelante.

8 Esta relación se deduce realizando un análisis de Chapman-Enskog a la Ecuación 2-7.

Esta cantidad resulta fundamental para este tipo de modelos ya que establece un límite para el valor  $\tau$ . Para valores de  $\tau$  muy próximos a  $\frac{1}{2}$  la viscosidad se aproxima 0, y luego toma valores negativos que son físicamente imposibles. Además, Krüger *et al.* (2017) muestran como a medida que  $\tau$  se acerca a 0.5, las soluciones oscilan exponencialmente y una vez sobrepasado este límite se alejan cada vez más de la convergencia.

## 2.1 Ecuación de Lattice Boltzmann

Habiendo discretizado el espacio y el tiempo y establecido las variables importantes para la construcción de nuestro modelo, pasamos a la discretización de la ecuación. La forma discreta de la ecuación 1-25 y luego de discretizar el espacio de velocidades e integrar entre  $t$  y  $t + \Delta t$  asumiendo que  $\Omega$  es constante, se obtiene (Guo y Shu, 2013):

$$f_i(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_i(x, t) - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)) \quad (2-7)$$

Esta ecuación indica que las poblaciones  $f_i$  se desplazan a un nodo vecino  $x + \Delta x$  en un tiempo  $t + \Delta t$  y que al mismo tiempo estas se relajan hacia el equilibrio  $f_i^{eq}$  a una tasa determinada por  $\tau$ . Ahora cabe preguntarnos, ¿qué forma tiene  $f^{eq}$ ? La ecuación 1-15 para partículas moviéndose en un medio macroscópico con velocidad  $u$  se puede escribir en términos de las variables macroscópicas (Mohamad, 2011):

$$f^{eq} = \frac{3\rho}{2\pi} e^{-\frac{3}{2}(c-u)^2} = \frac{3\rho}{2\pi} e^{-\frac{3}{2}c \cdot c} e^{(-3c \cdot u + \frac{3}{2}u \cdot u)} \quad (2-8)$$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$  expansión en series de Taylor para la ecuación anterior se puede expandir:

$$f^{eq} = \frac{3\rho}{2\pi} e^{-\frac{3}{2}c \cdot u} \left(1 + 3c \cdot u - \frac{3}{2}(u \cdot u) + \frac{9}{2}(c \cdot u)^2 - \dots\right) \quad (2-9)$$

Despreciando los términos de mayor orden, se puede llegar a la ecuación:

$$f^{eq} = \rho w_i \left(1 + 3c \cdot u - \frac{3}{2}(u \cdot u) + \frac{9}{2}(c \cdot u)^2\right) \quad (2-10)$$

Y más generalmente, teniendo en cuenta 2-5 (Krüger *et al.*, 2017):

$$f^{eq} = \rho w_i \left(1 + \frac{c \cdot u}{c_s^2} + \frac{(u \cdot c)^2}{2c_s^4} - \frac{u \cdot u}{2c_s^2}\right) \quad (2-11)$$

Con lo que se obtiene la forma que debe tener  $f^{eq}$ .

## 2.2 Colisión y propagación

La Ecuación 2-7 se puede descomponer en dos pasos esenciales en el método de Lattice Boltzmann: la colisión y la propagación. La colisión entre las partículas en la medida en que estas se desplazan entre los nodos viene modelada por el evento:

$$f_i^{out} = f_i - \frac{\Delta t}{\tau} (f_i - f_i^{eq}) \quad (2-12)$$

En este caso  $f_i^{Out}$  representa la función de distribución después de la colisión. El siguiente paso es propagar las partículas que lo ejecutamos mediante:

$$f_i(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_i^{Out} \quad (2-13)$$

Es importante notar cómo se ligan cada una de las ecuaciones que se han venido relacionando, es decir:

1. A partir de  $f_i$  se calcula  $\rho$  y  $u$ .
2. De  $\rho$  y  $u$  se obtiene  $f_i^{eq}$ .
3. A partir de  $f_i$  y  $f_i^{eq}$  se obtiene  $f_i^{Out}$ .
4. Finalmente,  $f_i^{Out}$  se usa para calcular  $f_i(x + \Delta x, t + \Delta t)$ .

Esto da ya una breve idea de cómo se debe ejecutar un código básico usando el MLB.

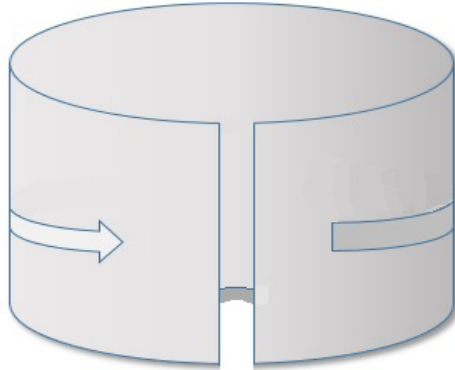
## 2.3 Condiciones de frontera

### 2.3.1 Condiciones periódicas

Una de las formas más simples de tratar las fronteras en los modelos de Lattice Boltzmann es mediante una aproximación periódica. En esta el fluido que sale del dominio finito reingresa a la simulación como si el espacio estuviera conectado por los extremos.

**Figura 4**

*Fronteras periódicas en los extremos del dominio*



**Fuente:** Krüger et al. (2017).

Este tipo de fronteras emergen naturalmente al considerar la simetría del fluido, por esto las fronteras periódicas aplican solamente en los casos en los cuales la solución del fluido es periódica. Como consecuencia, estas conservan naturalmente la masa y el momento.

Al instalar este tipo de fronteras, se debe establecer que durante el proceso de propagación las poblaciones que ingresan al dominio (hasta ahora desconocidas) sean las mismas que dejan el dominio al otro extremo. Para esto se aplica:

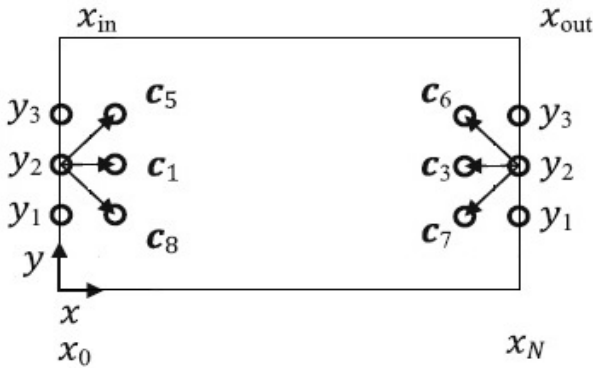
$$f_i(x, t) = f_i^{Out}(x + L, t) \quad (2-14)$$



En la cual  $L$  es la longitud del espacio simulado.

### Figura 5

*Poblaciones en las fronteras del dominio aplicando las fronteras periódicas*



**Fuente:** Krüger et al. (2017).

### 2.3.2 Fronteras sólidas: aproximación de rebote

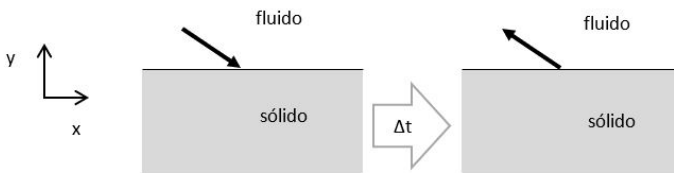
Anteriormente vimos cómo para algunos casos las fronteras pueden tratarse de forma periódica, interpretando el dominio como una especie de superficie cilíndrica. Aquí las fronteras resultan ser justamente los bordes del espacio que buscamos modelar, pero ahora imaginemos que se pone un obstáculo en medio de nuestro dominio, en este caso tratar el borde del obstáculo de forma periódica no sería lo más apropiado ya que no reproduciría los efectos

físicos que buscamos.

En estas circunstancias las fronteras del obstáculo deben tratarse de una forma diferente; una de las formas más antiguas y, a pesar de ello, aún vigentes para tratar las fronteras es la aproximación de rebote o como comúnmente se le conoce en la literatura: el método de Bounce-Back. Este método se trata de esto precisamente, lo que busca para lidiar con las fronteras de objetos sólidos es hacer rebotar las partículas en la misma dirección en la que venían, como una pelota que choca contra una pared. La Figura 6 ilustra el proceso.

### Figura 6

*Esquema que muestra el método de Bounce-Back*



**Fuente:** Krüger et al. (2017).

Existen dos aproximaciones para aplicar esta técnica al método de Lattice Boltzmann. La primera modifica el proceso de colisión dejando intacto el proceso de propagación y la segunda hace lo contrario, deja intacto el proceso de colisión modificando únicamente el paso de propagación<sup>9</sup>. Sin embargo, aquí se pondrá énfasis en el

9 En la literatura se les denomina fullway y halfway. A pe-

segundo debido a que tiene una mejor precisión temporal<sup>10</sup> (Krüger *et al.*, 2017).

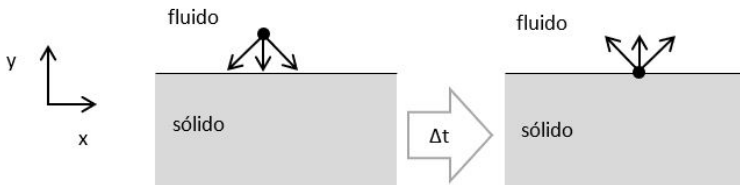
La implementación de este implica la siguiente modificación en el proceso de propagación del método:

$$f_i(x_b, t + \Delta t) = f_i^{Out}(x_b, t) \quad (2-15)$$

Aquí las partículas dejan un nodo de frontera  $x_b$  con una velocidad  $c_i$  y se encuentran con la superficie sólida en un tiempo  $t + \frac{\Delta t}{2}$  donde luego son reflejadas con una velocidad  $-c_i$  llegando al nodo del que partieron en un tiempo  $t + \Delta t$ .

### Figura 7

*Evolución de la regla de rebote*



sar de sus nombres, ambas aproximaciones asumen que la frontera se encuentra entre la parte sólida y la frontera en sí misma.

10 Al modificar la colisión, la aproximación de fullway requiere que las partículas permanezcan en la región sólida durante un tiempo  $\Delta t$  extra, es decir, se toma  $2\Delta t$  para devolver la información mientras que la aproximación de halfway solo requiere  $\Delta t$ .

Fuente: Krüger et al. (2017).

## 2.4 Condiciones de estabilidad

En la dinámica computacional de fluidos usualmente se usa el número de Courant<sup>11</sup> para determinar si una simulación es estable, lo que lleva a la condición:

$$C_r < 1 \quad (2-16)$$

Sin embargo, en los modelos de Lattice Boltzmann esta condición no es suficiente. Aquí es necesario hacer una diferenciación entre lo que son condiciones necesarias y suficientes. Una condición necesaria es que:

$$\frac{\tau}{\Delta t} \leq \frac{1}{2} \quad (2-17)$$

Pero que esta condición se cumpla no garantiza la estabilidad del modelo, por lo tanto, una condición necesaria es una premisa que se debe cumplir en el modelo pero que por sí misma no puede garantizar la estabilidad de este; mientras que una condición suficiente es aquella que en sí misma garantiza la estabilidad del modelo. Una condición suficiente usada es la no-negatividad de todas las poblaciones en equilibrio, es decir:

---

11 Este compara la velocidad a la cual se propaga la información en el modelo con la velocidad física, es decir,  $C = |u| \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$f^{eq} \geq 0 \quad (2-18)$$

Esto debido a que en algunos puntos la elección de  $\tau$  lleva a una viscosidad muy baja, lo que puede hacer que  $f^{eq}$  tome valores negativos. Para remediar esto, se hace uso del método de Fix-Up (Li *et al.*, 2004), que consiste básicamente en definir un tiempo de relajación  $\tau'$  local para aquellos puntos en los cuales no se garantice la condición anterior; para esto se hace:

$$\tau' = \max(\tau, 1 - \frac{f_i^{eq}}{f_i}) \quad i = 1 - 9 \quad (2-19)$$

Con esto se garantiza 2-18 y al ser esta una condición suficiente, se garantiza la estabilidad del modelo.

## 2.5 Medición del error

Una forma de medir el error en la mecánica computacional de fluidos es comparar la diferencia entre la solución arrojada por el método y la solución analítica. En los métodos de Lattice Boltzmann esto se hace a través de la llamada norma del error L2, así:

$$\epsilon(t) = \sqrt{\frac{\sum q_n(x,t) - q_a(x,t)}{\sum q_a^2(x,t)}} \quad (2-20)$$

La suma se hace sobre todo el dominio y una de las ventajas de esto es que al ser local no afecta los otros valores.

### **3. DERRAMES DE PETRÓLEO**

En esta sección se describen algunos de los procesos físicos que intervienen en un derrame de petróleo con el fin de contextualizar al lector sobre conceptos que se abordarán más adelante. De igual forma, se espera que con esto se entienda un poco mejor por qué la elección de un modelo de advección-difusión es el más adecuado para modelar este tipo de eventos por sobre otros modelos de Lattice Boltzmann que están disponibles en la literatura.

#### **3.1 Características físicas de los derrames de petróleo**

##### **3.1.1 Dispersión**

El petróleo tiende a expandirse de forma natural sobre cualquier superficie en la que se derrame. Cuando este ocurre sobre la tierra, esta retiene el contaminante y con esto el proceso de dispersión ocurre de forma muy lenta. Sin embargo, en el agua el petróleo al ser menos denso que esta tiende a concentrarse sobre su superficie por lo que el proceso se da de una forma más rápida especialmente en derivados muy ligeros como la gasolina.

Esta expansión se produce incluso en ausencia de corrientes de agua y viento debido a que es un efecto causado por la interacción de la fuerza gravitacional que actúa sobre el crudo y la tensión interna producida por la viscosidad, la cual se opone a la acción de las primeras. Las corrientes de viento y agua también tienen efecto sobre este proceso de dispersión<sup>12</sup>. El petróleo se esparcirá en la dirección que lo dirijan estas (Fingas, 2016).

### 3.1.2 Expansión mecánica

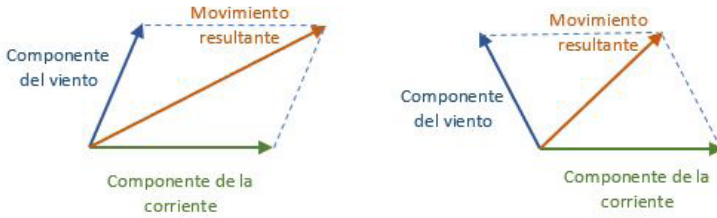
Fingas (2016) dice al respecto del movimiento del petróleo que además de su tendencia natural a dispersarse, el petróleo es movido a lo largo de la superficie del agua principalmente por las corrientes superficiales y el viento. Sin embargo, también aclara que para que las corrientes de aire tengan un efecto significativo en la dirección en la cual el petróleo se desplazará, su velocidad deberá ser superior a los *20km/h* (Figura 8), en estos casos las corrientes de viento deberán ser tenidas en cuenta para determinar la dirección en la cual se producirá el movimiento del contaminante.

#### Figura 8

*Efectos de corrientes de viento suaves sobre la dirección en la cual se desplazará el petróleo derramado*

---

12 Cabe aclarar que en el modelo que aquí se desarrolla no se tiene en cuenta la acción del viento.



**Fuente:** *Fingas (2016).*

### 3.1.3 Otros procesos

Además de los procesos mecánicos producidos por agentes externos, en los derrames de petróleo pueden observarse otra clase de fenómenos que influyen sobre su concentración y duración. Estos incluyen transformaciones químicas debidas a la exposición a la luz solar, evaporación, emulsificación, hundimiento y fotooxidación, entre otros. Aquí se mencionarán algunos de los que producen los efectos más relevantes y que usualmente son tenidos en cuenta para la modelación computacional de esta clase de eventos.

#### A. Evaporación

Este es uno de los procesos que influye de forma más significativa en la cantidad de petróleo que permanece sobre la superficie del agua. Los derivados de petróleo



más livianos al cabo de algunos días se evaporarán completamente, mientras que el petróleo pesado permanecerá en esta.

Todos los tipos de petróleo y sus derivados se evaporan de forma distinta debido a que la tasa de evaporación depende de su composición. En algunos casos, para medir la evaporación del crudo resulta significativo tener en cuenta dónde se encuentra este, ya que sobre la tierra o sobre superficies donde el producto no se mezcla, debido a efectos de la evaporación se forma sobre la superficie del petróleo una costra, lo cual ralentiza este proceso (Fingas, 2016).

## **B. Sedimentación y adhesión a las superficies**

Cuando el petróleo derramado en el agua tiene una densidad muy alta, este tiende a hundirse y en el fondo es cubierto por sedimentos con lo que su proceso de degradación natural se da de forma muy lenta. Esto suele ocurrir cerca a las costas o muy cerca de ellas. Adicional a esto, el petróleo por su misma naturaleza es adhesivo, lo que implica que al menos un porcentaje del petróleo que entre en contacto con cualquier superficie será retenido por esta. Esto incluye también el contacto con las líneas costeras (Fingas, 2016; Maslo *et al.*, 2014).

## C. Biodegradación

A pesar de que la biodegradación no es un proceso significativo en los cambios que se producen en un derrame a corto plazo, vale la pena resaltar algunos aspectos. Algunos componentes del petróleo son biodegradables ya que existen organismos en el medioambiente (particularmente en aquellos ecosistemas donde el petróleo ha brotado del suelo de forma natural) que procesan algunos de estos componentes para convertirlos en una fuente de energía.

La biodegradación suele ser muy lenta, toma semanas para que el 50 % de los componentes se biodegraden en condiciones óptimas y hasta años para que el 10 % del crudo se biodegrade en condiciones similares; es un proceso que depende principalmente del tipo de petróleo o derivado, de la temperatura y de la cantidad de oxígeno en el medio.

A modo de ejemplo, se toma la gasolina que tiene compuestos biodegradables que se descomponen rápidamente sobre la superficie, pero también tiene compuestos que son muy tóxicos para algunos microorganismos. Aun así, esta suele evaporarse más rápido de lo que tarda en degradarse (Fingas, 2016).

### 3.2 Modelación de derrames de petróleo

El tema de los derrames petroleros ha sido ampliamente estudiado junto con los impactos

ambientales que este genera. Ya en 1993 en la Universidad de Clarkson (Postdam, Nueva York) se usó el modelo computacional ROSS3<sup>13</sup> para simular un derrame de petróleo en un complejo sistema de ríos usando técnicas que no habían sido previamente exploradas, tales como el hecho de no usar un sistema de grilla rectangular estándar o una información fija del borde costero.

Según Shen y Yapa, este nuevo enfoque no solo es capaz de describir en detalle la dependencia del tiempo y la irregularidad de los límites de los ríos, sino que también es más eficiente desde el punto de vista computacional. ROSS3 tuvo múltiples ventajas sobre los modelos usados antiguamente. Se obtuvieron buenos resultados en general, pero no existían datos reales para validar el modelo. Sin embargo, los resultados obtenidos mostraron ser más realistas que los modelos usados previamente.

En 2004, Calzada y Marín, de la Universidad de la Habana, centraron su trabajo en hacer un recorrido histórico en la modelación de derrames de hidrocarburos desde los primeros intentos hasta la fecha de este trabajo (Estrada, 2004). Abdulfatai y Mohammed (citados por Jimoh y Alhassan, 2006), en la Universidad Federal de Tecnología (Minna, Nigeria), plantean como meta desarrollar un modelo matemático que describa la dispersión del petróleo en el agua. Para esto se realizaron varios experimentos en el laboratorio con el fin de determinar la dispersión, luego plantearon un modelo hipotético que se verificó utilizando el *software* profesional mathCAD 2000. Los resultados obtenidos se graficaron con ayuda del programa y se verificó la validez del modelo al compararlo con los resultados obtenidos en el laboratorio.

Posteriormente en 2008, Banda *et al.* (2009) aplicaron el uso de Lattice Boltzmann para el estudio de la dispersión de un contaminante en un flujo de agua. Su

objetivo principal era probar la eficiencia del método y para su respectiva validación se hace uso de un evento hipotético en el estrecho de Gibraltar. Los resultados obtenidos durante la investigación mostraron la exactitud del método empleado y su capacidad para simular flujos de marea y transporte de contaminantes en los regímenes hidrodinámicos considerados.

En 2013, Trento y Álvarez (2013) suponen un derrame de petróleo continuo sobre el caudal del río Paraíba do Sul, Río de Janeiro. Se utiliza un modelo Lagrangiano de interacción de partículas para simular el comportamiento del petróleo durante 72 horas con la ayuda del *software* computacional SisBaHiA. Se verificó el método a través de una simulación simple a lo largo de un afluente hipotético con forma trapezoidal y caudal uniforme, obteniendo resultados con un margen de error muy pequeño.

Los resultados finales del trabajo permitieron obtener datos similares a los que se tendrían en un escenario real de acuerdo con la bibliografía consultada. También permitió estudiar datos como el espesor del crudo en diferentes puntos a lo largo del afluente y pérdidas por evaporación, entre otros, lo que lo convirtió en uno de los pocos ejemplos disponibles en la literatura acerca de derrames de petróleo en ríos de acuerdo con nuestro conocimiento.

Por otra parte, en la *Marine Pollution Bulletin* del 2014, Maslo *et al.* (2014) prueban la adecuación del uso del método de Lattice Boltzmann en el modelado de derrames de petróleo a gran escala, como un derrame de petróleo en el Líbano ocurrido entre julio y agosto de 2006. Realizaron varios experimentos numéricos en los cuales dos tipos de modelos (D2Q5 y el D2Q9) y dos modelos con tiempos de relajación diferentes, en los cuales se adecuaron algunas características, de modo que se acelerara el cálculo sin que se viera afectada la precisión del modelo. En este caso

la validación fue hecha a través de la comparación de la posición de la mancha de petróleo y su concentración en el mar usando imágenes satelitales y datos de campo para el derrame de petróleo en el Líbano.

Por último, en el ámbito colombiano se tiene conocimiento de dos trabajos en derrames de petróleo. En 2002, en la Facultad de Minas de la Universidad Nacional de Colombia (Medellín) se desarrolló y aplicó el modelo computacional COLSPILL para simular el comportamiento físico de derrames de hidrocarburos en sistemas de agua dulce (Zapata *et al.*, 2002). Los resultados del modelo se muestran consistentes y coherentes, sin embargo, no se realizó la validación del modelo con datos reales.

Posteriormente en 2014, investigadores de la Universidad Nacional y la Universidad del Norte, en conjunto con otros investigadores internacionales, desarrollaron un modelo 3D con el objeto de ilustrar el comportamiento de la pluma de petróleo en función de las gotas de crudo<sup>14</sup> (Otero *et al.*, 2014).

En Colombia el estudio de los derrames de petróleo es de particular interés debido a la creciente dependencia de la economía nacional en el tema de hidrocarburos (Avellaneda, 2018; Velásquez, 2017). Sin embargo, estos estudios se han centrado en una descripción cualitativa del impacto social y ambiental, y son escasos los ejemplos accesibles de implementación de modelos matemáticos y computacionales que dictaminen la evolución y el impacto que estos eventos tienen sobre los afluentes hídricos, a pesar de los numerosos casos presentados a lo largo de la historia de los hidrocarburos en el país.

---

14 Cabe resaltar que es muy probable que existan otras investigaciones que aborden el tema y que no se encuentren disponibles en la web, motivo por el cual no se tienen en cuenta aquí.

Solo a modo de ilustración, cabe mencionar algunos ejemplos: en 1989 se registraron 17 casos de derrames que afectaron al Magdalena y sus afluentes (Avellaneda, 2006). En 1990 el pozo San Francisco 21 derramó cerca de 200 barriles que afectaron la región del Alto Magdalena (Avellaneda, 2006). En junio de 2016 hubo un derrame en el Casanare (Gudynas, 2018). Y en marzo de 2018 el campo petrolero Lizama 158 afectó alrededor de 24 km de las quebradas de Caño Muerto, La Lizama y el río Sogamoso (Salamanca, 2018), entre otros cada vez más recurrentes.

## 4. MODELO DE ADVECCIÓN - DIFUSIÓN

A continuación, se describen los procesos de advección-difusión, su ecuación diferencial y cómo se adapta el modelo de Lattice Boltzmann para simular su comportamiento.

### 4.1 Ecuación diferencial del proceso de advección-difusión

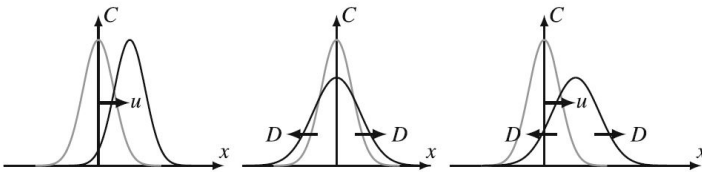
Los procesos de advección-difusión los encontramos diariamente tanto en la naturaleza como en la industria, los cuales representan un fenómeno importante y que, a pesar de ello, solo cuenta con solución analítica para casos muy sencillos. Por este motivo, se emplean los métodos numéricos para modelar este tipo de situaciones y poder analizar sus características en el futuro.

Antes de presentar una ecuación que describa estas situaciones, es importante saber de qué exactamente estamos hablando. El proceso advectivo (advección) se da cuando una cantidad escalar (masa y temperatura, entre otros) inicialmente en reposo es arrastrada por efecto del movimiento de otra que domina el medio. Ejemplo de esto son las nubes que son arrastradas por efecto de las corrientes de aire, un contaminante transportado por acción de la corriente de un río, etc.

El proceso de difusión se da por la energía cinética de las partículas que produce lo que hoy llamamos movimiento browniano. Este proceso se describe a través de una cantidad propia de cada sustancia que denominamos coeficiente de difusión, la cual representa la facilidad con la que una sustancia tiende a mezclarse con otra. Generalmente es un proceso lento y es la razón por la cual se mezclan las sustancias que se ponen en un mismo espacio. La Figura 9 describe estos procesos.

### Figura 9

*Procesos para una concentración  $C$ : a la derecha advección pura, en el centro difusión pura y a la izquierda advección-difusión*



**Fuente:** Krüger et al. (2017).

Se presume que el campo vectorial a través del cual se desarrolla el proceso es previamente conocido y que el coeficiente que mide la difusión es una constante<sup>15</sup>. Además de esto, para nuestro estudio en particular nos

<sup>15</sup> Con esto se asume también que la temperatura es constante ya que el coeficiente de difusión físicamente es dependiente de la temperatura.



centraremos en la concentración como campo escalar.

La ecuación que describe el proceso de advección-difusión de la concentración de una especie  $C$  con coeficiente de difusión  $D$  a través del campo vectorial  $u$ , es la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (Cu) = D\nabla^2 \cdot (C) + q \quad (4-1)$$

El término  $q$  que aparece relacionado en la ecuación se incluye debido a que la concentración puede ser localmente producida o destruida debido a una reacción química u otro proceso que intervenga con este, es lo que se denomina un término fuente.

## 4.2 Extensión del método de Lattice Boltzmann para la ecuación de advección-difusión

A pesar de que el método de Lattice Boltzmann estuvo pensado inicialmente para aproximar una solución a la ecuación de Navier-Stokes, el modelo se puede extender para solucionar otras ecuaciones diferenciales que involucren leyes de conservación. Simplemente aplicando algunos cambios al método usual, lo que implica una de las ventajas más importantes del modelo. Ahora tomemos la ecuación de advección-difusión [4-1](#) sin considerar el parámetro fuente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (Cu) = D\nabla^2 \cdot (C) \quad (4-2)$$

Al llevar esto a un de modelo Lattice Boltzmann:

$$g_i(x + \Delta x, t + \Delta t) - g_i(x, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} (g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)) \quad (4-3)$$

Siguiendo el mismo orden que tomamos para el modelo en la sección 2, debemos saber cómo calcular las variables macroscópicas. Como ya se había mencionado anteriormente en los modelos de advección-difusión, la velocidad de advección es una variable externa que se debe conocer de ante mano, por lo que en esta ocasión no se debe recuperar de  $g_i$ . La concentración en este caso se recupera de la misma forma como se obtenía la densidad en los modelos de NS en la Ecuación 2-3, es decir:

$$c = \sum g_i \quad (4-4)$$

Ahora, el coeficiente de difusión tiene unidades de  $\frac{m^2}{s}$  al igual que la viscosidad cinemática, lo cual nos indica que al desarrollar este tipo de modelos la difusión está relacionada directamente con el parámetro de relajación  $\tau$  de esta forma:

$$D = c_s^2 \left( \tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (4-5)$$

La función de distribución de equilibrio  $g_i^{eq}$  en su forma más simple es:

$$g_i^{eq} = w_i C \left( 1 + \frac{c_i \cdot u}{c_s^2} \right) \quad (4-6)$$

Que tomando 2-5 queda simplemente:

$$g_i^{eq} = w_i C(1 + 3c_i \cdot u) \quad (4-7)$$

Al querer incluir el término fuente de la Ecuación 4-1 se toma la ecuación:

$$\begin{aligned} g_i(x + \Delta x, t + \Delta t) - g_i(x, t) \\ = -\frac{\Delta t}{\tau} (g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)) + Q_i(x, t) \end{aligned} \quad (4-8)$$

En la cual incluimos el término  $Q_i(x, t)$  correspondiente a la fuente de concentración. Ahora solo nos queda aclarar qué forma debe tener el término  $Q_i(x, t)$ . Para incluir una fuente de concentración se define la población de partículas:

$$Q_i = w_i q \quad (4-9)$$

En la cual  $q$  es la tasa de vertido por unidad de tiempo, y se puede comprobar que:

$$\sum Q_i = q \quad \text{y} \quad \sum Q_i c_i = 0 \quad (4-10)$$

Lo que implica que la inclusión de este término conserva el momento. Al incluir el término fuente solamente se debe modificar la Ecuación 4-4 para obtener:

$$c = \sum g_i + \frac{Q_i \Delta t}{2}, \quad Q_i = \left(\tau - \frac{1}{2}\right) w_i q \quad (4-11)$$

Con estas modificaciones se concluye la adaptación del modelo LB para la ecuación de advección-difusión en la que de los procesos mencionados en la sección 3 solo se tienen en cuenta 3.1.1 y 3.1.2 debido a que son estos los que se producen por efecto de la interacción entre las corrientes de agua y el flujo de petróleo, lo cual es el principal objetivo de este proyecto.

## 5. VALIDACIÓN DEL MODELO

Para validar el modelo aquí expuesto se realizaron una serie de simulaciones de eventos previamente estudiados y se compararon los resultados conocidos con los obtenidos en la simulación. Para esto se eligieron en particular tres casos: un punto de concentración gaussiana para el caso en el que la difusión es dominante, otro para la advección dominante y, por último, se estudió la velocidad en un flujo de Poiseuille.

Los resultados del caso advección-difusión se comparan con los expuestos en Krüger *et al.* (2017), aun cuando se expone la solución analítica para dicho evento; por otro lado, la simulación del flujo de Poiseuille se compara con su solución analítica. Finalmente, para cada caso además de la comparación con la solución analítica se hace un análisis de la medición del error arrojada por la

norma L2.

## 5.1 Difusión gaussiana

Se trata de un punto de concentración  $C$  de una sustancia con perfil inicial gaussiano que evoluciona en presencia de un campo de velocidad  $u$ . El perfil de concentración inicial es:

$$C(x, 0) = C_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (5-1)$$

En la cual  $C_0$  es la concentración inicial, el punto  $(x_0, y_0)$  denota la ubicación de la concentración inicial y  $\sigma_0$  determina el ancho de la campana. La solución analítica a este problema viene dada por Krüger *et al.* (2017):

$$C(x, t) = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2Dt} C_0 e^{-\frac{(x-x_0-ut)^2 + (y-y_0-ut)^2}{2(\sigma_0^2 + 2Dt)}} \quad (5-2)$$

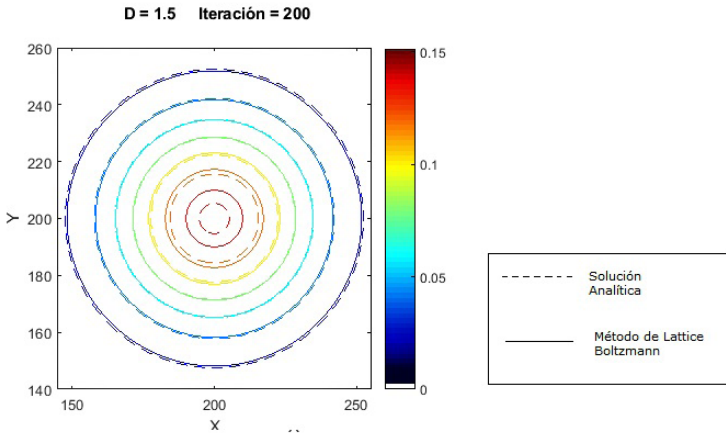
### Difusión dominante

Para este caso se tomó un dominio de  $512 \times 512$  nodos, la ubicación de la concentración inicial es  $(200, 200)$ , el ancho

de la curva es  $\sigma_0 = 10$ , la concentración inicial  $C_0 = 1$  y el coeficiente de difusión se toma como  $D=1.5$ . El parámetro de relajación  $\tau$  se usa según 4-5 mientras que se toman  $\Delta x = 1$  y  $\Delta t = 1$  acorde a lo dicho en la sección 2. En la Figura 10 se muestran los contornos de la solución obtenidos con el método luego de 200 iteraciones y en línea punteada los obtenidos a partir de la solución analítica.

**Figura 10**

*Difusión gaussiana con velocidad nula*



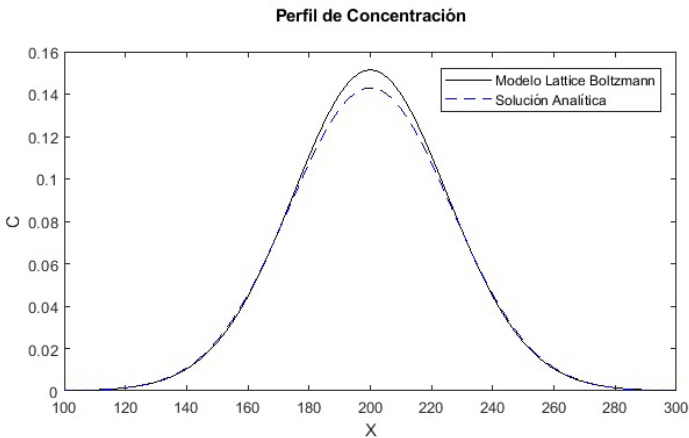
**Fuente:** Maslo (2015).

Como puede observarse, en el punto central de la concentración las soluciones analíticas y la del modelo difieren. En la medida que la concentración baja a los puntos

más exteriores el margen de error entre las dos soluciones es muy bajo, es más, se puede ver la convergencia de las dos curvas ya a niveles de concentración próximos a 0.1. Esto se debe principalmente a que el método de Lattice Boltzmann necesita una cierta cantidad de iteraciones para lograr la convergencia.

**Figura 11**

*Perfil de concentración gaussiana*



**Fuente:** Maslo (2015).

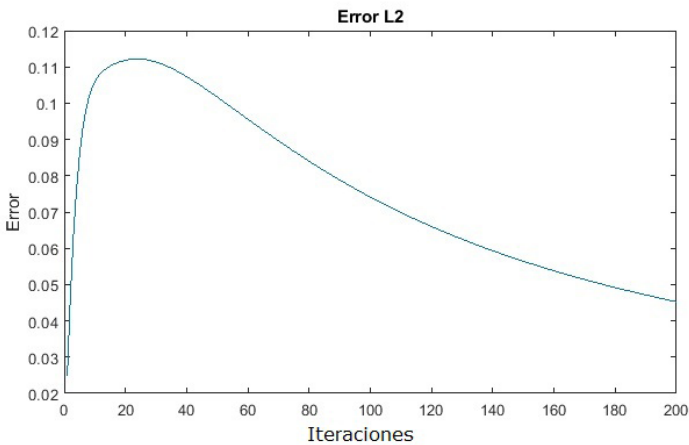
Además, si observamos la Figura 11 vemos de forma más precisa que la diferencia entre ambas soluciones se concentra justamente en el centro de la

curva, se obtienen concentraciones más altas con el método de Lattice Boltzmann en el punto inicial que las que arroja la solución analítica. Estos mismos resultados son los que se pueden observar en la página 323 del artículo de Krüger *et al.* (2017) en el cual se presentan los resultados de este mismo experimento con los mismos parámetros para realizar la simulación.

La Figura 12 muestra el margen de error en la medida en que las iteraciones transcurren, vemos que inicialmente el error toma su valor mínimo debido a que el perfil de concentración inicial es el mismo para ambas curvas. Sin embargo, luego de llegar hasta su máximo valor se presenta una rápida tendencia a la baja en la medida que aumentan.

## Figura 12

*Error L2 para el caso de difusión gaussiana con velocidad nula*



**Fuente:** Maslo (2015).



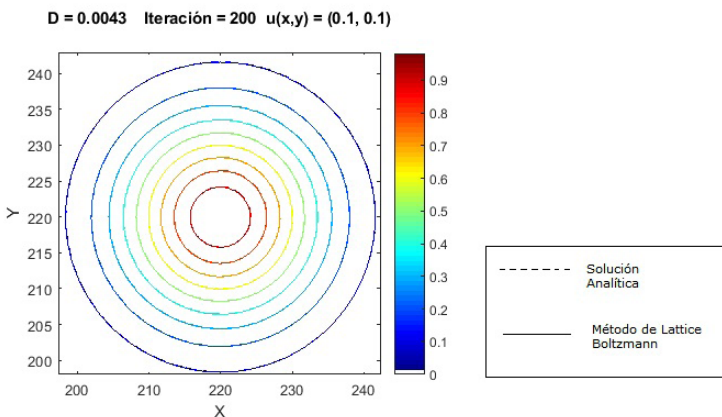
## Advección dominante

Ahora se presenta un caso en el que el coeficiente de difusión presenta un valor relativamente bajo de  $0.0043$  y se incluye una velocidad de advección de  $(u_x, u_y) = (0.1, 0.1)$ . El dominio sigue siendo de  $512 \times 512$ .

En las Figuras 13 y 14 vemos cómo debido al bajo valor del coeficiente de difusión las concentraciones varían muy poco respecto a su estado inicial, lo que contribuye a que la solución presentada por el método de Lattice Boltzmann coincida perfectamente con la solución analítica.

### Figura 13

#### Caso de advección dominante



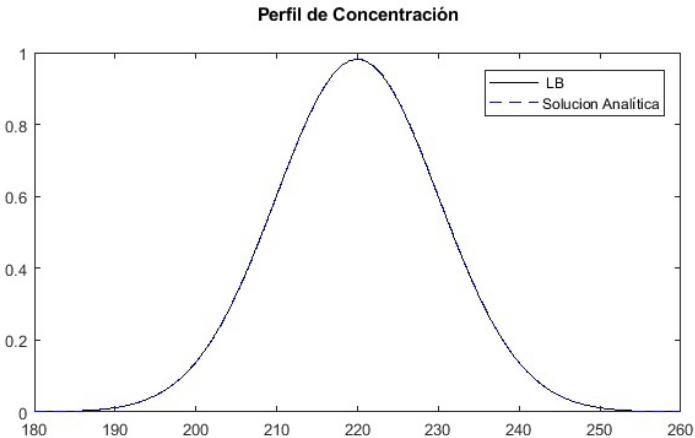
Fuente: Maslo (2015).

En la Figura 13, la escala de color muestra los niveles de concentración para ambas soluciones y se aprecia cómo debido al bajo nivel de difusión presente, la solución analítica no se aleja de los perfiles arrojados por la simulación realizada con el Lattice Boltzmann.

En la Figura 14 se muestra el perfil de la gaussiana cuyo contorno confirma lo dicho antes, incluso en los puntos en los que en la simulación presentada anteriormente evidenciaba diferencias, en esta ocasión los valores obtenidos son idénticos.

## Figura 14

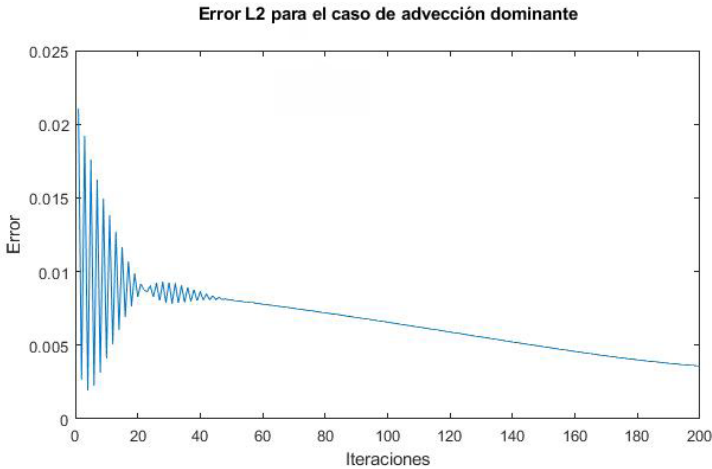
*Perfil de concentración para el caso de advección dominante*



**Fuente:** Maslo (2015).

## Figura 15

*Resultados para la medición del error en el caso de un punto de concentración gaussiana con advección dominante*



**Fuente:** Maslo (2015).

La Figura 15 muestra los resultados del uso de la Ecuación [2-20](#) para el caso de un punto de concentración gaussiana con un proceso de advección dominante. La medición de este se hizo de la región más externa al centro de la concentración, lo que explica las oscilaciones durante las primeras iteraciones. Sin embargo, es de resaltar que después incluso de 20 iteraciones el método muestra su clara tendencia a la convergencia con la solución analítica evidenciando luego de 200 iteraciones un error por debajo del 0.01.

## 5.2 Flujo de Poiseuille

En este caso, se estudia el perfil de velocidad del flujo inducido por una diferencia de presión en un canal recto de ancho  $H$ . Este es uno de los pocos casos en los que se conoce una solución analítica para una ecuación de Navier-Stokes modelada por la ecuación diferencial (Flórez *et al.*, 2008):

$$\frac{d^2u}{d^2y} + \frac{8u_{max}}{H^2} = 0 \quad (5-3)$$

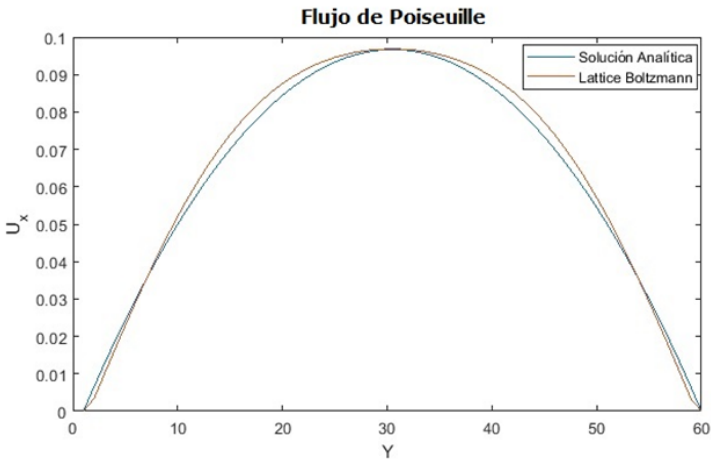
Para contextualizar al lector, este tipo de perfiles es el mismo que se puede observar en el agua que fluye por una tubería recta donde el agua alcanza su velocidad máxima en el centro del tubo y se reduce en la medida en que se acerca a los extremos por la fricción generada con la superficie del tubo. La solución analítica para esta ecuación diferencial en términos de la velocidad máxima está dada por (Krüger *et al.*, 2017):

$$u(y) = -4 \frac{u_{max}}{H^2} (y - 1)(y - H) \quad (5-4)$$

La simulación se realiza con un dominio de  $180 \times 60$  nodos, velocidad máxima de 0.1 y un valor de  $\tau = \sqrt{(3/16)} + 0.5$  (Krüger *et al.*, 2017) y la viscosidad  $\nu$  se toma como se menciona en la Ecuación 2-6. En la Figura 16 se presenta una comparación de los resultados obtenidos para la solución analítica y la solución obtenida con el método de Lattice Boltzmann. En estas se observa el perfil parabólico típico de este tipo de casos. Sin embargo, se presenta un desfase entre ciertos sectores de la solución analítica y la solución arrojada por el método de Lattice Boltzmann.

## Figura 16

*Comparación entre la solución analítica y la solución aportada por el método de Lattice Boltzmann para el flujo de Poiseuille*

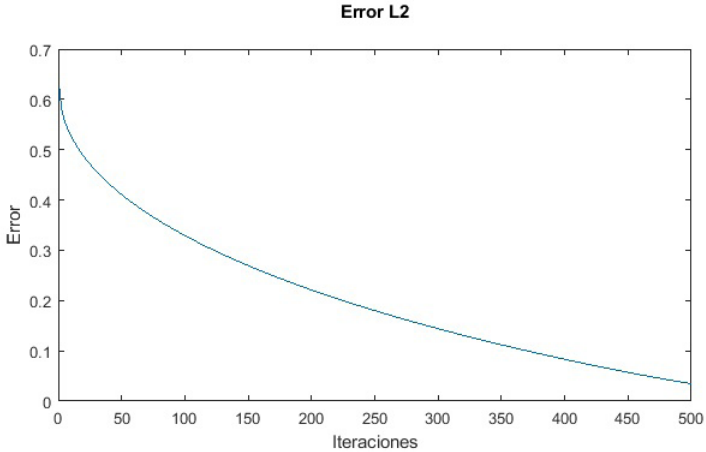


**Fuente:** Maslo (2015).

Las diferencias más grandes se presentan a los alrededores del centro de la parábola, conservando un margen de diferencia bastante pequeño en el vértice inferior a  $0.5 \times 10^{-3}$ . Se ilustra la evolución del error L2 en la Figura 17 en el margen de 500 iteraciones. Como era de esperarse, se muestra cómo el método va reduciendo rápidamente el error en la medida que se itera más veces.

**Figura 17**

*Error L2 para el caso del flujo de Poiseuille*



**Fuente:** Maslo (2015).

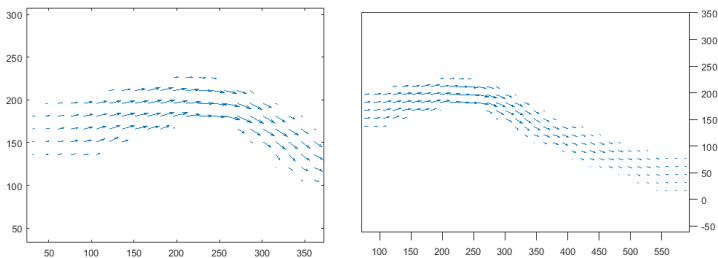
Como se observa en la Figura 17, el gráfico del error inicialmente muestra una diferencia grande entre la solución analítica y la arrojada por el método, ya que, como se dijo anteriormente, este necesita algunas iteraciones para alcanzar la convergencia apropiadamente, luego de 500 iteraciones el error alcanzado es inferior al 1 %.

## 6. IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE LATTICE BOLTZMANN AL CASO DE UN DERRAME DE PETRÓLEO EN UN RÍO

### 6.1 Generación de un campo de velocidades

**Figura 18**

*Campo de velocidades generado para un segmento del río Sava*



**Fuente:** Maslo (2015).

Uno de los primeros obstáculos que se presenta al querer simular un derrame de petróleo sobre el cauce de un río es la obtención del campo de velocidades que genera la corriente de agua. Lo más aconsejable con el fin de obtener resultados muy precisos es conseguir estos de una base de datos fluvial, ya que esta aporta no solo información precisa sobre la corriente de agua en sí misma, sino en muchas ocasiones datos de batimetría<sup>16</sup>.

Para nuestro caso, no fue posible obtener los datos del campo de velocidades de algún río en la zona para su consulta y uso, por lo que fue necesario implementar un modelo de Lattice Boltzmann que genere un campo de velocidades sobre el canal que representa al río de la misma forma que se hizo en la sección [5.2](#).

Como ya se mencionó en la sección [3.1.2](#), en los casos de un derrame de petróleo lo que dará lugar a su movimiento serán las corrientes superficiales del agua, por lo que se decidió generar un campo de velocidades mediante la implementación de un algoritmo de Lattice Boltzmann de dos dimensiones y el uso del mapa de un segmento de río que indicaría los sitios por los cuales correría el fluido. El campo de velocidades creado a través de este método debería ser muy similar al real si asumimos un cauce de agua lo suficientemente profundo para que obstáculos como piedras o elevaciones en el lecho del río no tengan un papel importante en el curso del flujo. El proceso que se siguió fue:

1. Lectura del mapa
2. Definición de los parámetros del modelo
3. Inicialización del fluido
4. Cálculo de las variables macroscópicas

---

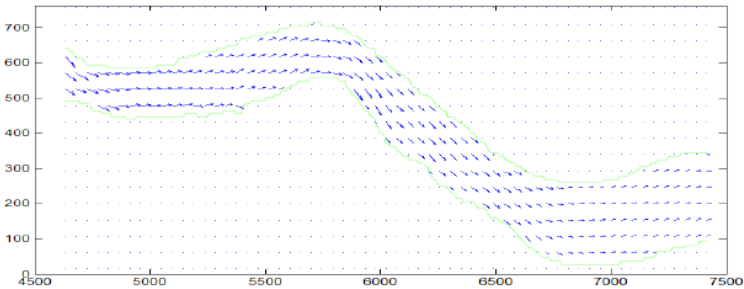
<sup>16</sup> Profundidad del lecho del río en los diferentes sectores del cauce.



5. Aplicación de las condiciones de frontera
6. Ejecutar la colisión de partículas
7. Aplicar el método de rebote
8. Aplicar propagación de partículas
9. Actualizar variables
10. Repetir desde el paso 4 las iteraciones necesarias
11. Guardar datos en un archivo .dat

### Figura 19

*Campo de velocidades presentado en la tesis doctoral para un segmento del río Sava*



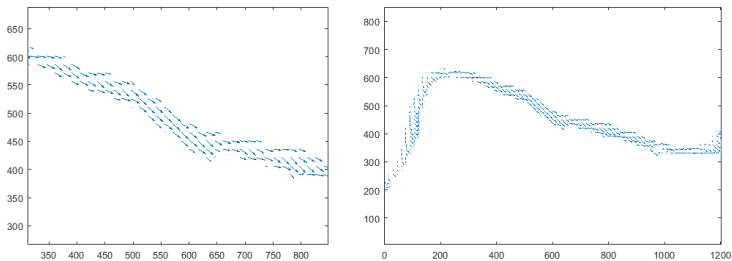
**Fuente:** Maslo (2015).

Con el fin de validar el proceso que se llevó a cabo, se toma un segmento del río Sava utilizado en Maslo (2015) y se comparan los campos obtenidos. Este también será usado en las primeras simulaciones del modelo advección-difusión.

En la Figura 18 se muestra el campo de velocidades en una sección curva del río donde se aprecia cómo los vectores siguen el trayecto definido por el cauce, mientras que en la Figura 19 se muestra el campo presentado en la tesis doctoral (Maslo, 2015), que se obtuvo de una base de datos real. Aquí se aprecia una buena concordancia entre los datos simulados y los presentados en el documento de referencia. Una vez validado el método de obtención para la fuente de advección, se realizó el mismo procedimiento para un segmento del río Magdalena a la altura de Cambao y Honda, en la frontera de Cundinamarca y Tolima. Los resultados se presentan en la Figura 20.

## Figura 20

*Campo de velocidad generado para un segmento del río Magdalena entre Cambao y Honda*



Fuente: Maslo (2015).

## Figura 21

Mapa del río Magdalena usado para la generación del campo de velocidad usado



Fuente: Google Maps.

## 6.2 Simulación de un derrame de petróleo

Luego de haber hecho la revisión de la literatura, validado el modelo para usar y de haber generado los campos de advección, se pasa a realizar la respectiva simulación del derrame de petróleo en un río. Como se dijo, para validar se empezará tomando como escenario un segmento del río Sava, a la altura de la ciudad de Sevnica, Eslovenia. En la Tabla 5 se relacionan los parámetros usados en este caso particular, y en la Figura 22 se pueden ver los resultados obtenidos para los niveles de concentración del crudo en cuatro momentos distintos durante una simulación de 0.5 horas. La velocidad máxima alcanzada en el campo de velocidad es de 2.66 m/s lo que describe trayectos de agua sin mayores corrientes.

**Tabla 5**

*Parámetros empleados en la simulación de un derrame ubicado en un segmento del río Sava*

<b>Parámetros del modelo</b>	<b>Cantidad</b>
t	0.5 s
x	9.5 m
Duración de la simulación	0.5 h
Petróleo derramado	10 000 kg
Parámetro de difusión	5 m <sup>2</sup> /s

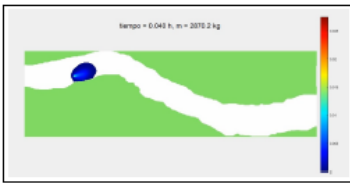
Densidad del petróleo	840 kg/m <sup>3</sup>
Densidad del agua	1000 kg/m <sup>3</sup>
Resolución del dominio	790 × 231

**Fuente:** elaboración propia.

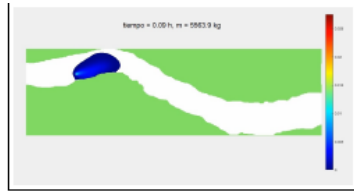
Como se puede ver en la Figura 18, las mayores velocidades se concentran en el centro del cauce, lo que se ve reflejado en la forma que toma la mancha a medida que se desplaza por el trayecto del río, ya que forma una especie de flecha. Además de esto, puede verse cómo mientras se ingresa más petróleo a la simulación, los niveles de concentración más elevados se mantienen en el punto de fuga y luego de detenida la inyección de este, el crudo es arrastrado por la corriente de agua río abajo mientras se va dispersando, haciendo que las concentraciones bajen cada vez más. En la Figura 22 se relaciona la cantidad de petróleo que ingresa a la simulación con el tiempo que tarda en ingresar.

**Figura 22**

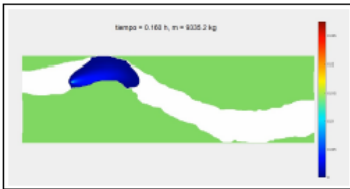
*Resultados para la simulación en el río Sava. La escala de color muestra la concentración del petróleo*



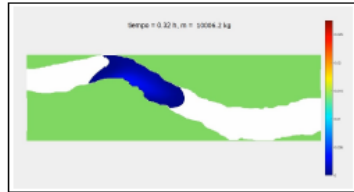
(a) Concentración luego de 0.04 horas de simulación donde se puede ver el inicio del proceso de difusión y arrastre debido a la corriente de agua.



(b) Concentración luego de 0.09 horas de simulación. El petróleo empieza a inundar la riberas del río y continúa su avance por esta.



(c) Concentración luego de 0.16 horas de iniciado el derrame. Luego de este tiempo podemos ver el ancho del río contaminado; mientras el contaminante avanza se observa una especie de flecha en la forma

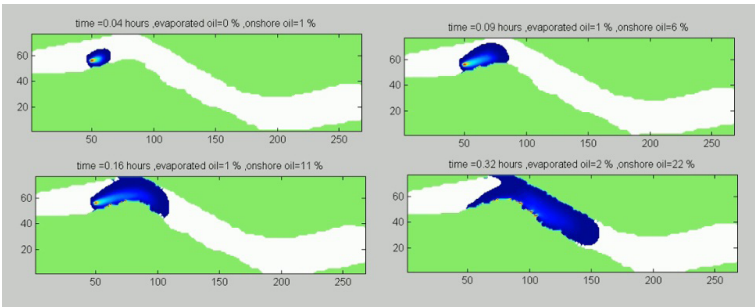


(d) Pasados 0.32 horas de iniciado el derrame la inyección de masa se ha detenido llegando hasta los 10006 Kg de petróleo mientras el contaminante avanza río abajo arrastrado por el agua.

**Fuente:** Maslo (2015).

## Figura 23

*Resultados presentados para el caso del río Sava*



**Fuente:** Maslo (2015).

La Figura 22 muestra los resultados expuestos por Maslo (2015). En la simulación que aquí se presenta, se emplearon datos de velocidad para el río distintos a los usados en la citada tesis doctoral, ya que esta información no es proporcionada en ella; a pesar de esto, se puede ver la similitud en ambas simulaciones.

En la Figura 22 (a) se observa el proceso inicial de difusión y advección, tan pronto como el derrame inicia el campo advectivo empieza a arrastrar el contaminante; el punto de mayor densidad es el sitio donde se sigue derramando el crudo, de la misma forma que se observa en la primera imagen de la simulación presentada en la Figura 23, y de este punto inicial se forma una especie de cola que representa las partículas arrastradas.

Si se hace un análisis comparativo y descriptivo de las cuatro imágenes presentadas como evidencia de los resultados en cuanto a forma, se destaca la concordancia de ellas presentadas en la Figura 23.

Otro punto para destacar es la concentración reflejada en la coloración de la imagen, en ambos resultados la concentración se mantiene por debajo de las 0.005 unidades lattice, en la medida en que el petróleo se difunde en el agua, mientras que en el punto de fuga se concentran densidades de alrededor de las 0.025 unidades lattice, lo que equivale a la tasa a la cual se está derramando el crudo. Estos niveles bajan a medida que es arrastrado por el agua.

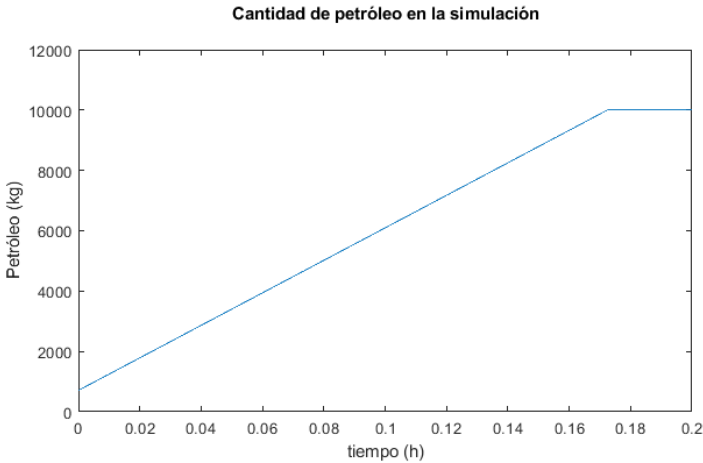
Cabe resaltar que en la simulación presentada aquí solo se consideran datos de advección y difusión del crudo y no los debidos a la evaporación y retención de él (Maslo, 2015).

En la Figura 23 (d) se puede ver lo que ocurre momentos después de haber detenido el derrame. Aquí los niveles de concentración en dicho punto han bajado hasta desaparecer y los residuos en el agua han sido arrastrados por la corriente río abajo; además de esto, se puede ver cómo se ha formado una cavidad en el centro de la mancha del contaminante que también puede ser vista en la Figura 22 (d). Esto se debe principalmente a que en el centro del río se concentran las mayores velocidades de la corriente, hecho que también se refleja en los extremos donde dado que la velocidad es menor, el petróleo no avanza a la misma velocidad que en el centro del río y da lugar a esas características colas observadas y también presentes en la Figura 22 (d).



## Figura 24

### *Entrada de petróleo en la simulación*



**Fuente:** Maslo (2015).

A continuación, se presentan los resultados de dos de las simulaciones realizadas para el caso de un par de derrames hipotéticos sobre dos segmentos diferentes del río Magdalena. Los dos escenarios se plantean a modo de responder la pregunta: *¿Qué características se podrían observar en caso de un derrame en un afluente importante nacional?* El río Magdalena es uno de los cursos de agua transitables más importantes en la hidrografía nacional y en este se han presentado varios casos de derrames petroleros importantes, algunos de ellos mencionados ya en la sección 3.2.

Se eligieron dos escenarios: el primero de estos se ubica en una región comprendida entre los municipios de Puerto Berrío y Yondó, en el departamento de Antioquia, y el segundo entre los municipios de Honda y Cambao (Tolima).

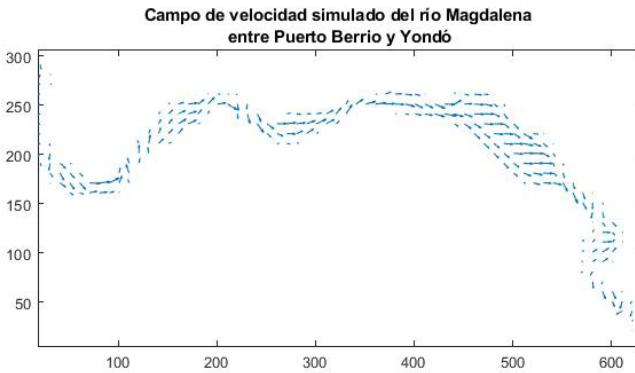
Las simulaciones presentan dos casos diferentes para cada escenario, respectivamente: en el primero, se supuso un derrame instantáneo, es decir, cierta cantidad de petróleo se derramó en determinado instante de tiempo sin que el derrame continuara; el segundo escenario contempla un derrame que inicia en cierto instante de tiempo y continúa durante un lapso de media hora hasta que es controlada la fuga. Inicialmente se presenta el campo de velocidades generado para el escenario Puerto Berrío-Yondó. En este los vectores siguen correctamente el trayecto del río que representa una longitud de aproximadamente 36.77 km<sup>1</sup>.

---

1 Distancia medida directamente con la herramienta de medición de Google Maps.

## Figura 25

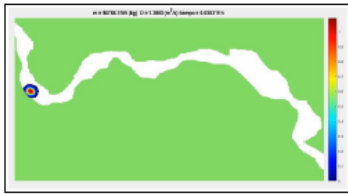
*Campo de velocidad que arroja la simulación entre Puerto Berrío y Yondó*



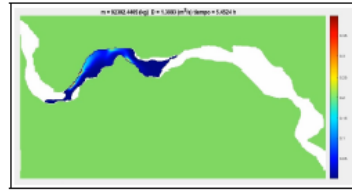
**Fuente:** Maslo (2015).

## Figura 26

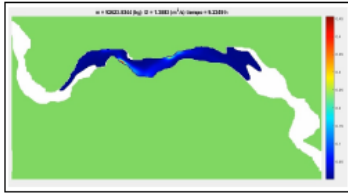
*Resultados para la simulación hecha sobre un tramo del río Magdalena entre Puerto Berrío y Yondó a una velocidad de advección de  $1.38 \text{ m}^2/\text{s}$  (la escala de colores muestra la concentración del contaminante)*



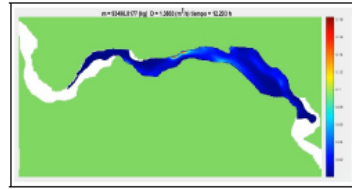
(a) Punto de concentración inicial.



(b) Concentración luego de 5 horas de iniciado el derrame.



(c) Concentración luego de 9 horas de iniciado el derrame.



(d) Concentración luego 12 horas de iniciado el derrame.

**Fuente:** Maslo (2015).

La Figura 26 muestra el desplazamiento de un derrame instantáneo de petróleo y un seguimiento de 12 horas. La escala de colores muestra cómo la concentración del crudo baja en la medida que este se desplaza a lo largo del río transportado por la corriente de agua (Figura 25) contaminando todo el trayecto a lo largo de la ribera; sin embargo, en la Figura 26 se puede ver cómo en algunos puntos a lo largo de la ribera la concentración vuelve a subir debido a que la corriente de agua acumula el contaminante en sitios específicos llegando incluso en algunos puntos a valores cercanos a los 0.35 unidades lattice o lo que es equivalente a  $0.336 \text{ kg/m}^3$ .

Al hacer una observación detallada de las imágenes de la Figura 25, se puede ver que la tendencia general es al aumento en los niveles de concentración en las orillas del río,

esto probablemente como consecuencia de las corrientes de agua. Con toda seguridad se verían comprometidos los ecosistemas a lo largo de la ribera ya que se puede observar que el contaminante no se mantiene en el centro del trayecto, sino que llega a las orillas del río, lo que puede contribuir a que partículas se vean atrapadas por el limo de los bordes, como se contempló en la sección 3 a pesar de que la simulación no contempla dicha retención en la sección 4.

Finalmente, en la Figura 27 se presentan los resultados para la simulación en la sección entre Honda y Cambao cuyo mapa de velocidades se presentó inicialmente en la Figura 20. El escenario representa un derrame hipotético de 18 000 litros de crudo con una densidad de  $960 \text{ kg/m}^3$  con una duración de aproximadamente 30 minutos. En este caso puede verse cómo desde el momento en el que inicia el derrame, el líquido es arrastrado por la corriente bajando sus niveles de concentración y conservándose los niveles más altos en el punto de la fuga, por lo que se ve una característica cola que deja el fluido a medida que es arrastrado río abajo.

## Figura 27

*Simulación hecha sobre un tramo del río Magdalena a la altura de Honda y Cambao con una velocidad de advección de  $1.38 \text{ m}^2/\text{s}$*



(a) 0.002 horas de simulación.



(b) 0.07 horas de simulación.



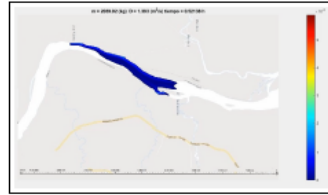
(c) 0.26 horas de simulación.



(d) 0.36 horas de simulación.



(e) 0.47 horas de simulación.

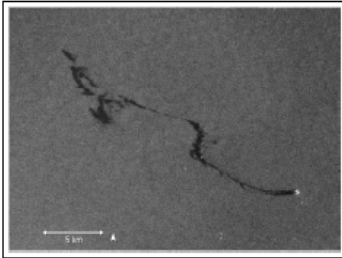


(f) 0.52 horas de simulación.

Fuente: Maslo (2015).

## Figura 28

### Registro fotográfico de derrames en diferentes escenarios



(a) Fuente: Derrame de petróleo en el mediterráneo ([www.tiempo.com](http://www.tiempo.com))



(b) Fuente: Derrame de petróleo por atentado en oleoducto de caño limón se extiende por 107 Kilómetros ([coratierras.org](http://coratierras.org))

**Fuente:** Maslo (2015).

Evidencia de esto se encuentra cuando se comparan las imágenes que arroja la simulación con fotografías tomadas en incidentes previos y que reflejan los procesos anteriormente mencionados. En primer lugar, en la Figura 28 (a) se aprecia cómo el petróleo es arrastrado por las corrientes presentes en el medio de inmersión dejando un claro camino desde su punto de origen y se va dispersando en la medida que avanza, esto a causa de los procesos de difusión mencionados en la sección 3. La figura 28 (b) muestra cómo el contaminante ha inundado el ancho total de la ribera a medida que ha avanzado, de la misma forma como lo reflejan las simulaciones hechas y presentadas a través de las Figuras 22, 26 y 27.

La Figura 28 (a) muestra la mancha que deja el contaminante al ser arrastrado por las corrientes del campo advectivo, mientras la Figura 28 (b) expone la forma como el contaminante inunda el río debido al proceso de difusión.

## RECOMENDACIONES

Este proyecto podría adecuarse para reproducir aún más fenómenos de los expuestos en la sección 3 y con esto lograr una mejor precisión de este. Uno de los procesos más importantes en este tipo de eventos y escenarios es la retención en costas, debido a que es uno de los que más alto impacto ambiental genera; otro proceso significativo es la evaporación del crudo, ya que es de los que más ocasiona pérdidas económicas al no poderse recuperar este material.

Para simular estos dos procesos antes mencionados es importante aplicar el código en un modelo tridimensional, ya que con esto se espera que los efectos se aproximen aún más a la realidad. Dado el alcance del trabajo, no se tomaron en cuenta mediciones del campo de velocidad, la batimetría o la topografía del cauce. Sin embargo, se recomienda en trabajos que puedan derivarse de este tener en cuenta esta información, con esto se hace referencia específicamente a los datos de corrientes de los trayectos de río para usar y datos de batimetría del cauce. Esta información resulta importante ya que, dependiendo del tipo de petróleo por simular, su tendencia a hundirse hace inevitable la interacción con el lecho del río o su interacción con las corrientes de agua más profundas.

Por otra parte, al modelo como tal se le pueden instalar otro tipo de aproximaciones diferentes al BGK que de acuerdo con la bibliografía consultada han mostrado buenos resultados en otro tipo de simulaciones (Maslo *et al.*, 2014; Flórez *et al.*, 2010; Banda *et al.*, 2009; Perumal y Dass, 2015). Además, hay que tener en cuenta que la



implementación al caso de un derrame de petróleo no es más que un mero ejemplo de la vasta extensión de aplicaciones que tienen este tipo de modelos, por lo que cabe la invitación a su uso futuro para la modelación de otros fenómenos físicos que involucren fluidos o más en general, que comprendan leyes de conservación de masa y momento.

## CONCLUSIONES

En este documento se modeló un derrame de petróleo usando el método de Lattice Boltzmann. En primera instancia se pone a prueba la implementación del modelo replicando las simulaciones hechas por Krüger en su libro (Krüger *et al.*, 2017). Para esto se realizaron tres experimentos computacionales con el propósito no solamente de probar la eficacia del método, sino también para probar el código realizado.

En el primero de los casos, un punto de concentración gaussiana se somete en la simulación a un proceso de difusión con las mismas características allí planteadas logrando con esto obtener resultados similares para los niveles de concentración a los presentados en la referencia. Al hacer el respectivo análisis del error en la medida en que el programa itera, se encuentra que el modelo requiere de cierto número de iteraciones para lograr su convergencia pasando inicialmente de un error cercano al 10 % al iniciar la simulación para llegar a un error por debajo del 5 % luego de 200 iteraciones, según las mediciones realizadas a través de la norma L2.

Posterior a esto, un punto de concentración gaussiana es sometido en la simulación a un proceso de advección para verificar luego los niveles de concentración, en ese caso el análisis del error L2 arroja diferencias inferiores al 0.5 %. El tercer experimento es una prueba de validación representativa y referente en los modelos de Lattice Boltzmann y corresponde a un flujo de Poiseuille,

para el cual los resultados del error arrojan diferencias que rondan el 5 %.

A continuación, se procedió al proceso de validación para el evento de un derrame de petróleo a través de una descripción cualitativa de la simulación de un derrame en el caso de un río. Para esto se usó el método de Lattice Boltzmann para generar el campo vectorial de un segmento del río Sava (Eslovenia) y con este hacer la simulación con el fin de comparar con los gráficos obtenidos por Maslo (2015).

Cabe mencionar que en el modelo aquí propuesto no fueron considerados datos de evaporación, retención en costa y otros procesos bioquímicos que se presentan en estos eventos, se consideran exclusivamente datos de difusión y advección en un medio. Sin embargo, los resultados reflejan la eficacia del método no solo en la adecuación del campo vectorial, sino a la hora de modelar derrames de petróleo, al lograr replicar tanto la forma de la mancha a lo largo de la simulación como los niveles de concentración con lo que la pertinencia del método queda verificada. En estos, tanto la forma de la mancha del crudo como los niveles de concentración de este en los diferentes lapsos de tiempo resultan comparables.

Para finalizar, se realizan dos simulaciones en dos trayectos distintos del río Magdalena entre Honda-Cambao y Puerto Berrío-Yondó. Los dos escenarios responden a características distintas. Por un lado, un derrame instantáneo de crudo y, por otro, un derrame continuo que se prolonga durante 30 minutos.

Las simulaciones muestran que los niveles de concentración del crudo tan pronto empieza a derramarse bajan en la medida en que este es arrastrado por el agua, llegando a concentraciones por debajo de 0,05 unidades

lattice en la mayor parte del trayecto (lo que es equivalente a  $0.048 \text{ kg/m}^3$  con la densidad propuesta) y solamente alcanza niveles de concentración más altos en los puntos a lo largo de la orilla donde la corriente de agua tiende a acumular el contaminante y en el punto de fuga en los casos de derrames que se prolongan por cierto tiempo.

Esta precisamente se convierte en una de las ventajas más grandes del modelo, y es que no solamente es capaz de mostrar los puntos donde las concentraciones son más altas, sino que también muestra los puntos en los que los niveles de concentración son muy bajos.

## REFERENCIAS

- Avellaneda, C. (2018). Petróleo e impacto ambiental en Colombia. *Revista de la Universidad Nacional (1944-1992)*, 6(24). <https://revistas.unal.edu.co/index.php/revistaun/article/view/12208>
- Banda, M., Seaïd, M. y Thömmes, G. (2009). Lattice Boltzmann simulation of dispersion in two-dimensional tidal flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(6), 878-900. [https://www.researchgate.net/publication/227531532\\_Lattice\\_Boltzmann\\_simulation\\_of\\_dispersion\\_in\\_two-dimensional\\_tidal\\_flows](https://www.researchgate.net/publication/227531532_Lattice_Boltzmann_simulation_of_dispersion_in_two-dimensional_tidal_flows)
- Bhatnagar, P., Gross, E. y Krook, M. (1954). A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Physical Review*, 94(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.94.511>
- Estrada, A. y Antuña, J. (2004). Los accidentes por derrames de hidrocarburos en el mar. Historia de la modelación matemática de sus procesos físicos. *Revista Cubana de Meteorología*, 11(2). <http://rcm.insmet.cu/index.php/rcm/article/view/324>
- Fingas, M. (2016). *Oil spill science and technology*. Gulf Professional Publishing.
- Flórez, E., Cuesta, I. y Salueña, C. (2008). Flujo de Poiseuille y la cavidad con pared móvil calculado usando el método de la ecuación de Lattice Boltzmann. *Ingeniería y Desarrollo*, (24). <http://rcientificas.uninorte.edu.co/index.php/ingenieria/article/viewArticle/1750/4475>
- Flórez, J., Camacho, L. y Muñoz, J. (2010). Transporte de sustancias en aguas someras por medio del método Lattice Boltzmann. *Revista Colombiana de Física*, 42(2), 123-131. <http://revcolfis.org/ojs/index.php/rcf/article/>

viewArticle/420214.html

- Gudynas, E. (2018). *Los nudos del petróleo en Colombia. Ambiente y ciencia, política y democracia*. Palabras al margen. <http://palabrasalmargen.com/edicion-122/los-nudos-del-petroleo-en-colombia-ambiente-y-ciencia-politica-y-democracia/>
- Guo, Z. y Shu, C. (2013). *Lattice Boltzmann method and its applications in engineering*. World Scientific. <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/8806>
- Jimoh, A. y Alhassan, M. (2006). Modelling and simulation of crude oil dispersion. *Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies*, 5(8), 17-28. [https://www.researchgate.net/publication/26449113\\_Modelling\\_and\\_Simulation\\_of\\_Crude\\_Oil\\_Dispersion](https://www.researchgate.net/publication/26449113_Modelling_and_Simulation_of_Crude_Oil_Dispersion)
- Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G. y Viggien, E. M. (2017). The Lattice Boltzmann method. *Springer International Publishing*, 10(3), 4-15.
- Li, Y., Shock, R., Zhang, R. y Chen, H. (2004). Numerical study of flow past an impulsively started cylinder by the Lattice-Boltzmann method. *Journal of Fluid Mechanics*, (519), 273-300. [https://www.researchgate.net/publication/231825337\\_Numerical\\_study\\_of\\_flow\\_past\\_an\\_impulsively\\_started\\_cylinder\\_by\\_the\\_lattice-Boltzmann\\_method](https://www.researchgate.net/publication/231825337_Numerical_study_of_flow_past_an_impulsively_started_cylinder_by_the_lattice-Boltzmann_method)
- Maslo, A. (2015). *Numerical modeling of oil spills in rivers using Lattice Boltzmann method*. Univerza v Ljubljani.
- Maslo, A., Panjan, J. y Žagar, D. (2014). Large-scale oil spill simulation using the Lattice Boltzmann method, validation on the Lebanon oil spill case. *Marine Pollution Bulletin*, 84(1-2), 225-235. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/24855976/>
- Mohamad, A. (2011). *Lattice Boltzmann Method*. Springer-Verlag.
- Mora, X. (2017). Las ecuaciones de Navier-Stokes. ¿Impredictibilidad incluso sin mariposas? *Mètode: Revista de Difusión de la Investigación*, (93), 66-73. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6004706>
- OCHA. (2015). *Derrame de crudo en ríos Mira y Caunapi Tumaco*. Equipo Humanitario Colombia. <https://www.humanitarianresponse.info/>

- sites/www.humanitarianresponse.info/files/assessments/151029\_actualizacion\_informe\_final\_atentados\_rios\_caunapi\_y\_mira.pdf
- Otero-Díaz, L., Pierini, J., Chambel-Leitao, P., Malhadas, M., Ribeiro, J., Chambel-Leitao, J. y Restrepo, J. (2014). Three-dimensional oil spill transport and dispersion at sea by an event of blowout. *Dyna*, 81(186), 42-50. <https://www.redalyc.org/pdf/496/49631663005.pdf>
- Perumal, D. y Dass, A. (2015). A review on the development of Lattice Boltzmann computation of macro fluid flows and heat transfer. *Alexandria Engineering Journal*, 54(4), 955-971. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1110016815001362>
- Salamanca, K. (2018, 4 de enero). *El triste panorama que dejó el derrame de petróleo en el pozo La Lizama*. <https://www.semana.com/nacion/articulo/derrame-de-petroleo-pozo-la-lizama-ecopetrol/562150/>
- Scopus. (2020). *Scopus preview*. [www.scopus.com](http://www.scopus.com)
- Serway, R. y Jewett, J. (2005). *Física para ciencias e ingeniería*. Cengage Learning. <http://www2.fisica.unlp.edu.ar/materias/fisgenI/T/Libros/Serway-7Ed.pdf>
- Sukop, M. y Thorne, D. (2006). *Lattice Boltzmann modeling*. Springer-Verlag Berlín Heidelberg.
- Trento, A. y Álvarez, A. (2013). Simulación del derrame de petróleo en un escenario fluvial. *Mecánica Computacional*, 32(33), 2825-2835.
- Velasco, A. (2017). *Development of a Lattice-Boltzmann model in curvilinear coordinates for the acoustic simulation of the Cochlea* (Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia). <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/64089>
- Velásquez, J. (2017). Contaminación de suelos y aguas por hidrocarburos en Colombia. Análisis de la fitotorremediación como estrategia biotecnológica de recuperación. *Revista de Investigación Agraria y Ambiental*, 8(1), 151-167. <https://hemeroteca.unad.edu.co/index.php/riaa/article/view/1846>
- Yapa, P., Shen, H. y Angamma, K. (1994). Modeling oil spills in a river-lake systems. *Journal of Marine*

*Systems*, 4(6), 453-471. [https://www.researchgate.net/publication/273340112\\_MODELING\\_OIL\\_SPILLS\\_IN\\_RIVER-LAKE\\_SYSTEMS](https://www.researchgate.net/publication/273340112_MODELING_OIL_SPILLS_IN_RIVER-LAKE_SYSTEMS)

Zapata, C., Calle, E. y Parra, L. (2002). Simulación del comportamiento fisicoquímico de derrames de hidrocarburos en ríos. *Avances en Recursos Hidráulicos*, (9), 7-18. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/arh/article/view/92769>



# Modelado del efecto Doppler

# Capítulo



Anyi Bibiana Moreno Ibagué  
Alejandro Duitama Leal

---

Universidad de Cundinamarca, Facultad de Educación  
Licenciatura en Matemáticas  
Fusagasugá  
2020

# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>181</b>
<hr/>	
<b>1. Marco referencial</b>	<b>183</b>
1.1 Marco de antecedentes	
<hr/>	
<b>2. Marco teórico</b>	<b>190</b>
2.1 Efecto Doppler	
2.2 Dispersión	
2.3 Ecuación de onda	
2.4 Ecuación de onda para medios dispersivos	
2.5 Diferencias finitas	
2.6 Fronteras PML	
<hr/>	
<b>3. Metodología</b>	<b>204</b>
3.1 Discretización ecuación de onda	
<hr/>	
<b>4. Resultados</b>	<b>207</b>
<hr/>	
<b>Conclusiones</b>	<b>234</b>
<hr/>	
<b>Referencias</b>	<b>237</b>

## RESUMEN

En el presente estudio se realizó el modelo numérico del efecto Doppler, donde se analizó el cambio de la frecuencia percibida según el movimiento relativo entre fuente y observador. Se utiliza el método de diferencias finitas para discretizar la ecuación de onda en dos dimensiones, y en el modelamiento se acoplaron fronteras no reflectivas empleando el método Perfectly Matched Layer (PML) con el fin de evitar efectos de borde en la simulación. El código fue realizado en el lenguaje de programación C++.

Para la modelación en medios dispersivos se empleó la ecuación de onda adicionando dos parámetros, uno de atenuación por difusión y otro de viscosidad. Se analizó el efecto Doppler en estos medios, enfocándose principalmente en el cambio de la frecuencia percibido según cada simulación.

Como resultado se evidenció que el método numérico empleado para la solución de la ecuación de onda permite modelar de manera efectiva el efecto Doppler, corroborando los postulados teóricos al respecto y verificando la fórmula analítica obtenida para dicho efecto.

En un medio dispersivo, particularmente en el aire, se presenta una variación baja en la frecuencia, en comparación con un medio no dispersivo; sin embargo, al cambiar el parámetro de atenuación por difusión y la velocidad se presenta un cambio en la amplitud de la onda

según sea el caso. Cuando la fuente de sonido se aleja de un observador en reposo, el espectro de frecuencias manifiesta un corrimiento hacia bajas frecuencias a medida que aumenta la velocidad. En los demás casos cuando el observador está cerca de la fuente existe un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a la frecuencia característica. Finalmente, en un medio dispersivo se manifiesta una variación en la frecuencia, pero los casos del efecto Doppler mantienen un mismo comportamiento.

## INTRODUCCIÓN

El estudio de las ondas acústicas tiene gran importancia dadas sus aplicaciones en diferentes campos. El sonido forma parte de la acústica, es la propagación de una perturbación en el medio donde hay transporte de energía sin una transferencia de materia. En el sonido se presentan todos los fenómenos ondulatorios: reflexión, refracción, difracción e interferencia; además, se produce el denominado efecto Doppler. Este efecto hace referencia al cambio de frecuencia aparente que se percibe según el movimiento relativo entre fuente y observador, estableciendo que la frecuencia percibida es mayor cuando la fuente o el observador se acercan y menor cuando se alejan entre sí.

Por otro lado, el comportamiento de una onda depende del medio de propagación, en particular, en un medio dispersivo, entendiéndose como aquel donde las ondas de diferentes frecuencias viajan a distintas velocidades produciendo un cambio en el pulso de la onda, esto debido a la pérdida de energía que surge por la disminución en la amplitud. El estudio del efecto Doppler en medios dispersivos permitiría analizar el comportamiento frecuencial en medios que presentan disipación de la energía y establecer características importantes de este para lograr una mejor comprensión del espectro sonoro. En consecuencia, dada la aplicabilidad de dicho efecto en la industria, la medicina, la ingeniería, la elaboración de radares, etc., se podría estudiar alguna aplicación del efecto Doppler en medios con pérdida de energía y considerar las incidencias del medio en el cambio frecuencial detectado.

Debido a la escasa información sobre el tema, se manifiesta el interés en la presente investigación.

Para llevar a cabo la modelación del efecto Doppler en medios dispersivos, se emplea el lenguaje de programación de C++. En primera instancia se realiza la simulación del efecto Doppler en condiciones normales, tomando el aire como medio de propagación. En el programa es utilizada la discretización de la ecuación de onda por el método de diferencias finitas. También se emplea el método PML (Perfectly Matched Layer) con el fin de obtener una frontera abierta y evitar la reflexión del campo de onda.

En segundo lugar, la incorporación del carácter dispersivo en el medio se hace mediante la adición de dos nuevos términos a la ecuación de onda, el coeficiente de atenuación por difusión y coeficiente de atenuación por viscosidad, y se realiza la discretización de esta nueva ecuación mediante el método de diferencias finitas centradas para su posterior simulación y adaptación al efecto Doppler.

Con los datos obtenidos se analizan los resultados en el dominio del tiempo, luego se pasa al dominio frecuencial con la transformada discreta de Fourier, esto con el fin de analizar el espectro de la señal que se simuló anteriormente y estudiar los casos del efecto Doppler en un medio dispersivo. Se emplean diferentes valores para el coeficiente de atenuación por difusión y el valor manejado para el coeficiente de atenuación por viscosidad se deja como el habitual.

Con los resultados obtenidos se analiza la dependencia de la frecuencia con las propiedades del medio y se realiza la comparación entre la variación de la frecuencia en un medio dispersivo y uno no dispersivo, y así lograr una mejor comprensión del comportamiento frecuencial en dichos medios.

# 1. MARCO REFERENCIAL

## 1.1 Marco de antecedentes

En la presente sección se muestran algunos trabajos y antecedentes del efecto Doppler, refiriéndose desde aspectos teórico-conceptuales hasta investigativos, sobre el estudio del cambio de frecuencia en dicho efecto. En la Tabla 1 se hace mención de algunos trabajos que tratan sobre el tema.

**Tabla 1**

*Antecedentes sobre el efecto Doppler*

<b>Año</b>	<b>Autor</b>	<b>Artículo</b>
1842	Doppler, C.	<i>On the colored light of double stars and certain other stars of the heavens</i>
1985	U s a g a w a Tsuyoshi	<i>Analysis of a moving sound source by the cross-spectral technique</i>
1992	Censor, D.	<i>Real and complex Doppler effects in lossy media</i>

1993	Sorokin, Y. M.	<i>Doppler effect and aberrational effects in dispersive medium</i>
2015	Zhang, Y., Zhang, T., Ouyang, H. y Li, T.	<i>SPH simulation of acoustic waves: effects of frequency, sound pressure, and particle</i>

**Fuente:** elaboración propia.

### 1.1.1 Estado del arte

El efecto Doppler debe su nombre al físico austríaco Christian Doppler, quien describió por primera vez dicho fenómeno en 1842 y realizó el primer acercamiento teórico al efecto Doppler en su artículo *On the colored light of double stars and certain other stars of the heavens*, presentado en un congreso en Praga, en mayo de ese mismo año. En dicho trabajo se emplea la hipótesis del efecto Doppler, la cual postula que el cambio de frecuencia se produce cuando la fuente o el observador se mueven uno respecto al otro, lo que más adelante se conoce como efecto Doppler.

En dicho congreso, Doppler (1842) pretendía explicar los colores de las estrellas binarias y otros astros. Estableció que el color es una manifestación de la frecuencia de una onda de luz, es decir, que el aumento o la disminución de la luz estelar depende del movimiento relativo de la estrella. En este escrito se plantean además las ecuaciones que Doppler utilizó para determinar la



frecuencia cuando el observador se acerca a una fuente estacionaria y cuando la fuente se mueve hacia el observador estacionario.

En 1845 el científico neerlandés Christoph Hendrik Diederik Buys Ballot demostró experimentalmente el principio propuesto por Doppler, en este caso para ondas sonoras. Este experimento se realizó durante el trayecto en tren de Utrech a Ámsterdam. Ballot confirmó que el tono de un sonido emitido por una fuente que se aproxima al observador es más agudo que si la fuente se aleja. Utilizó una locomotora para realizar sus observaciones. Colocó un grupo de músicos en un ferrocarril y les indicó que tocaran la misma nota musical mientras que otro grupo de músicos, en la estación del tren, registraba la nota musical que oían mientras el tren se acercaba y alejaba de ellos sucesivamente. En particular el mejor ejemplo que define el efecto Doppler es el silbato de la locomotora que se acercaba y se alejaba de un cuerpo inmóvil.

En 1848 el mismo fenómeno fue probado para ondas electromagnéticas por el francés Hippolyte Fizeau, ya que trabajaba con fenómenos de interferencia de la luz y de transmisión de calor. Él determinó que los cuerpos celestes que se acercan hacia la Tierra son vistos de color azul y los que se alejan se ven de color rojo. En términos generales significa que las ondas de luz, cuando se aproximan hacia el observador se dirigen hacia el extremo ultravioleta del espectro y cuando se alejan, se aproximan hacia el extremo infrarrojo del espectro, es decir, que sus ondas, al igual que las sonoras, se vuelven más altas cuando se aproximan y más bajas cuando se distancian.

El efecto Doppler tendría años después relevancia en la teoría de la relatividad de Einstein, con lo que se conoce como el efecto Doppler relativista. Una de sus principales aplicaciones se dio a mediados de 1930 con la invención del radar, dado el surgimiento de la Segunda Guerra Mundial.

Por otra parte, el estudio de los medios dispersivos y por ende de las relaciones de dispersión, tiene su origen en el estudio de los prismas y la luz, fenómeno estudiado en el siglo XVIII por el famoso físico Isaac Newton, pionero de la rama de la física destinada al estudio de la luz, la óptica. Newton planteó la descomposición de la luz blanca (luz derivada de una estrella) en los diferentes colores que la constituyen. La dispersión de la luz se manifiesta cuando un rayo de luz blanca atraviesa un material transparente y se refracta, mostrando así los diferentes colores que la componen.

A continuación, se presentan algunos trabajos realizados sobre el efecto Doppler o análisis de la frecuencia en medios dispersivos, aunque cabe resaltar que los estudios desarrollados se hacen en ondas electromagnéticas. Son escasas las investigaciones realizadas sobre el efecto Doppler para ondas sonoras en medios dispersivos.

En 1976 se demuestra una correspondencia uno a uno entre las mediciones de frecuencia en diferentes marcos de referencia inercial. Al aplicar esto a ondas planas en medios homogéneos, isótropos y dispersivos, particularmente en un plasma, se plantea la diferencia entre el efecto Doppler convencional y el efecto Doppler complejo (este último se aplica en medios dispersivos) con el desarrollo de las ecuaciones del efecto Doppler para ondas electromagnéticas. El efecto Doppler se aplica generalmente a la diferencia observada en la frecuencia entre la onda detectada por dos observadores en movimiento relativo.

El efecto Doppler complejo se le aplica habitualmente a la presencia de varios componentes espectrales, es decir, la descomposición espectral de la frecuencia que percibe un observador en reposo con respecto a una fuente que emite una señal, la cual se encuentra en movimiento relativo; dicho fenómeno se presenta en los medios de

carácter dispersivo (Berger, 1976).

En 1992 se realizó un estudio titulado *Real and complex Doppler effects in lossy media*, en el cual se investiga el efecto Doppler en medios que presentan pérdida de energía. Se demuestra que la propagación en medios con pérdida de energía, implica el efecto Doppler complejo, es decir, la atenuación espacial del medio se transforma en parámetros temporales de la señal recibida, produciendo cambios en la frecuencia compleja para valores de frecuencia real, esto con el análisis de la dispersión de las ondas de objetos en movimiento. Además, se hace un análisis espectral para la señal en el dominio de tiempo, de lo cual se concluye que dicho contenido es igual para los medios sin pérdida y con pérdida de energía.

Se establece que la transformación dada entre espacio y tiempo, facilita la evaluación de la atenuación de la señal recibida. Para apoyar lo anteriormente mencionado realizan una simulación numérica al respecto, determinando el cambio de frecuencia en la señal con la transformada de Fourier (Censor, 1992).

En 1993, Sorokin en *Doppler effect and aberrational effects in dispersive medium*, comentó que el efecto Doppler se aplica a sistemas de cualquier naturaleza física y representa un cambio en la frecuencia de algún proceso periódico. Al mismo tiempo, el cambio en la orientación del rayo o el vector de onda (efecto aberración relativista) está estrechamente relacionado con este efecto que se ha asociado por lo general con ondas ópticas en el vacío. Este efecto se presenta sobre todo en medios dispersivos, donde ambos efectos están tan relacionados que solo se pueden entender mediante el análisis conjunto.

Este último trabajo, aunque no tiene relación directa con el tema, es interesante por los resultados obtenidos, por ende, su mención. En el 2015, se llevó a cabo una investigación en la cual se analizan los problemas acústicos

en sistemas multifásicos o con límites deformables, y se resuelven ecuaciones acústicas con la teoría de SPH. Con esta proponen una simulación para la propagación de ondas acústicas unidimensionales, teniendo en cuenta aspectos como los efectos de la frecuencia, la presión del sonido y el esparcimiento de las partículas. Dicho trabajo se titula *SPH simulation of acoustic waves: effects of frequency, sound pressure, and particle*.

En este trabajo hacen el estudio en un rango limitado de frecuencias, en el cual obtienen un aumento no lineal y que además el aumento de la frecuencia hace mayor el error de la simulación, mientras que los niveles de la presión no inciden directamente sobre el modelo (Zhang *et al.*, 2015).

En 1985 se realiza una investigación sobre el movimiento de una fuente de sonido utilizando una técnica espectral, y se propone reducir el cambio de frecuencia de la señal observada. Para esto se asume la fuente de sonido como un punto fijo y las demás fuentes se asumen en movimiento, calculando la velocidad relativa respecto a la fuente específica del sonido. El método funciona como un detector selectivo de una fuente específica. Según los resultados obtenidos el método es efectivo, compensando las consecuencias del efecto Doppler con el retraso de propagación.

Cuando se pretende estudiar el espectro del sonido o de una señal, es relevante considerar cuando la señal no se puede separar fácilmente de los ruidos que la rodean, además se debe tener en cuenta que el espectro observado cambia en el tiempo debido a la presencia del efecto Doppler cuando una fuente de sonido está en movimiento. Para dar solución a esto, se plantea hacer una compensación del efecto Doppler al lograr una reducción del cambio de frecuencia mediante una compensación en el retardo de la propagación. Para analizar el espectro de frecuencias utilizan la transformada de Fourier continua.

Cuando la propagación se hace en un medio no dispersivo, la señal observada puede expresarse como una onda proporcional a la señal del sonido.

Digitalizan una serie de datos en un intervalo  $\Delta t$  con el objetivo de construir el espectro tanto de la señal específica como de las señales de alrededor, aplican la transformada discreta de Fourier, además de una técnica de interpolación usando la función Spline de tercer orden. Los ejes del tiempo se transfieren mediante la transformada discreta de Fourier (DFT) para reducir el cambio de frecuencia provocado por el efecto Doppler y así obtener el espectro de la señal.

Obtienen resultados experimentales para una señal de una fuente en movimiento, encontrando una onda sinusoidal de  $500 \text{ Hz}$  y una velocidad de  $8,3 \text{ m/s}$ , y analizan estas condiciones para el espectro con y sin compensación del efecto Doppler. Se mostró que en el caso de no compensar el efecto Doppler, el pico de frecuencias de  $500 \text{ Hz}$  está  $3 \text{ dB}$  más bajo que el pico de  $400 \text{ Hz}$ ; mientras que en el caso de la compensación del efecto Doppler mediante la técnica espectral, el pico de  $500 \text{ Hz}$  está  $10 \text{ dB}$  por arriba del pico de  $400 \text{ Hz}$ , es decir, que para la señal de una fuente en movimiento al reducir el cambio de frecuencia producido por el efecto Doppler, esta presenta una variación de intensidad notable en relación con la frecuencia principal respecto a otros picos de frecuencia (Usagawa, 1985).

## 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los conceptos teóricos necesarios para comprender el desarrollo del proyecto, los cuales permiten argumentar de manera sólida lo posteriormente expuesto. Se inicia con el concepto del efecto Doppler y la mención de la fórmula de generalización para los diferentes casos que se puedan presentar con el movimiento relativo entre fuente y observador.

Luego se define lo que es un medio dispersivo, y posteriormente se presenta la ecuación de onda para medios no dispersivos y para medios dispersivos. Para la primera se realizó la deducción de la ecuación de onda en una cuerda vibratoria. Después se explicó el método de diferencias finitas y de las fórmulas utilizadas para la aproximación de las derivadas. En cuanto a la deducción de las fórmulas para la aproximación de derivadas, este método se encuentra en el Anexo A. Enseguida se mencionan aspectos importantes del método de fronteras PML y, por último, se hace alusión a la transformada discreta de Fourier.

### 2.1 Efecto Doppler

El efecto Doppler es un fenómeno que explica la relación entre la frecuencia transmitida y la frecuencia observada cuando fuente y observador se mueven uno

respecto al otro. En el caso de que un observador esté delante de una fuente en movimiento, percibirá una frecuencia mayor a la realmente emitida, mientras que un observador ubicado detrás de la fuente distinguirá una mayor distancia entre los frentes de onda y por ende una menor frecuencia (Serway, 2008).

Esto se puede evidenciar en diferentes escenarios de la vida diaria, uno de estos al escuchar la sirena de una ambulancia o un automóvil: el sonido va cambiando conforme se acerca hacia nosotros, se escucha con un tono más fuerte cuando se aproxima y un tono más bajo cuando se aleja. El efecto Doppler no solo se aplica a ondas sonoras, sino a cualquier tipo de onda, teniendo así un gran campo de aplicación en diferentes disciplinas como la medicina, la meteorología y la astronomía, entre otras.

Los casos que se presentan en el efecto Doppler con relación al movimiento relativo entre fuente y observador son:

- Caso 1: fuente en reposo y observador se aleja de la fuente.
- Caso 2: fuente en reposo y observador se mueve hacia la fuente.
- Caso 3: observador estacionario y la fuente se aleja del observador.
- Caso 4: observador estacionario y la fuente se acerca al observador.
- Caso 5: fuente y observador se acercan entre sí.
- Caso 6: fuente y observador se alejan entre sí.

La ecuación general para el efecto Doppler viene dada por la siguiente ecuación, la cual establece todos los casos que se pueden presentar en el movimiento relativo entre fuente y observador:

$$f_o = \left( \frac{\vec{v} \pm \vec{v}_o}{\vec{v} \mp \vec{v}_s} \right) f_s \quad (2.1)$$

En la cual:

- $f_o$  es la frecuencia observada.
- $f_s$  es la frecuencia de la fuente
- $\vec{v}$  es la velocidad del medio.
- $\vec{v}_o$  es la velocidad del observador.
- $\vec{v}_s$  es la velocidad de la fuente.

Los signos superiores hacen referencia a cuando la fuente y el observador se acercan uno con respecto al otro, mientras que los signos inferiores implican que se alejan. La frecuencia es mayor conforme el observador y la fuente se acercan entre sí y más baja mientras se alejan (Giancoli, 2008).

## 2.2 Dispersión

Un medio dispersivo es un medio en el que las ondas de diferentes frecuencias viajan a diferentes velocidades (Samiullah, 2015). Si la velocidad de onda depende exclusivamente de las propiedades físicas del medio, en este caso la velocidad permanece constante, lo cual implica que todas las frecuencias viajan a igual velocidad; por lo tanto, las ondas o pulsos de onda mantendrán siempre la misma forma. Lo mencionado anteriormente corresponde a medios no dispersivos.



En el caso contrario, en los medios dispersivos la velocidad de la onda depende de la frecuencia de la onda. En este sentido, con frecuencias más altas las ondas viajan a una mayor velocidad que con frecuencias más bajas. Como resultado, el pulso de onda se extiende y cambia de forma a medida que viaja (Russell, 2011). Un medio dispersivo también se puede definir como “un medio en el cual la velocidad de fase de una onda está en función de su frecuencia” (Radmanesh, 2007).

En un medio dispersivo la velocidad de propagación de la onda depende exclusivamente de la frecuencia, entonces si se tiene un paquete de ondas con diferentes tonos o frecuencias fundamentales, cada componente frecuencial viaja a una velocidad diferente, dando como resultado que el paquete de onda se disperse, es decir, cada vez estará menos concentrado en el espacio y se extenderá; esto viene dado por la relación de dispersión que se presenta con respecto a la frecuencia (Cuadrado, 2013).

En un medio no dispersivo la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase, mientras que en un medio dispersivo estas no son iguales (Capra, 2014); es decir, que si un paquete de ondas se combinan para dar lugar a una perturbación compuesta, esta viaja a una velocidad distinta en relación con la velocidad a la que viajan las ondas que la constituyen (Heisenberg, 2008).

Una relación de dispersión es aquella en la cual se describe el efecto de la dispersión en el medio. Dicha relación se puede obtener teniendo en cuenta la longitud de onda y su frecuencia, número de una onda y su frecuencia. La relación de dispersión más general es la de Kramers-Knoring, que establece una dependencia entre la frecuencia de propagación y la atenuación de la onda, es decir, la dependencia entre la frecuencia y la pérdida gradual de la intensidad del flujo, en este caso la intensidad acústica, la energía que fluye en el medio.

## 2.3 Ecuación de onda

Es una ecuación diferencial lineal de segundo orden hiperbólica, que describe la propagación de gran variedad de ondas. Jean Le Rond d'Alembert (1746) fue el primero en analizar el problema de propagación en una cuerda vibrante, cuya deducción se puede ver en el Anexo B. La ecuación de una onda unidimensional está dada por:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

En la cual  $\Phi(x, t)$  es la función de onda, función que describe el campo de onda de cualquier partícula en un instante cualquiera, es decir, el desplazamiento de la onda;  $v$  es la velocidad de propagación,  $t$  es el tiempo y  $x$  hace referencia a la propagación unidimensional de la onda. El primer término de la Ecuación 2.2 es la segunda derivada parcial de  $\Phi(x, t)$  con respecto al tiempo, mientras que el término después de la igualdad es el producto de la velocidad de propagación con la segunda derivada espacial de  $\Phi(x, t)$  respecto a  $x$ . A la derivada espacial en dos o más dimensiones se le conoce como operador de Laplace o laplaciano.

## 2.4 Ecuación de onda para medios dispersivos

Un medio dispersivo es aquel que presenta pérdida de energía, debido a la diferencia entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo del paquete de ondas, ya que la velocidad depende directamente de la frecuencia. Para la

propagación de una onda en este tipo de medios, se puede utilizar la siguiente ecuación (Korneev *et al.*, 2004):

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2} + \chi \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 \partial \Phi(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - v^2 \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

En la cual  $\Phi(x,t)$  describe el desplazamiento de la onda,  $t$  es el tiempo,  $v$  es la velocidad de propagación,  $\chi$  es el coeficiente de atenuación por difusión y  $\gamma$  es el coeficiente de atenuación por viscosidad. El primer término de la Ecuación 2.3 hace referencia a la segunda derivada de la función  $\Phi(x,t)$  con respecto al tiempo; el segundo es el producto entre el coeficiente de atenuación por difusión y la primer derivada de  $\Phi(x,t)$  con respecto a  $t$ ; el tercer término es el producto de entre el coeficiente de atenuación por viscosidad y la derivada cruzada de la segunda derivada de  $\Phi(x,t)$  respecto a  $x$  con la primera derivada temporal de  $\Phi(x,t)$  y el último término es el producto entre la velocidad de propagación con la segunda derivada espacial de  $\Phi(x,t)$  respecto a  $x$ .

## 2.5 Diferencias finitas

El método de diferencias finitas (MDF) es un método numérico que permite la resolución de ecuaciones diferenciales parciales definidas en un número finito de puntos, y es apropiado para el tratamiento de problemas en una, dos y tres dimensiones. Con este método se realiza una aproximación de las derivadas parciales mediante un número finito de expresiones algebraicas en términos

de la variable dependiente de los puntos seleccionados; estos puntos se convierten en incógnitas del sistema de ecuaciones (Carrillo, 2018).

Para realizar los cálculos numéricos en diferencias finitas, se suele aproximar  $f(x)$  mediante un polinomio alrededor de  $x = x_0$ ; dicha aproximación se puede realizar usando la serie de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!} (\Delta x)^n \quad (2.4)$$

En la cual  $\Delta x = (x - a)$

La serie de Taylor fue estudiada desde el filósofo griego Zenón de Elea, quién planteó el problema de sumar una serie infinita hasta obtener un resultado finito, convirtiéndose luego en una de las paradojas de Zenón; también Aristóteles, Demócrito y Arquímedes analizaron el problema. En 1715 el británico Brook Taylor realizó publicaciones formales al respecto, derivando de este el nombre de la serie. La serie de Taylor es una serie funcional, en la cual se puede aproximar la solución de una función en términos de sus derivadas alrededor de un punto particular, considerando la función  $f(x)$  infinitamente diferenciable.

La expansión de la serie de Taylor de una función  $f(x)$  alrededor de un punto  $x_i$  está dada por:

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)\Delta x}{1!} + \frac{f''(x_i)\Delta x^2}{2!} + \frac{f'''(x_i)\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (2.5)$$

Existen diferentes formas para determinar la aproximación de las derivadas de una función empleando diferencias finitas. Dichas aproximaciones pueden variar según la cantidad de puntos que se tomen de la malla y el truncamiento que se realice. Se pueden usar diferencias progresivas si se expanden alrededor de  $x = x_i + \Delta x$ , regresivas si se considera  $x = x_i - \Delta x$  y centradas si se utiliza una expansión tanto en  $x = x_i + \Delta x$  como en  $x = x_i - \Delta x$ . La obtención de las aproximaciones para la primera y segunda derivada tanto en una como en dos dimensiones, se pueden ver en el Anexo A.

La aproximación de la primera derivada de una función  $f(x)$  utilizando la expansión de la serie de Taylor da como resultado:

- Diferencias progresivas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (2.6)$$

- Diferencias regresivas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.7)$$

- Diferencias centradas

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.8)$$

Para la aproximación de la segunda derivada en una dimensión, se emplean diferencias regresivas y progresivas, obteniendo:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - 2f(x_i) + f(x_i - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.9)$$

Al considerar una función  $f(x, y)$  infinitamente derivable, la aproximación de la primer derivada respecto a  $x$  e  $y$  está dada por:

- Diferencias progresivas

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i, y_j)}{\Delta x} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j)}{\Delta y} \quad (2.11)$$

- Diferencias regresiva

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y} \quad (2.13)$$

- Diferencias centradas

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - f(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - f(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} \quad (2.15)$$

Para la aproximación para la segunda derivada de una función  $f(x, y)$ , se emplean diferencias centradas respecto a cada variable, dejando la otra constante.

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{f(x_i, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (2.17)$$

Ahora, en el caso de tener una derivada cruzada, se emplea cualquier tipo de diferencias para aproximar la expresión interna y luego la externa; por ejemplo, la derivada cruzada de primer orden quedaría:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \\ &\quad - \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si se tiene una derivada de segundo orden, se aproxima la derivada interna mediante alguna de las diferencias, luego se aproxima la derivada externa obteniendo de este modo el resultado deseado.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \quad (2.19)$$



- Diferencias centradas

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \\ & \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{2\Delta y \Delta x^2} \\ & \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - 2f(x_i, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{2\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

- Diferencias progresivas

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \\ & \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j + \Delta y) - 2f(x_i, y_j + \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j + \Delta y)}{\Delta y \Delta x^2} \\ & \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

- Diferencias regresivas

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \\ & \approx \frac{f(x_i + \Delta x, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta y \Delta x^2} \\ & \frac{f(x_i + \Delta x, y_j - \Delta y) - 2f(x_i, y_j - \Delta y) + f(x_i - \Delta x, y_j - \Delta y)}{\Delta y \Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hasta el momento se ha visto cómo discretizar la parte espacial de las ecuaciones diferenciales parciales. En este apartado se plantea una discretización utilizando diferencias finitas con respecto al tiempo, que resulta ser similar a la parte espacial. La aproximación para la primera derivada utilizando diferencias regresivas, progresivas y centradas, respectivamente, sería:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t) - f(x, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.25)$$

Para la aproximación de la segunda derivada se emplean diferencias centradas:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \\ &= \frac{f(x, t + \Delta t) - 2f(x, t) + f(x, t - \Delta t)}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.6 Fronteras PML

El método de PML (Perfectly Matched Layer) se utiliza al modelar la ecuación de onda. Es un tipo de frontera artificial que soluciona problemas de límites abiertos, esto

para evitar la reflexión en la región de estudio. Este método se aplica con mayor frecuencia al emplear métodos numéricos como diferencias finitas o elementos finitos, ya que se hace necesario eliminar los límites en el dominio finito para evitar el fenómeno de reflexión, lo que conlleva tener que ampliar el área de estudio con el fin de evitar que las reflexiones de los bordes afecten la región de estudio (Ruiz *et al.*, 2006).

Al utilizar métodos numéricos de solución discreta para modelar la propagación de una onda, se presentan fenómenos de reflexión en los límites de la malla que no permiten analizar los eventos que realmente se presentan. Una de las soluciones que se plantean es la creación de fronteras no reflectivas reduciendo la amplitud en los puntos que están presentes sobre los límites de la malla numérica (Cerjan *et al.*, 1985). El método PML consiste en crear una capa absorbente ubicada en los extremos de la malla, ampliando en cierto modo el dominio computacional, trabajando en un espacio libre sin límites teóricos. Con este método se pueden crear puntos intermedios en los puntos de la malla, los cuales poseen información del campo de onda. Según la discretización realizada, se puede atenuar el campo de onda a los puntos vecinos (Berenger, 1994).

Utilizar fronteras PML permite manejar problemas de frontera como una frontera libre o de espacio libre, y el campo de onda se atenúa, evitando una reflexión del tipo

extremo libre  $\left(\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial y} = 0\right)$  o extremo fijo ( $\Phi(x, y, t) = 0$ ). Para aplicar el método PML primero se realiza una grilla para discretizar el espacio en un número entero de puntos, en los cuales se representará el valor de la función  $\Phi$  en el tiempo  $t$  para cada posición  $(x, y)$ , esto según las ecuaciones determinadas para la discretización de la ecuación de onda (Duitama, 2013).

## 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presentan las fases para llevar a cabo el desarrollo del proyecto, comenzando con la discretización de la ecuación de onda en dos dimensiones empleando el método numérico de diferencias finitas (Anexo A), luego se realiza el código en C++ para efectuar la simulación, y con los resultados obtenidos se lleva a cabo una validación al respecto.

Se comparan los datos que arrojó la simulación y los datos resultantes al sustituir los parámetros utilizados en la simulación en la Ecuación 2.1. Para los casos cuando la fuente se aleja del observador en reposo, la fuente se acerca al observador en reposo, fuente y observador se acercan entre sí; por último, cuando el observador se acerca a una fuente de sonido en reposo. Posteriormente, se efectúa la discretización de la Ecuación 2.3. En la ecuación de onda para medios dispersivos en dos dimensiones (Anexo C), se realiza la simulación en C++ para el posterior análisis de resultados.

### 3.1 Discretización ecuación de onda

Al considerar la ecuación de onda para dos dimensiones, se utiliza el método de diferencias finitas para realizar la aproximación de las derivadas respectivas.

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial t^2} = v^2 \left[ \frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y, t)}{\partial y^2} \right] \quad (3.1)$$

Para la ecuación de onda, en la Ecuación 2.26 se tienen en cuenta las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y) \quad (3.2)$$

$$\Phi(0, 0, t) = \Phi(l_1, l_2, t) = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, 0)}{\partial x} = g(x, y) \quad (3.4)$$

La discretización se realiza utilizando diferencias centradas en ambos lados de la igualdad, en el lado izquierdo se determina la aproximación de la segunda derivada temporal, mientras que en el lado derecho se halla la aproximación de la segunda derivada en dos dimensiones, respecto a los componentes espaciales  $x$  e  $y$  (Anexo A). Para esto se emplean las Ecuaciones 2.16, 2.17 y 2.26, obteniendo:

$$\begin{aligned} & \Phi(x, y, t + \Delta t) \\ &= \Delta t^2 v^2 \left[ \frac{\Phi(x + \Delta x, y, t) - 2\Phi(x, y, t) + \Phi(x - \Delta x, y, t)}{\Delta x^2} \right. \\ &+ \\ & \quad \left. + \frac{\Phi(x, y + \Delta y, t) - 2\Phi(x, y, t) + \Phi(x, y - \Delta y, t)}{\Delta y^2} \right] \\ & \quad + 2\Phi(x, y, t) \\ & \quad - \Phi(x, y, t - \Delta t) \quad (3.5) \end{aligned}$$

Presentando un error de truncamiento:

$$E = -v^2 \left[ \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi(\varepsilon, y, t) + \frac{\Delta y^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \Phi(x, \xi, t) \right] \\ + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Phi(x, y, \mu) \quad (3.6)$$

En la cual:

$$\varepsilon \in (x - \Delta x, x + \Delta x), \xi \in (y - \Delta y, y + \Delta y) \mu \\ \in (t - \Delta t, t + \Delta t)$$

## 4. RESULTADOS

En esta sección se presenta la validación del código realizado en C++, con el fin de simular algunos de los casos del efecto Doppler. Para esto se utilizó la discretización de la ecuación de onda empleando diferencias finitas, es decir, la Ecuación 3.5. Además, se hizo necesario emplear el método de fronteras PML en el código de programación para evitar la reflexión del campo de onda que surge al ejecutar la simulación, y así obtener datos veraces para su verificación.

Discretizada la ecuación de onda para dos dimensiones y diseñado el código en C++, permite la simulación del efecto Doppler y el análisis de los siguientes casos:

- Caso 1: observador en reposo y la fuente se aleja del observador.
- Caso 2: observador en reposo y la fuente se acerca al observador.
- Caso 3: observador y fuente se acercan entre sí.
- Caso 4: fuente en reposo y el observador se mueve hacia la fuente.

Para los casos 1, 2 y 3 se realizan diferentes simulaciones variando la velocidad de la fuente, iniciando con una velocidad de  $10 \text{ m/s}$  hasta  $60 \text{ m/s}$ , aumentando la velocidad para cada ejecución en  $10 \text{ m/s}$ . Luego de obtener los datos, se grafica en Gnuplot la amplitud respecto al tiempo, para cada una de las diferentes velocidades. Posteriormente, con el programa Grace y los datos obtenidos, se determina la transformada discreta

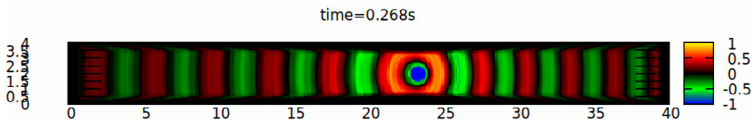
de Fourier, permitiendo el análisis del espectro frecuencial de la señal u onda emitida por la fuente, lo que da la dependencia de frecuencia y amplitud.

Lo descrito anteriormente se hace también para el caso 4, en el cual la fuente permanece en reposo y la velocidad de observador es la que varía. Para cada uno de los casos se validan los resultados obtenidos, para esto se toma el resultado de la transformada discreta de Fourier y se compara con el resultado de calcular la frecuencia percibida con la ecuación para el efecto Doppler en cada uno de sus casos. Se determina el error actual de los datos obtenidos.

La validación de modelo planteado se realiza contrarrestando los datos obtenidos al aplicar la transformada discreta de Fourier con la solución analítica de la ecuación del efecto Doppler, reemplazando cada uno de los parámetros empleados. Se obtiene una tabla de valores que permite analizar la eficacia del método y simulación empleada, mostrando el margen de error en cada uno de los casos y para cada una de las velocidades utilizadas.

## Figura 1

*Pantallazo de la simulación el efecto Doppler realizada en C++*



**Fuente:** elaboración propia.



Para la programación del método se utiliza una grilla de  $400\text{ m} \times 40\text{ m}$ , 400 particiones para  $x$  y 40 particiones en  $y$ , se considera un  $\Delta x = 0,1\text{ m}$  y un  $\Delta y = 0,1\text{ m}$ ; también se toman dos puntos de registro para evaluar cada caso, uno de ellos está ubicado en la partición 80 y el segundo en la partición 320. Dichos puntos registran el paso de los frentes de onda, para luego analizar la frecuencia, amplitud, etc.

En cuanto a la simulación, se asume que el medio de propagación de la onda es el aire, por lo cual se toma la velocidad del sonido en el aire como  $\vec{v} = 343\text{ m/s}$ , también se trabaja con una frecuencia principal de  $100\text{ Hz}$ , frecuencia que es emitida por la fuente de sonido y que está dentro del rango de frecuencia audible del ser humano, es decir, está entre los  $20\text{ Hz}$  y los  $20.000\text{ kHz}$ . La amplitud que se toma para la onda sonora es de  $4,0\text{ m}$  y la variación del tiempo se asume como  $\Delta t = 0,0001\text{ s}$ .

**Tabla 2**

*Parámetros de la simulación*

Parámetro	Cantidad
Velocidad del sonido en el medio ( $\vec{v}$ )	343 m/s
Frecuencia	100 Hz
Amplitud	4 m

**Fuente:** elaboración propia.

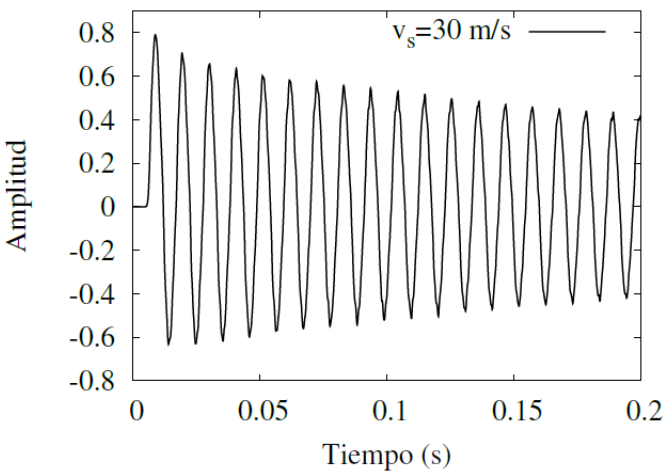
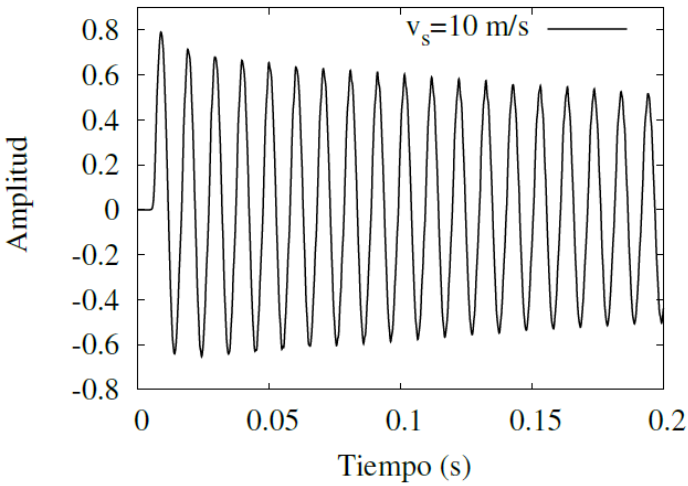
## Caso I: observador en reposo y fuente se aleja del observador

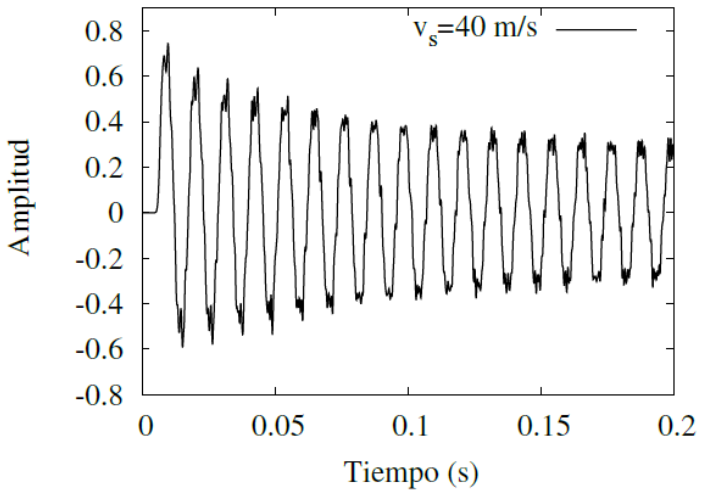
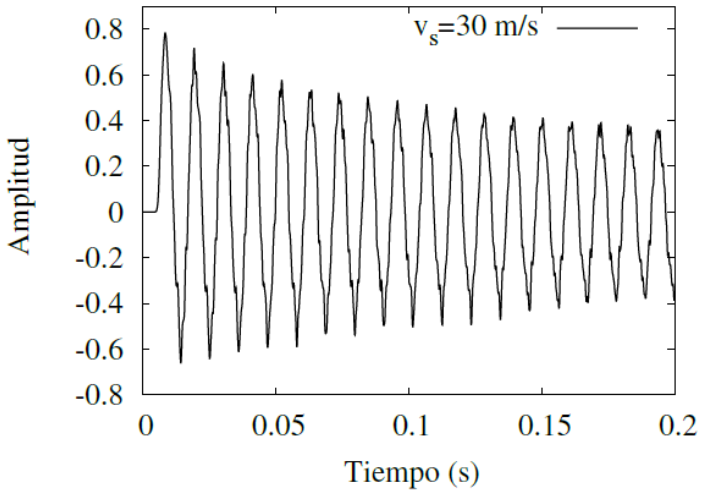
Dado que la fuente se encuentra en movimiento, se realizan diferentes simulaciones variando la velocidad de la fuente  $\vec{v}_s$ , la cual cambia entre  $10 \text{ m/s}$  y  $60 \text{ m/s}$ ; en este caso el observador está inmóvil, por lo cual,  $\vec{v}_o = 0 \text{ m/s}$ . Para cada simulación se mantienen los parámetros expuestos en la Tabla 2.

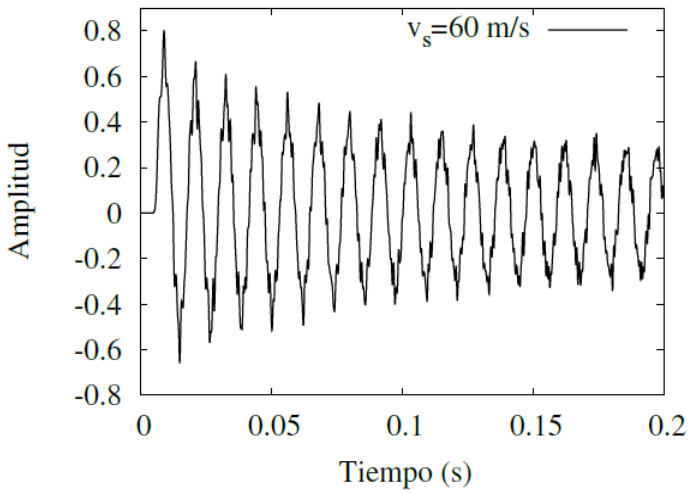
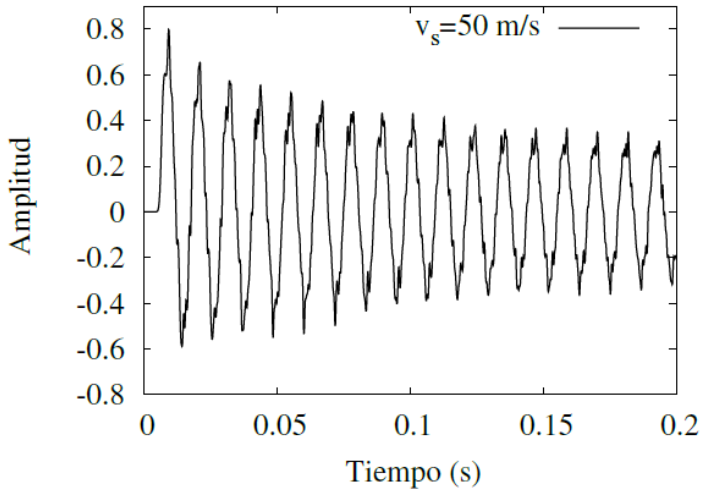
En primera instancia se realizan unas gráficas en las cuales se muestra la amplitud en función del tiempo, dichas gráficas se presentan en la Figura 2, en las cuales se puede evidenciar que al aumentar el tiempo la amplitud de la onda disminuye. También existe una mayor dispersión y una menor comprensión entre los frentes de onda a medida que la velocidad de la fuente en movimiento aumenta. Esto implicaría según los referentes teóricos que la frecuencia disminuye a medida que la fuente de sonido se aleja de un observador en reposo.

**Figura 2**

La fuente se aleja del observador en reposo,  $\vec{v}_o = \mathbf{0} \text{ m/s}$   
La fuente se mueve entre velocidades de **10 m/s a 60 m/s**



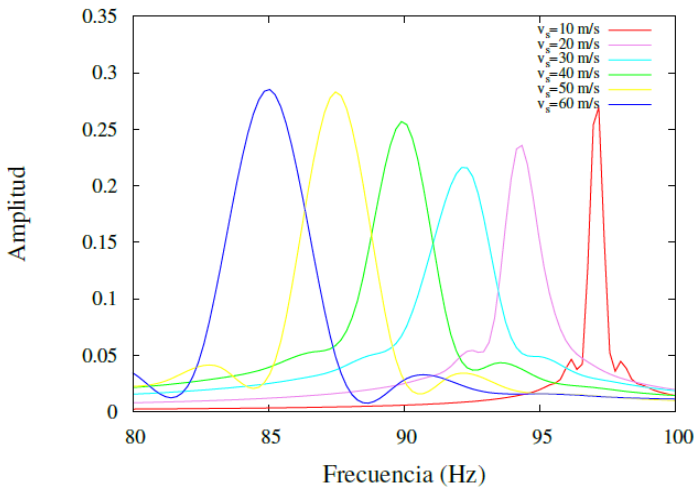




Para fortalecer el planteamiento anteriormente expuesto, se procede a la aplicación de la transformada discreta de Fourier para los datos obtenidos, mostrando de esta manera la amplitud en función de un dominio frecuencial, lo que permite hacer una comparación entre la frecuencia principal y los demás picos de frecuencia obtenidos al realizar cada variación en la velocidad. Se evidenció efectivamente la disminución de la frecuencia a medida que la fuente se aleja.

**Figura 3**

*Transformada discreta de Fourier para el caso cuando la fuente se aleja del observador en reposo, la fuente se mueve a diferentes velocidades y emite una señal con frecuencia de 100 Hz*



Lo mostrado hasta el momento demuestra la eficacia del modelo, sin embargo, se hace necesario contrarrestarlo analíticamente. Se emplea la Ecuación 2.1. y se reemplazan los valores para calcular la frecuencia  $f_o$  percibida por el observador en reposo, es decir, se toma  $f_s = 100 \text{ Hz}$ ,  $\vec{v} = 343 \text{ m/s}$  y  $\vec{v}_s$  variando entre  $10 \text{ m/s}$  y  $60 \text{ m/s}$ .

Dichos valores se encuentran en la Tabla 3, como la frecuencia percibida  $f_o$  y valor teórico, se calcula la diferencia de los valores obtenidos para establecer el error de eficacia de la simulación propuesta; con lo anterior se demostró que para el caso en el cual la fuente de sonido se aleja del observador en reposo, el error no supera el  $0,59\%$ , con lo que se concluye así que la simulación realizada funciona para el caso cuando la fuente se aleja de un observador en reposo.

**Tabla 3**

*Frecuencia percibida por un observador en reposo cuando la fuente se aleja, comparación entre frecuencia simulada y frecuencia teórica*

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida $f_o$ , según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida $f_o$ , valor teórico (Hz)	Error (%)
10	97,0874	97,16713881	0,082063557
20	94,167	94,49035813	0,342212828
30	92,5	91,95710456	0,590379009
40	90,0	89,55613577	0,495626822

50	87,5	87,27735369	0,255102041
60	85,0	85,11166253	0,131195335

**Fuente:** elaboración propia.

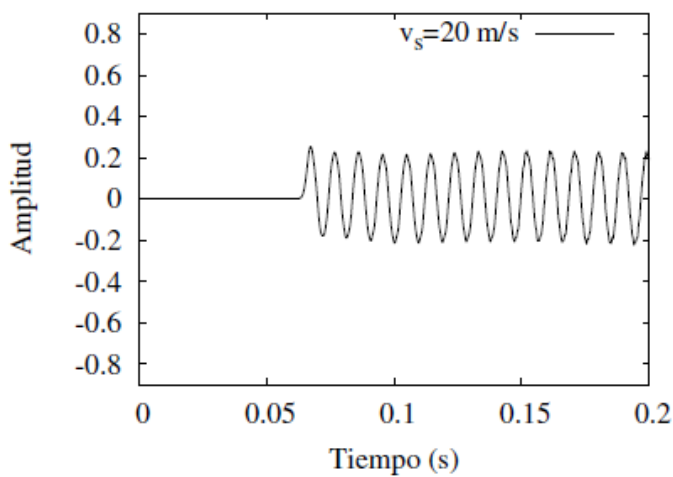
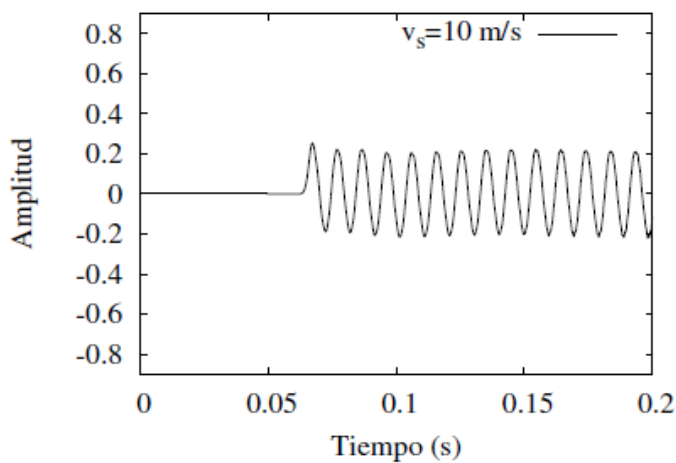
## **Caso II: observador en reposo y la fuente se acerca al observador**

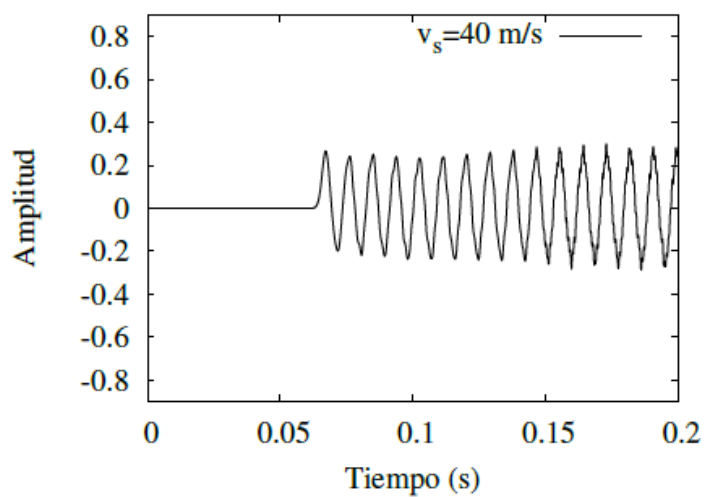
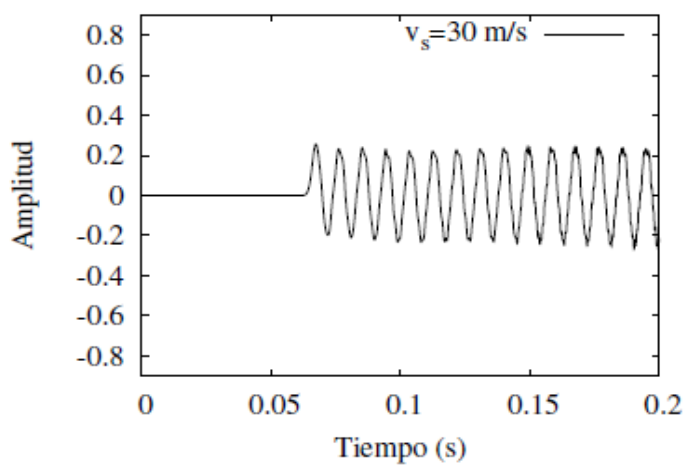
En este caso la fuente está en movimiento, por lo tanto se consideran diferentes velocidades para cada simulación; dicha velocidad  $\vec{v}_s$  cambia entre **10 m/s** y **60 m/s**, y se toman los parámetros expuestos en la Tabla 2. Con los resultados obtenidos se realizan las gráficas correspondientes a cada simulación, planteando gráficas de la amplitud en función del tiempo, presentado en una forma de onda sinusoidal con poca variación de la amplitud a través del tiempo (Figura 4).

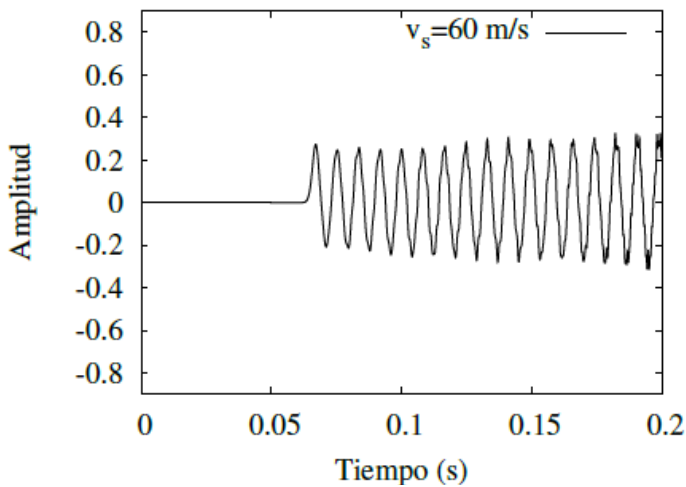
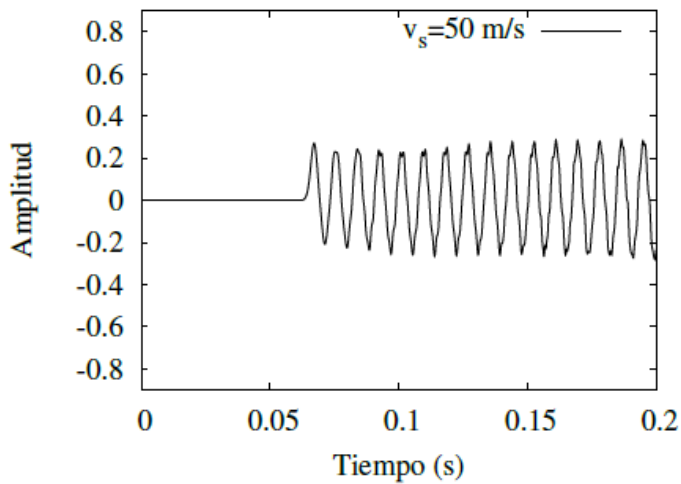
### **Figura 4**

*La fuente se acerca a un observador en reposo,  $\vec{v}_o = 0 \text{ m/s}$   
La fuente se mueve entre velocidades de **10 m/s** a **60 m/s***





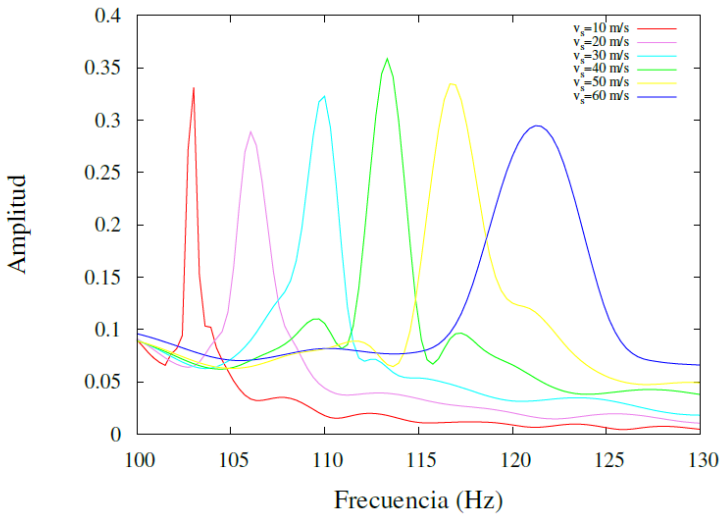




Posteriormente, se procede a realizar la transformada discreta de Fourier con los resultados obtenidos y se consigue pasar del dominio tiempo al dominio frecuencial. Se obtiene el espectro de frecuencias para cada simulación realizada, evidenciando un aumento de la frecuencia cuando la velocidad con la que se acerca la fuente de sonido al observador también aumenta.

**Figura 5**

*Transformada discreta de Fourier. Para el caso cuando la fuente se acerca al observador en reposo, la fuente emite una señal con frecuencia de 100 Hz*



Esto reafirma que cuando la fuente de sonido se acerca, la frecuencia percibida por el observador es mayor. En la Tabla 4 se muestra una comparación entre la

frecuencia calculada numéricamente mediante la Ecuación 2.1, y la frecuencia obtenida gracias a la simulación. La diferencia obtenida es muy pequeña, con lo cual se establece un error inferior al 0,5 %. y se concluyen que la simulación es válida para el caso cuando la fuente se acerca a un observador en reposo.

**Tabla 4**

*Frecuencia percibida por un observador en reposo y la fuente se mueve hacia él, frecuencia según la simulación y frecuencia teórica*

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida $f_o$ , según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida $f_o$ , valor teórico (Hz)	Error (%)
10	102,921	103,003003	0,079612245
20	105,837	106,1919505	0,334253644
30	110,0	109,5846645	0,379008746
40	113,334	113,2013201	0,117206997
50	116,669	117,0648464	0,338142857
60	121,219	121,2014134	0,014510204

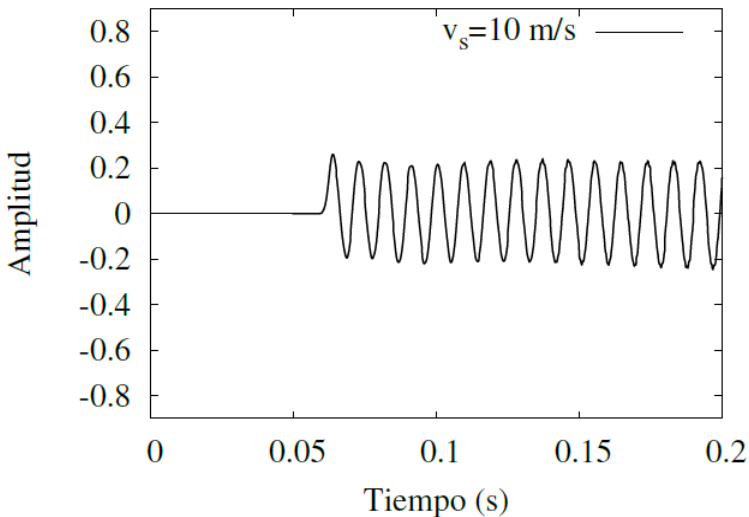
**Fuente:** elaboración propia.

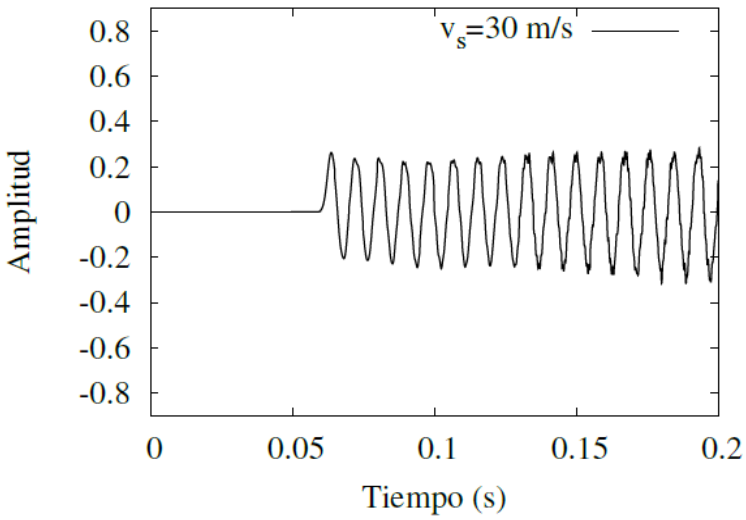
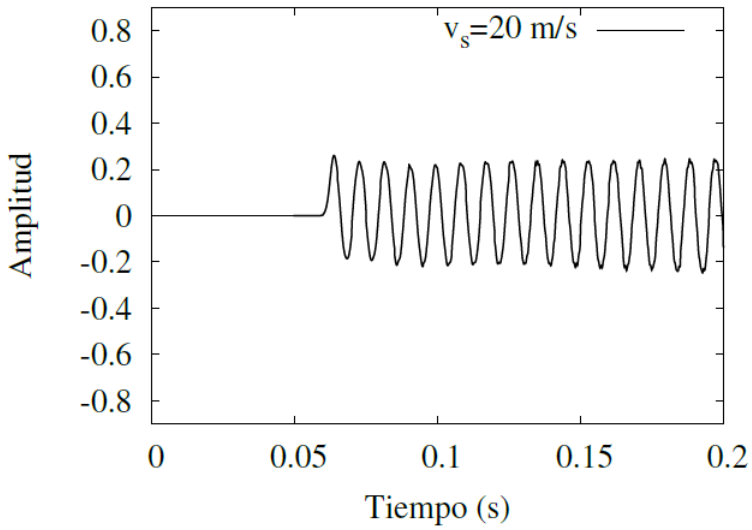
### Caso III: observador y fuente se acercan entre sí

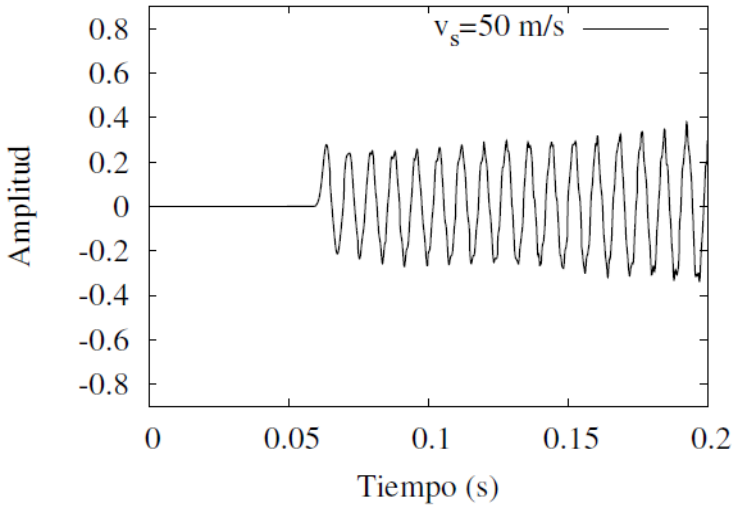
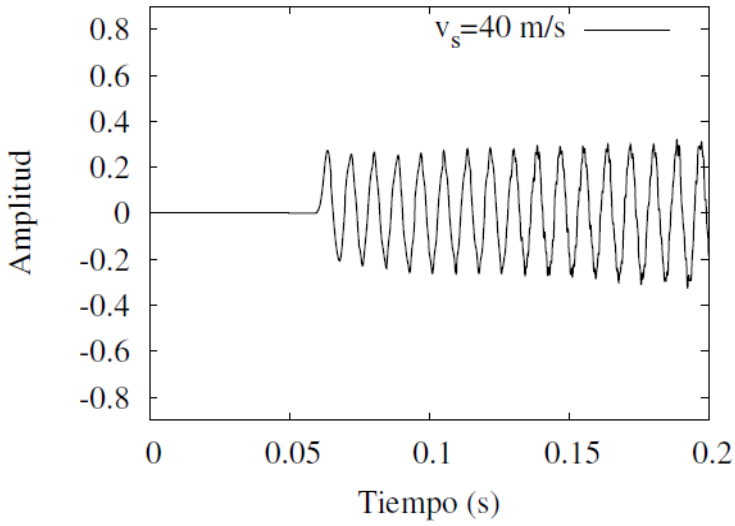
En este caso se considera el movimiento tanto de la fuente como del observador acercándose entre sí. Se realizan nuevamente seis simulaciones variando la velocidad de la fuente  $\vec{v}_s$  nuevamente entre  $10 \text{ m/s}$  y  $60 \text{ m/s}$ ; la velocidad del observador se mantiene en todas las simulaciones como  $\vec{v}_o = 20 \text{ m/s}$ , y los demás parámetros por considerar son expuestos en la Tabla 2. Se graficó cada simulación, y se presenta la amplitud en función del tiempo (Figura 6).

**Figura 6**

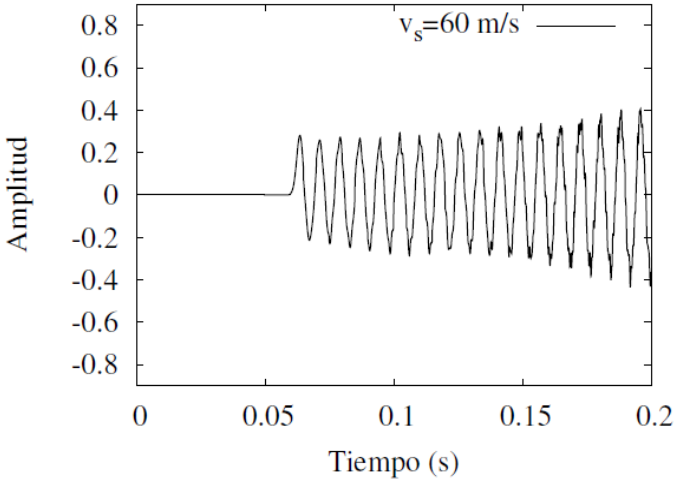
*La fuente y el observador se acercan entre sí. El observador mantiene una velocidad de  $\vec{v}_o = 20 \text{ m/s}$  y la fuente se mueve entre velocidades de  $10 \text{ m/s}$  a  $60 \text{ m/s}$*







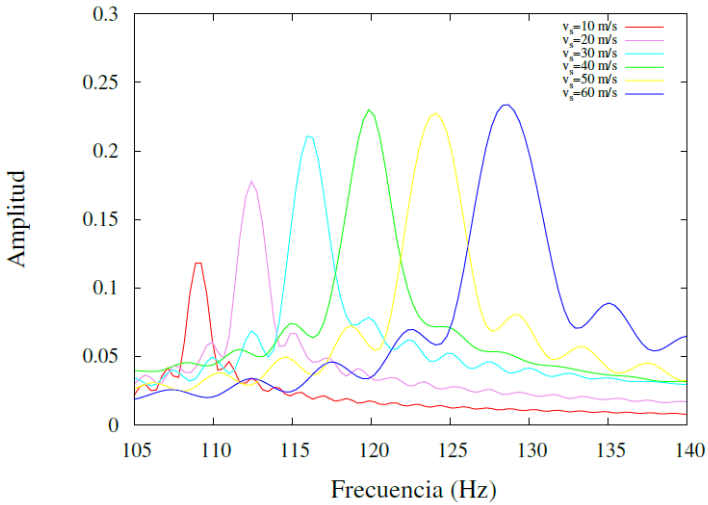




Se aplica la transformada discreta de Fourier a los datos obtenidos, consiguiendo los espectros frecuenciales para cada invariación de velocidad. Se evidenció un aumento en la frecuencia a medida que el observador y la fuente se acercan entre sí, considerando diferentes velocidades en cada caso. A continuación, se presenta la transformada de Fourier para el caso trabajado.

## Figura 7

*Transformada discreta de Fourier. Para el análisis frecuencia en el caso cuando la fuente y observador se acercan entre sí, la señal emitida por la fuente tiene una frecuencia de **100 Hz***



## Tabla 5

*Frecuencia percibida simulada y teórica, para el caso cuando fuente y observador se acercan entre sí*

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida $f_o$ , según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida $f_o$ , valor teórico (Hz)	Error (%)
10	108,974	109,009009	0,032115702
20	112,501	112,3839009	0,104195592
30	116,254	115,9744409	0,241052342
40	120,0	119,8019802	0,165289256
50	123,972	123,890785	0,065553719
60	128,702	128,2685512	0,337922865

**Fuente:** elaboración propia.

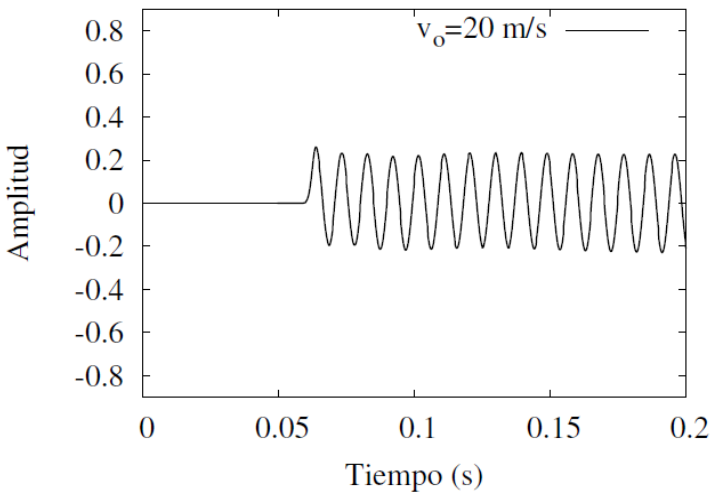
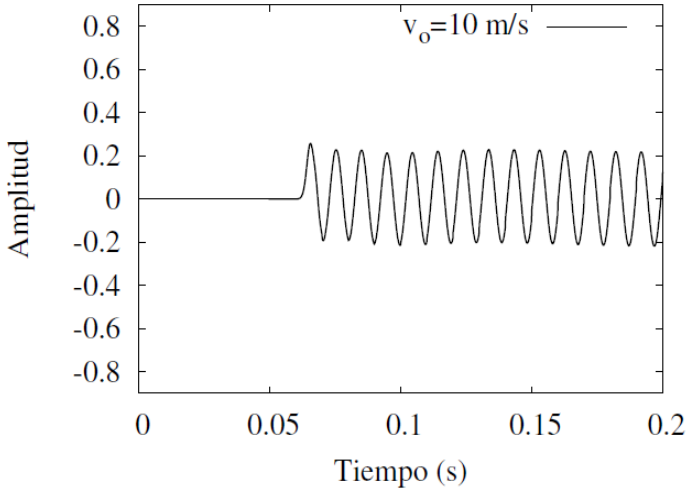
En la Tabla 5 se presentan los resultados obtenidos para la frecuencia percibida por un observador que se dirige hacia una fuente en movimiento. Se muestran los datos correspondientes a la simulación y los datos obtenidos al reemplazar en la Ecuación 2.1 (las variables para considerar), es decir,  $\vec{v}_o = 20 \text{ m/s}$ ,  $f_s = 100 \text{ Hz}$ ,  $\vec{v} = 343 \text{ m/s}$  y la variación de  $\vec{v}_s$ . Se puede constatar la eficacia de la simulación, ya que solo presenta un error inferior al 0,4 %, estableciendo su validez para el caso cuando la fuente y el observador se acercan entre sí.

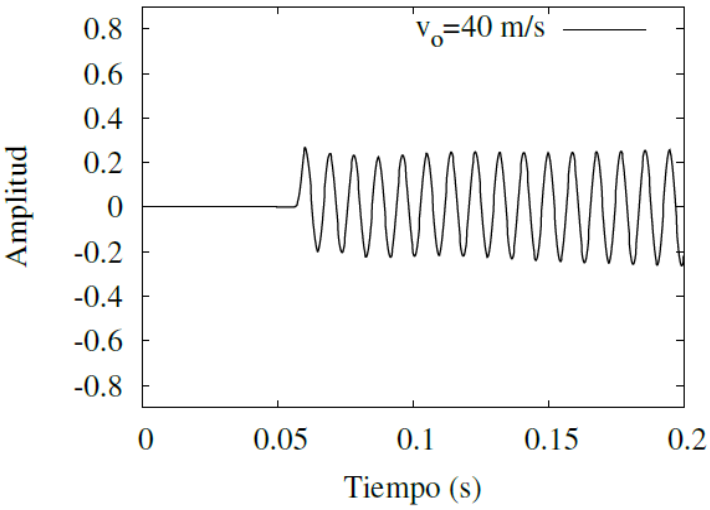
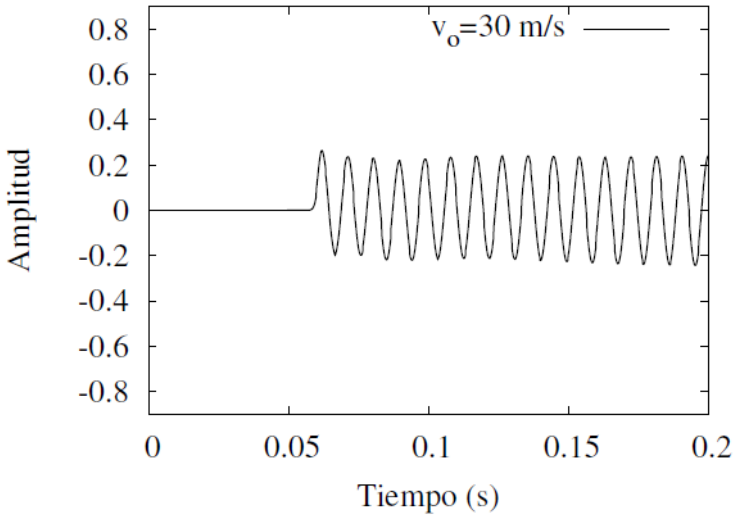
### Caso IV: fuente en reposo y observador se mueve hacia la fuente

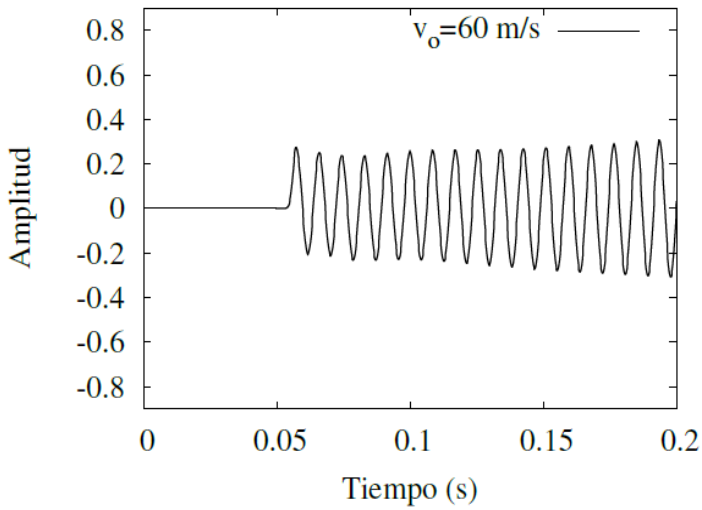
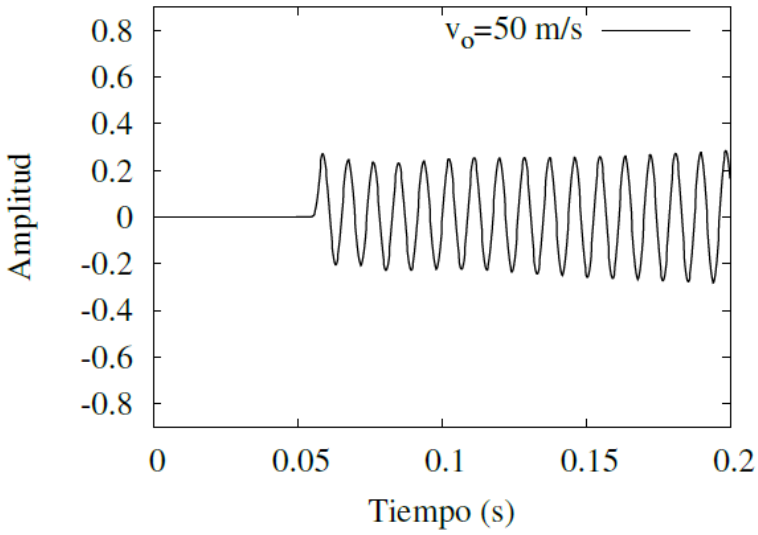
En este caso, a diferencia de los anteriores, la fuente permanece en reposo, por lo tanto  $\vec{v}_s = 0 \text{ m/s}$ ; en cambio el observador se mueve hacia la fuente con una velocidad que varía entre  $10 \text{ m/s}$  y  $60 \text{ m/s}$ . Las demás variables son consideradas en la Tabla 2. Con las gráficas obtenidas, se puede concluir que la amplitud de la onda sonora aumenta con el paso del tiempo; además de esto, mantiene los frentes de onda muy cerca unos de otros (Figura 8), infiriendo así que la frecuencia percibida por el observador aumenta a medida que este se acerca a una fuente de sonido inmóvil.

#### Figura 8

*El observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil,  $\vec{v}_s = 0 \text{ m/s}$ . La velocidad de la fuente varía entre  $10 \text{ m/s}$  y  $60 \text{ m/s}$*



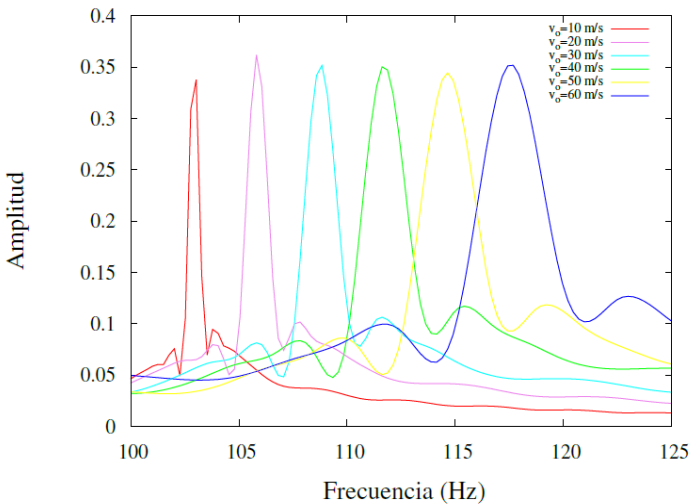




Se realiza la transformada discreta de Fourier para obtener el espectro frecuencial y la frecuencia percibida por el observador en movimiento para cada simulación realizada. En la Figura 9 se muestran los picos de frecuencia presentados.

**Figura 9**

*Transformada discreta de Fourier para analizar el cambio de la frecuencia percibida por un observador que se mueve hacia una fuente en reposo*



En la Tabla 6 se muestran los resultados obtenidos para la frecuencia percibida tanto de la simulación como de la solución numérica efectuada, presentando un error o diferencia inferior al **0,2 %**. Finalmente, la simulación se



hace valer para el caso cuando el observador se acerca a una fuente de sonido estacionaria.

**Tabla 6**

*Frecuencia simulada y frecuencia teórica para el caso cuando el observador se mueve hacia una fuente en reposo*

Velocidad (m/s)	Frecuencia percibida $f_o$ , según la simulación (Hz)	Frecuencia percibida $f_o$ , valor teórico (Hz)	Error (%)
10	102,921	102,9154519	0,005390935
20	105,833	105,8309038	0,001980716
30	108,751	108,7463557	0,004270777
40	111,67	111,6618076	0,007336815
50	114,584	114,5772595	0,005882952
60	117,511	117,4927114	0,015565757

**Fuente:** elaboración propia.

## CONCLUSIONES

El cambio de frecuencia en el medio dispersivo no fue tan notorio porque se tomó como medio el aire, por lo cual la variación de la frecuencia ajustando los parámetros de atenuación es muy baja.

La discretización de la ecuación de onda mediante diferencias finitas regresivas y centradas permite modelar de manera efectiva el efecto Doppler, y presenta un error real inferior al 1 %, comparando los resultados obtenidos en la simulación con los encontrados analíticamente.

En un medio dispersivo cuando la fuente de sonido se aleja del observador en reposo, se presenta un corrimiento hacia bajas frecuencias respecto a la frecuencia característica a medida que la velocidad aumenta, esto implica que el observador percibirá una frecuencia menor a medida que la fuente se aleja incrementando su velocidad.

Cuando la fuente se aleja del observador en reposo, a medida que aumenta el coeficiente de atenuación por difusión y la velocidad, la amplitud de la onda disminuye; esto da lugar para que la frecuencia que percibe el observador sea menor cuanto más rápido se aleja la fuente en movimiento.

El coeficiente de atenuación por difusión en un medio dispersivo hace que la frecuencia que percibe un observador en reposo sea un poco mayor a la que presenta en un medio no dispersivo, sin embargo, en ambos medios se presenta el mismo comportamiento, es decir, que a medida que la fuente se aleja, la frecuencia que percibe el

observador es menor, mostrando una mayor disminución a velocidades altas.

En un medio dispersivo cuando la fuente se acerca a un observador en reposo, se experimenta un cambio de amplitud con el paso del tiempo, el cual presenta a su vez un aumento en la frecuencia percibida por el observador. Dicho incremento es más notorio a medida que el coeficiente de atenuación por difusión y la velocidad aumentan.

En un medio dispersivo, cuando la fuente se acerca a un observador en reposo, en el espectro de frecuencias se evidencia un corrimiento hacia frecuencias altas con relación a la frecuencia característica de 100 Hz, llegando a tomar valores de 120/097 Hz para valores de velocidad y coeficiente de atenuación por difusión altos.

En un medio no dispersivo y en uno dispersivo, cuando la fuente se acerca a un observador en reposo, la frecuencia que percibe el observador es más alta a medida que la fuente se mueve rápidamente hacia este.

En un medio dispersivo cuando la fuente y el observador se acercan entre sí, la amplitud de la onda aumenta, presentando una variación más notoria cuando incrementa la velocidad; además, el intervalo de variación de la amplitud es más grande a medida que se eleva el coeficiente de atenuación por difusión.

En el espectro de frecuencias, cuando la fuente y el observador se acercan entre sí, se presenta un corrimiento hacia altas frecuencias con respecto a la frecuencia específica de 100 Hz, llegando a tomar valores entre 109/174 Hz y 127/608 Hz, dependiendo del valor para el coeficiente de atenuación por difusión, ya que este a medida que aumenta hace que el intervalo de la frecuencia percibida por el observador sea mayor.

Tanto en medios dispersivos como en medios no dispersivos, a medida que la fuente y el observador se acercan entre sí, la frecuencia percibida por el observador es mayor, aunque cabe resaltar que en medios dispersivos la frecuencia manifiesta una variación un poco mayor.

En un medio dispersivo, cuando el observador se acerca a una fuente de sonido inmóvil, la onda presenta un aumento de la amplitud cuanto mayor es el coeficiente de atenuación por la velocidad, por lo cual el observador percibe una mayor frecuencia a medida que se acerca y muestra un mayor agrupamiento de los frentes de onda.

El espectro de frecuencias cuando el observador se acerca a una fuente en reposo, muestra un corrimiento hacia altas frecuencias respecto a la frecuencia característica de 100 Hz, tomando valores entre 102/95 Hz y 117/17 Hz, los cuales incrementan a medida que la velocidad y el coeficiente de atenuación aumentan.

En un medio dispersivo y en uno no dispersivo, la frecuencia que percibe un observador aumenta a medida que este se acerca a la fuente de sonido inmóvil, tomando inicialmente valores muy cercanos a la frecuencia característica.

El efecto Doppler en medios dispersivos tiene una pequeña variación en la frecuencia percibida por un observador, es decir, un pequeño incremento en relación con lo presentado en un medio no dispersivo, dicha variación se evidencia cuando una fuente de sonido se aleja o acerca a un observador en reposo, cuando fuente y observador se acercan entre sí y, por último, cuando el observador se acerca a una fuente en reposo.

## REFERENCIAS

Berenger, J. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2), 185-200. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999184711594>

Berger, H. (1976). Complex Doppler effect in dispersive media. *American Journal of Physics*, 44(9), 851-854. <https://doi.org/10.1119/1.10136>

Boyce, W. y DiPrima R. (1998). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Limusa Wiley. [https://www.academia.edu/15259755/Ecuaciones\\_Diferenciales\\_y\\_Problemas\\_con\\_Valores\\_en\\_la\\_Frontera\\_Boyce\\_Di\\_Prima\\_4ed](https://www.academia.edu/15259755/Ecuaciones_Diferenciales_y_Problemas_con_Valores_en_la_Frontera_Boyce_Di_Prima_4ed)

Capra, F. (2014). *Il Tao della fisica*. Adelphi Edizioni Spa.

Carrillo, A., González, K. y Mendoza, O. (2018). *Introducción al método de diferencias finitas y su implementación computacional*. UNAM. [https://www.academia.edu/43368237/Introducci%C3%B3n\\_al\\_M%C3%A9todo\\_de\\_Diferencias\\_Finitas\\_y\\_su\\_Implementaci%C3%B3n\\_Computacional](https://www.academia.edu/43368237/Introducci%C3%B3n_al_M%C3%A9todo_de_Diferencias_Finitas_y_su_Implementaci%C3%B3n_Computacional)

Censor, D. (1992). Real and complex Doppler effects in lossy media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 39(2) 187-195. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/139114>

Corjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R. y Resheq, M. (1985). Discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics Journal*, 50(4), 705-708.

Cuadrado, E. (2013, 3 de diciembre). *Ondas. Medios dispersivos*. Práctica ciencia. <http://practicaciencia.blogspot.com/2013/12/ondas-medios-dispersivos.html>

Doppler, C. (1842). *Ueber das Farbige Licht*. Praga.

Duitama, A. (2013). *Simulación de la atenuación de frecuencias en ondas sísmicas primarias* (tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia). <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/49870>

Giancoli, D. (2008). *Física para ciencia e ingeniería*. Pearson Prentice Hall.

Heisenberg, W. (2008). *Física y filosofía*. Il Saggiatore.

Korneev, V., Goloshubin, G., Daley, T. y Silin, D. (2004). Seismic low-frequency effects in monitoring fluid-saturated reservoirs. *Geophysics*, 69(2), 522-532. [https://www.researchgate.net/publication/228077823\\_Seismic\\_low-frequency\\_effects\\_in\\_monitoring\\_fluid-saturated\\_reservoirs](https://www.researchgate.net/publication/228077823_Seismic_low-frequency_effects_in_monitoring_fluid-saturated_reservoirs)

Radmanesh, M. (2007). *RF & microwave design essentials: engineering design and analysis from DC to microwaves*. AuthorHouse.

Ruiz, A., Montes L. y Vargas C. (2006). Método híbrido de fronteras no reflectivas en límites de modelos sísmicos. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 30(115), 209-214.

Russell, D. (2011). *Waves in a dispersive medium*. Acoustics and Vibration Animations. <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Dispersion/dispersion.html>

Samiullah, M. (2015). *A first course in vibrations and waves*. Oxford University Press.

Serway, R. (2008). *Physics for scientists and engineers*. Cengage Learning.

Sorokin, Y. (1993). Doppler effect and aberrational effects in dispersive medium. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 36(7), 410-422. <https://link.springer.com/journal/11141/volumes-and-issues/36-7>

Usagawa, T., Matsuno, K., Ebata, M. y Okda, J. (1985). Anal-

ysis of a moving sound source by the cross-spectral technique- A method for reducing frequency shift by for reducing the Doppler effect. *Journal of the Acoustical Society of Japan*, (4), 281-288.

Zhang, Y., Zhang, T., Ouyang, H. y Li, T. (2015). SPH simulation of acoustic waves: effects of frequency, sound pressure and particle spacing. *Mathematical Problems in Engineering*, 1-7. <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2015/348314/>

Simulación numérica de  
la cantidad de infectados  
de VIH en Colombia

Capítulo

4

Luz Magdalena Pinzón Caballero  
Alejandro Duitama Leal

---

Universidad de Cundinamarca, Facultad de Educación  
Licenciatura en Matemáticas  
Fusagasugá  
2020



# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>242</b>
<b>Introducción</b>	<b>245</b>
<hr/>	
<b>1. Marco teórico</b>	<b>249</b>
1.1 El VIH y sida	
1.2 El VIH y sida en Colombia	
1.3 Modelos de epidemia	
<hr/>	
<b>2. Método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales</b>	<b>259</b>
<hr/>	
<b>3. Metodología</b>	<b>265</b>
3.1 Código	
<hr/>	
<b>4. Validación del modelo</b>	<b>268</b>
<hr/>	
<b>5. Resultados y análisis</b>	<b>274</b>
5.1 Valores para el caso de Colombia	
5.2 Variación de parámetros	
<hr/>	
<b>Conclusión</b>	<b>314</b>
<hr/>	
<b>Referencias</b>	<b>316</b>

## INTRODUCCIÓN

En vista de la importancia de la enfermedad del VIH/sida y considerando su mortalidad, en la actualidad se ha visto una disminución según el informe de ONUSIDA (2018): “En 2017 fallecieron 940.000 [670.000 – 1.3 millones] personas en todo el mundo a causa de enfermedades relacionadas con el sida, frente a los 1.9 millones [1.4 millones – 2.7 millones] de 2004 y los 1.4 millones [un millón – 2 millones] de 2010” (p. 2). En la situación de Colombia, en el 2017 las personas diagnosticadas con VIH fueron 82.856, de esos se reportaron 9.399 casos nuevos; en 2016 fueron 73.465, de esos se reportaron 8.209 casos nuevos (Cuenta alto costo, 2017). Por lo tanto, se observa un aumento de los casos totales y nuevos detectados en comparación con el año 2016, generando una alerta en el sector de la salud. Por esta razón, este proyecto analiza el comportamiento del VIH a partir de un modelo matemático en el cual se estudia la cantidad y variación de personas infectadas, las personas con sida y el número de personas infectadas que aún no han sido detectadas en la población. Igualmente, de acuerdo con los resultados preliminares del modelo, se ajustarán los parámetros mediante los datos ofrecidos por el Ministerio de Salud y Protección Social (MinSalud), y con esto obtener el modelo para Colombia y modelar el comportamiento de la cantidad de infectados con VIH.

En Colombia existe un aumento de nuevos casos totales de personas diagnosticadas con VIH por año, siendo esto una problemática social que enciende la alarma al sector salud. Al respecto, afirma Redacción Salud (2018): “Puede ser una señal tal de la poca eficacia de las medidas

para la prevención del contagio". Por otra parte, Mesa et al. (2010) determina que la precisión en los datos es un factor importante para lograr un modelado más real del fenómeno y el uso del preservativo para la disminución de la enfermedad. Así mismo, Sepúlveda et al. (2011) determinan que la disminución del valor de la probabilidad de contagio cuando hay contacto entre un susceptible y un infectado, los valores máximos de la población de infectados son menores y se consiguen más tarde en el tiempo. Por lo anterior, surge la pregunta: ¿qué factores (parámetros) influyen en la variación de la población infectada con el virus de la inmunodeficiencia humana (VIH) de contraer la enfermedad en Colombia?

## RESUMEN

Este trabajo se enfoca en modelar el comportamiento de la cantidad de infectados con el virus de inmunodeficiencia humana (VIH) en Colombia. De tal manera, se estudia si es posible modelar, mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, la población caracterizada por el número de personas infectadas, el número de personas infectadas que aún no han sido detectadas en la población y el número de personas con sida, por medio de la selección de un modelo basado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en una población homogénea. Se definió qué factores son los más sensibles para reducir la cantidad de infectados y se analizó la ausencia de políticas de prevención de salud determinando un conjunto de valores, en el cual se evidencia este aspecto. Para ajustar los parámetros se utilizaron los datos ofrecidos por el Ministerio de Salud y Protección Social.

**Palabras clave:** VIH, Runge-Kutta, simulación.

## INTRODUCCIÓN

Los modelos epidemiológicos sobre el virus de la inmunodeficiencia humana (VIH) brindan información relevante que sirve como guía en la comprensión de la enfermedad. Se han realizado varias publicaciones de modelos matemáticos no lineales con ecuaciones diferenciales ordinarias, tomando en cuenta características específicas para analizar la propagación del virus en la población. Por ejemplo, Tripathi et al. (2007) proponen y analizan un modelo para estudiar la detección de personas infectadas por el VIH que no son conscientes a través de exámenes médicos o de otro tipo, este modelo es aplicado a datos del VIH en India entre los años 1990 al 2003 y en la simulación numérica el sistema de ecuaciones está integrado numéricamente por el método de Runge-Kutta de orden 4. Concluyen que la cantidad de personas infectadas con VIH conscientes estimadas por el modelo está cerca de los datos de VIH informados por India y que la tasa de detección es muy baja, evidenciando que el mayor número de infectados permanecen inconscientes y continúan manteniendo relaciones sexuales en la comunidad, además, que la detección de infectados no conscientes tiene el efecto de reducir la propagación de la enfermedad, ya que al ser conscientes, los infectados se abstienen de interactuar sexualmente o usan medidas preventivas.

Igualmente, en el trabajo de Arazoza et al. (2015) su objetivo es obtener una estimación fiable de la población real de infectados de VIH/sida en Cuba entre los años 1986 y 2010, realizando un modelo de la dinámica de detección de portadores por las distintas estrategias

empleadas por el sistema sanitario, como son la búsqueda activa de contactos y métodos aleatorios (donación de sangre, intervención quirúrgica, análisis por embarazo, test anónimo, entre otros). Sobre la búsqueda activa de contactos, es un programa de notificación de parejas puesto en marcha desde 1986 con el objetivo de buscar lo antes posible aquellos portadores asintomáticos del virus, reportados por individuos detectados como portadores del virus. El modelo se divide en 4 clases de poblaciones: los portadores desconocidos del virus, los portadores detectados por un método aleatorio, los portadores detectados mediante la estrategia de búsqueda activa de contactos y los individuos con sida. Finalizan determinando en el modelo que los parámetros que proporcionan una mayor información sobre la epidemia son las tasas de detección de los métodos aleatorios y búsqueda activa de contactos porque son descriptores de la eficacia del sistema de salud, y las tasas en que las poblaciones de portadores desconocidos y portadores detectados desarrollan sida. También confirman un crecimiento lento de la evolución de la epidemia.

Ahora bien, los modelos anteriores son de una población homogénea, pero también se han realizado modelos con poblaciones de distintos tamaños, como lo es el modelo de Mesa et al. (2010) que explica la dinámica de transmisión del VIH/sida en una población entre parejas heterosexualmente activas, cuyo fin es analizar el comportamiento de la enfermedad para visualizar mediante simulaciones los efectos y la sensibilidad de los parámetros. Esto lo hace por medio de un modelo con control que tiene una proporción de individuos que está protegida por el uso del preservativo, a diferencia del modelo sin control. Los datos utilizados para hacer las simulaciones corresponden a datos obtenidos del Departamento Nacional de Estadísticas de Colombia (DANE) y usaron el programa MAPLE. Como resultado, obtuvieron que los parámetros sensibles son la proporción de hombres y

mujeres que entran a la población sexualmente activa y, además, se encontró que el modelo con control es efectivo para la disminución de la enfermedad.

Por otra parte, encontramos modelos que toman en cuenta la inmigración de personas infectadas, como el modelo que proponen Naresh et al. (2009) en una población de diferentes tamaños con afluencia constante de infectados de VIH, y no se tienen en cuenta las medidas de protección y control de la enfermedad, además, se supone que la única manera de contagio es por vía sexual. Para estudiar el comportamiento dinámico del modelo, el sistema de ecuaciones ordinarias está aproximado por el método de Runge-Kutta de orden 4, concluyen que la enfermedad siempre es persistente si se permite la inmigración directa de infectados en la comunidad, y en ausencia de afluencia de infección la endemividad de la enfermedad es mayor si las personas con VIH también interactúan sexualmente, en comparación con el caso cuando no participan en las interacciones sexuales. En conclusión, si se restringe la inmigración directa de infectados se reduce la enfermedad.

Por último, en el trabajo de Salguero et al. (2011) utilizaron un modelo tipo SIR para la dinámica del VIH/sida en la ciudad de Cali en Colombia y emplearon los datos ofrecidos por la Secretaría de Salud Municipal entre los años 1987 a 2008. En el modelo la población total se dividió en susceptibles considerados sexualmente activos con edades mayores de 14 años, infectados que son portadores asintomáticos y removidos, los cuales han desarrollado la enfermedad y los consideran sexualmente inactivos. Allí se obtiene que las poblaciones tienden a estabilizarse a partir de cien periodos. También analizaron el parámetro respecto a la probabilidad de contagio cuando hay contacto entre un susceptible y un infectado por medio de diversas simulaciones, asumiendo que con políticas de educación

y prevención para la enfermedad es posible modificar este parámetro, obteniendo que, a medida que disminuye este parámetro, los valores máximos en la población de infectados son menores y se consiguen más tarde en el tiempo, recomendando que se puede disminuir este parámetro con el aumento de la inversión en campañas de educación sexual y el uso frecuente del condón.



# 1. MARCO TEÓRICO

En un primer momento se abordarán definiciones concisas sobre la enfermedad del VIH/sida, brindando información sobre los tipos de transmisión del virus y cómo influye o repercute el sistema inmunológico del ser humano mediante la intrusión de una serie de enfermedades oportunistas asociadas a la inmunodepresión, catalogando al infectado con sida.

En un segundo momento se expondrán los modelos de epidemia SIR, SIS y SI basados en los autores Montesinos y Hernández (2007), los cuales establecen una división poblacional de algunas modelaciones de enfermedades infecciosas exponiendo el estado de los individuos en sanos, infectados e inmunes.

En un tercer momento se explicará el modelo matemático que desarrollaron Arazoza y Lounes (2002), usando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) para el caso de Cuba, teniendo en cuenta como medida de prevención el programa de búsqueda activa de contactos infectados de VIH. Ahora bien, este modelo se basa solamente en la vía de la transmisión sexual, situando a las poblaciones infectadas en tres divisiones: 1) seropositivos desconocidos, 2) diagnosticados con VIH y 3) pacientes con síndrome de inmunodeficiencia (SIDA). De igual modo, con este modelo matemático se basará para hacer una estimación aproximada del número de casos de VIH/sida en Colombia.

En un último momento se mostrará el método numérico de Runge-Kutta de orden 4 (RK4), que se utiliza para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales. Se realiza una explicación como se hallan los coeficientes y expresiones desconocidas de la ecuación de RK4 por medio del método de la serie de Taylor de orden  $N=4$  y la interpretación geométrica del resultado. Esto se hizo con la finalidad de comprender mejor el método numérico de Runge-Kutta.

## 1.1 El VIH y sida

El virus de la inmunodeficiencia humana (VIH) es un retrovirus que infecta y se replica en una gran variedad de células del sistema inmunológico, donde tenemos células como los linfocitos CD4, el sistema monocito/macrófago y las microglías en el sistema nervioso central. Es la infección del linfocito CD4 (auxiliador/cooperador) la que produce efectos más fatídicos en las repuestas inmunológicas, ya que estas células son las encargadas de la activación y mantenimiento de la respuesta inmunológica al regular las respuestas de otras células que incluyen el sistema monocito/macrófago, las células T citotóxicas (CD8), las células NK y las células B para la producción de anticuerpos, por lo tanto, al haber un daño del funcionamiento o disminución de la cantidad de linfocitos CD4, tiene efectos fatales en el sistema inmunológico (Arnold et al., 2012).

La transmisión del VIH al organismo según Arnold et al. (2012) es mediante tres vías:

- Contacto sexual.
- La exposición directa de piel no intacta, mucosas a sangre contaminada u otros hemo- derivados,

entre las que tenemos el intercambio de jeringuillas o agujas y la exposición ocupacional.

- La transmisión vertical o perinatal que es cuando la madre infecta al feto durante el embarazo, en el momento del parto o a través de la lactancia materna.

El síndrome de inmunodeficiencia adquirida (sida) es la última etapa del VIH y está caracterizado por una serie de enfermedades oportunistas asociadas a la inmunodepresión, relacionadas con los efectos que produce el VIH en el sistema inmunológico. Además, se clasifica a un paciente como caso con sida cuando el nivel de linfocitos disminuye a cifras inferiores a  $200 \times \text{mm}^3$ , independientemente de la condición clínica de la enfermedad (Arnold et al., 2012).

## 1.2 El VIH y sida en Colombia

Eventualmente, las políticas públicas del VIH/sida en Colombia se han caracterizado en establecer estrategias de promoción de la salud sexual y reproductiva, las cuales recomiendan a la población el uso de preservativos y la realización de diagnósticos tempranos para tomar medidas en cuestión del tratamiento a efectuar, y el control del círculo epidemiológico. Así mismo, el manejo adecuado a los grupos seropositivos que están en constante vulnerabilidad.

Igualmente, estas estrategias vienen acompañadas a través de un protocolo de atención, según como lo expone el Instituto Nacional de Salud (2015):

1. Dar las debidas instrucciones a las personas que deci-

dan realizarse la prueba de tamizaje ya sea antes o después del procedimiento.

2. Las EPS e IPS correspondientes deben estar notificadas sobre la condición de salud que aqueja la persona afiliada. Por consiguiente, se efectuarían las medidas necesarias para asegurarle el tratamiento pertinente al individuo infectado de VIH, así como lo decreta y exige el Ministerio de Salud y Protección social.

3. Facilitar información conveniente y concisa sobre los tipos de transmisión y manejo de las conductas sexuales seguras, uso de métodos de barrera para la prevención de la transmisión sexual y, a la vez, implantar las medidas correspondientes para soslayar la transmisión perinatal.

4. Las entidades de salud deben delegar el personal pertinente para que asesore a las personas infectadas de VIH, dándoles información sobre su condición de salud y solicitarles que avisen a los compañeros con quienes tuvieron contacto sexual, compartieron agujas o material de riesgo con el sujeto infectado, para que estas personas tomen la iniciativa de ir al centro de salud más cercano y les realicen el diagnóstico de VIH.

5. Los sujetos que tienen VIH se les debe descartar coinfección con tuberculosis pulmonar o extrapulmonar.

6. Realizar notificaciones individuales del caso en la ficha 850, teniendo en cuenta que debe reportarse cada estado clínico (VIH, sida y muerte).

Conviene subrayar que el protocolo que plantea el Instituto Nacional de Salud (INS) está justificado a través de la realización de varios estudios de seroprevalencia, especialmente el de 1988, el cual establecía pronósticos de la magnitud de la epidemia y estrategias para contrarrestarla. En efecto, el Ministerio de Salud y Protección social tuvo en cuenta esta problemática de salubridad y decidió implementar métodos, programas y vigilancia epidemiológica, principalmente a las personas seropositivas que están con una mayor vulnerabilidad. Es importante aclarar que estas estrategias que contrarrestan la curva epidemiológica del VIH han estado expuestas a cambios mínimos o mayúsculos en las últimas décadas debido a las instrucciones que dispone la Organización Mundial de la Salud (OMS).

### 1.3 Modelos de epidemia

Los principales modelos epidemiológicos estándar según Montesinos y Hernández (2007) son SI, SIS y SIR, en los cuales la población se encuentra en distintas categorías según su estado con respecto a la enfermedad, en las que S son los individuos susceptibles (sanos), I los individuos infectados y R los individuos removibles.

Los modelos con los tres estados se denominan modelos de epidemia SIR, las variaciones de este modelo dependen de si los individuos se recuperan y desarrollan inmunidad. Los modelos SI no implican recuperación; los modelos SIS implican recuperación, pero no inmunidad. La enfermedad del VIH emplea el modelo SI o SIR, y se puede modelar en forma determinista.

### 1.3.1 Modelo matemático

El modelo matemático utilizado en el presente trabajo se ha basado en el trabajo De Arazoza y Lounes (2002), en el cual desarrollaron un modelo no lineal para la enfermedad de transmisión sexual mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) para Cuba, teniendo en cuenta como medida de prevención el programa de búsqueda activa de contactos infectados. Ahora bien, la participación del Programa de Notificación de Parejas (PNP) o búsqueda activa por contactos sexuales se ha caracterizado en buscar a las personas que han tenido contacto sexual o compartieron agujas con pacientes diagnosticados con VIH, pero antes de realizar esta actividad de localización y detección, el portador del virus debe dar información detallada de los nuevos y posibles contagiados de VIH. En consecuencia, se encontrarán los posibles contagiados y se les realizará una prueba que arrojará si tienen o no el virus. Es importante puntualizar que el objetivo del programa es la búsqueda de los portadores asintomáticos del VIH (seropositivos) mucho antes de que desarrollen el sida y, al mismo tiempo, controlar la propagación del virus debido a que se convierten en transmisores seropositivos.

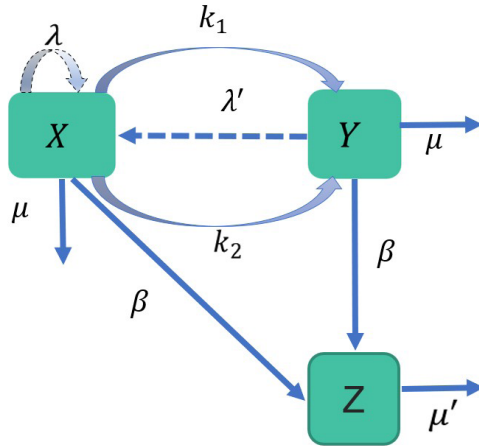
El esquema de la figura 1 es útil para comprender la dinámica entre las distintas poblaciones expuestas por el modelo. Los arcos en líneas continuas indican transferencia de individuos entre poblaciones; los arcos en líneas discontinuas indican incremento en la población de destino por efecto de contactos sexuales entre una persona portadora de la población de origen y otra sana.

Para comenzar, el modelo presenta tres poblaciones: infectados de VIH positivo que no saben de su condición con  $X(t)$ ; los VIH positivos que saben que están infectados con  $Y(t)$ ; y los pacientes con sida, representado por  $Z(t)$ , donde  $\kappa_1$  es la tasa de detección de nuevos seropositivos<sup>1</sup> debido a causas aleatorias,  $\kappa_2$  es la tasa a la cual las personas infectadas de VIH desconocidas son detectadas por el sistema por medio de la búsqueda activa de contactos,  $\beta$  es la tasa a la cual los VIH positivos desarrollan sida,  $\mu$  y  $\mu'$  son tasas de mortalidad de la población sexualmente activa y población con sida, respectivamente,  $\lambda$  es la tasa de nuevas infecciones por VIH a causa de la población de seropositivos no detectados, y por último,  $\lambda'$  es la tasa de nuevas infecciones por VIH a causa de la población de seropositivos detectados.

---

1 En el año 2015 el Programa Conjunto de las Naciones Unidas sobre el VIH/sida (ONUSIDA) pone a disposición el documento "Orientaciones terminológicas de ONUSIDA", el cual agrupa y define varios términos que forman parte de esta epidemia. En efecto, uno de los términos que hace parte del documento y del fenómeno epidemiológico del VIH/sida es el seropositivo (VIH-positivo), el cual se caracteriza en la realización de una prueba serológica que consiste en analizar la sangre del paciente, dando como resultado la detección de anticuerpos que contrarrestan el VIH.

**Figura 1. Diagrama de la dinámica de poblaciones**



**Fuente:** Elaboración propia.

La ecuación 4.1 señala que la población de portadores de VIH desconocidos (X) se incrementa en el tiempo con nuevos infectados producidos por la actividad sexual de la propia población X ( $\lambda X$ ) y de la población infectada Y ( $\lambda' Y$ ). Además, la población X disminuirá por causa de muertes ajenas a la enfermedad de sus integrantes ( $\mu X$ ), disminuirá también por el paso de sus individuos a la población de infectados detectados, ya sea por azar ( $\kappa_1 X$ ) o detectados por el programa de búsqueda activa ( $\kappa_2 XY$ ), y por el paso de individuos a la población de enfermos de sida ( $\beta X$ ).

La ecuación 4.2 indica cómo la población de infectados de VIH conscientes Y aumentará en el tiempo por el paso de individuos de X detectados, ya sea por azar ( $+\kappa_1 X$ ) o por la búsqueda activa de contactos ( $+\kappa_2 XY$ ). Así mismo, la población de infectados Y disminuirá por el paso de indivi-



duos que desarrollan sida ( $\beta Y$ ) y también disminuirá por causas de muerte ajenas a la enfermedad ( $-\mu Y$ ).

La ecuación 4.3 indica que la población de enfermos de sida ( $Z$ ) aumenta por el paso de los infectados por VIH (conocidos o no) que desarrollan la enfermedad ( $+\beta X, +\beta Y$ ), siendo el incremento mayor cuando mayores son estas poblaciones. Esta población  $Z$  disminuirá por la muerte de sus miembros ( $-\mu' Z$ ), siendo esta disminución mayor cuanto mayor sea el número de enfermos.

El siguiente sistema de ecuaciones describe la dinámica de la enfermedad explicada anteriormente:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X + \lambda' Y - (k_1 + \mu + \beta) X - k_2 XY, \quad (4.1)$$

$$\frac{dY}{dt} = k_1 X - (\mu + \beta) Y + k_2 XY, \quad (4.2)$$

$$\frac{dZ}{dt} = \beta X + \beta Y - \mu' Z \quad (4.3)$$

Respecto a las ecuaciones, como es mencionado anteriormente, hay dos formas en que las personas pasan de infectados por VIH desconocidos ( $X$ ) a infectados por VIH conocido ( $Y$ ). Uno es a través del término  $k_2 XY$  (en el modelamiento del crecimiento poblacional cuando dos grupos interactúan se puede representar por el producto): esta es la parte donde consideramos modelar el rastreo de

contactos; el individuo se encuentra a través de sus contactos con personas que se sabe que viven con el VIH. La otra forma en la que se pueden detectar es por medio del término  $k_1X$ , y este término modela todas las otras formas aleatorias de búsqueda para seropositivos. Es importante tener en cuenta que  $1/k_1$  puede verse como el tiempo medio anual desde la infección hasta la detección de las personas que no se encuentran a través del rastreo de contactos. En cuanto a  $\lambda$  y  $\lambda'$ , son tasas de contagios causados por individuos seropositivos no detectados y detectados, respectivamente. En el modelo se toma que  $\lambda$  será mayor que  $\lambda'$ , porque se espera de alguien que conoce su condición de seropositivo una conducta más responsable<sup>2</sup>. Cabe aclarar que el valor de  $\lambda'$  se calcula como  $\lambda' = r\lambda$  y se considera  $r \in (0, 0.1)$ .

Para terminar una interpretación de  $\beta$  según Arazoza et al. (2000), es que el inverso del valor  $\beta$  da una idea del tiempo medio anual que un seropositivo tarda en desarrollar la enfermedad.

---

2 La autora Isabel Sánchez (1998) hace referencia en su libro denominado *Rechazo social hacia las personas seropositivas en la CAPV* que algunas personas seropositivas viven con el miedo de transmitir el VIH a sus parejas por medio de las relaciones sexuales debido a que son conscientes de que el virus ocasionaría varias repercusiones salubres y psicológicas a ese ser querido. Por ello, adoptan una responsabilidad que se verá reflejada en el uso de preservativos o abstinencia sexual para evitar que sean ellos los propagadores del VIH, aunque varios de ellos usan el tratamiento antirretroviral (TAR) para minimizar el riesgo de transmisión del VIH.

## 2. MÉTODO NUMÉRICO PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

El método Runge-Kutta de orden 4 (RK4) es uno de los métodos más prácticos para la resolución de ecuaciones diferenciales. La generalización del método de Euler se le atribuye a Runge (1895), también a las contribuciones hechas por Heun (1900) y Kutta (1901), quien determinó completamente el método Runge-Kutta de orden 4 (Butcher, 2008). Este método se basa en calcular  $Y_{n+1}$  de la siguiente manera:

$$y_{n+1} = y_n + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 \quad (4.4)$$

Donde  $k_1, k_2, k_3, k_4$  tienen la forma:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, y_n), \\ k_2 &= hf(t_n + a_1h, y_n + b_1k_1), \\ k_3 &= hf(t_n + a_2h, y_n + b_2k_1 + b_3k_2), \\ k_4 &= hf(t_n + a_3h, y_n + b_4k_1 + b_5k_2 + b_6k_3) \end{aligned} \quad (4.5)$$

En esta expresión las ponderaciones  $w_1, w_2, w_3$  y  $w_4$  son constantes, en la que la suma se pide sea igual a 1 y cada  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  es la función  $f$  evaluada en un punto selec-

cionado  $(t, y)$ , para el cual  $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ .

De acuerdo con Mathews y Fink (1999), para encontrar los coeficientes apropiados y las expresiones para cada uno de los valores de  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  se debe coincidir los coeficientes con los del método de la serie de Taylor de orden  $N = 4$ , de tal forma que el error de truncamiento local es de orden  $O(h^5)$ . Por lo cual, se realiza la expansión de la serie de Taylor  $y(t + h)$ :

$$y(t + h) = y(t) + y'(t)h + y''(t) \frac{h^2}{2!} + y'''(t) \frac{h^3}{3!} + y^{(4)}(t) \frac{h^4}{4!} + O(h^5) \quad (4.6)$$

De las ecuaciones diferenciales tenemos:

$$\begin{aligned} y'(t) &= f \\ y''(t) &= f_t + f_y y' = f_t + f_y f \\ y'''(t) &= f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2 + f_y (f_t + f_y f) \\ y^{(4)}(t) &= (f_{ttt} + 3f_{tty} f + 3f_{tyy} f^2 + f_{yyy} f^3) \\ &\quad + f_y (f_{tt} + 2f_{ty} f + f_{yy} f^2) \\ &\quad + 3(f_t + f_y f)(f_{ty} + f_{yy} f) \\ &\quad + f_y^2 (f_t + f_y f) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Luego, se expande para cada uno de los valores de las ecuaciones 4.5 en serie de Taylor (mediante el teorema de Taylor para una función de dos variables). Con estas expansiones y las derivadas parciales 4.7 se reemplazan en la siguiente ecuación, donde se iguala el polinomio de Taylor y los valores de Runge-Kutta para  $y_{n+1}$ , se tiene:

$$y + y'h + y'' \frac{h^2}{2} + y''' \frac{h^3}{6} + y^{(4)} \frac{h^4}{24} = y + h (w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4) \quad (4.8)$$

Al simplificar e igualar a cero se obtiene:

$$w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 - y' - y'' \frac{h}{2} - y''' \frac{h^2}{6} - y^{(4)} \frac{h^3}{24} = 0 \quad (4.9)$$

Después, se agrupan y simplifican términos para encontrar los coeficientes desconocidos, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= a_1, \\
 b_2 + b_3 &= a_2, \\
 b_4 + b_5 + b_6 &= a_3, \\
 w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1, \\
 w_2 a_1 + w_3 a_2 + w_4 a_3 &= \frac{1}{2}, \\
 w_2 a_1^2 + w_3 a_2^2 + w_4 a_3^2 &= \frac{1}{3}, \\
 w_2 a_1^3 + w_3 a_2^3 + w_4 a_3^3 &= \frac{1}{4}, \\
 w_3 a_1 b_3 + w_4 (a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \frac{1}{6}, \\
 w_3 a_1 a_2 b_3 + w_4 a_3 (a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \frac{1}{8}, \\
 w_3 a_1^2 b_3 + w_4 (a_1^2 b_5 + a_2^2 b_6) &= \frac{1}{12}, \\
 w_4 a_1 b_3 b_6 &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

(4.10)

El sistema implica 11 ecuaciones con 13 incógnitas. Se deben tener en cuenta dos condiciones adicionales para resolver el sistema. La opción más conveniente es:

$$a_1 = \frac{1}{2}, b_2 = 0. \quad (4.11)$$

Luego, las soluciones para las variables restantes:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{1}{2}, a_3 = 1, \\
 b_1 &= \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{2}, b_4 = 0, b_5 = 0, b_6 = 1, \\
 w_1 &= \frac{1}{6}, w_2 = \frac{1}{3}, w_4 = \frac{1}{6}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Los valores de 3.11 y 3.12 se reemplazan en 4.4 y 4.14 para obtener la expresión del método estándar de Runge-Kutta de orden  $N = 4$ , y se puede ver de la siguiente manera:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \tag{4.13}$$

En donde:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, y_n), \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f_1\right), \\
 k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f_2\right), \\
 k_4 &= f(t_n + h, y_n + h f_3)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

El siguiente valor de  $y_{n+1}$  es determinado por el presente valor  $y_n$  más el producto del tamaño del intervalo ( $h$ ) por una pendiente estimada, donde la suma  $\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$  puede interpretarse como una pendiente promedio.

Nótese que:

- $k_1$  es la pendiente al principio del intervalo.
- $k_2$  es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando  $k_1$  para determinar el valor de  $y$  en el punto  $t_n + \frac{h}{2}$ .
- $k_3$  es una segunda aproximación para la pendiente en el punto medio, pero ahora usando  $k_2$  para determinar el valor de  $y$ .
- $k_4$  es la pendiente al final del intervalo, con el valor de  $y$  determinado por  $k_3$ .

Para terminar, a  $k_1$  y  $k_4$  se les asigna un peso de  $\frac{1}{6}$  en el promedio ponderado, mientras  $k_2$  y  $k_3$  tienen un peso de  $\frac{1}{3}$ .

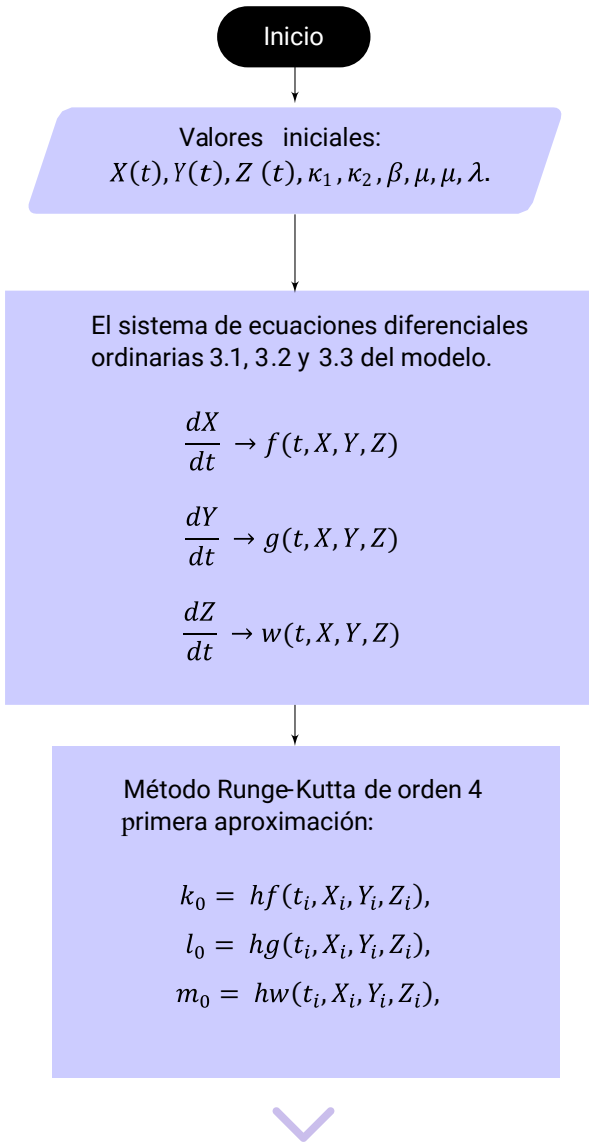


## 3. METODOLOGÍA

### 3.1 Código

El código programado por medio del lenguaje de C++ utiliza el método numérico de Runge-Kutta de orden 4 para aproximar a la solución del sistema de ecuaciones ordinarias. A continuación, se presenta un diagrama de flujo con el propósito de explicar el código realizado.

**Figura 2. Diagrama de flujo**



**Fuente:**  
Elaboración propia.

Segunda aproximación:

$$k_1 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{m_0}{2}, Y_i + \frac{k_0}{2}, Z_i + \frac{l_0}{2}\right),$$

$$l_1 = hg\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{m_0}{2}, Y_i + \frac{k_0}{2}, Z_i + \frac{l_0}{2}\right),$$

$$m_1 = hw\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{m_0}{2}, Y_i + \frac{k_0}{2}, Z_i + \frac{l_0}{2}\right),$$

Tercera aproximación:

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{m_1}{2}, Y_i + \frac{k_1}{2}, Z_i + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$l_2 = hg\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{m_1}{2}, Y_i + \frac{k_1}{2}, Z_i + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$m_2 = hw\left(t_i + \frac{h}{2}, X_i + \frac{m_1}{2}, Y_i + \frac{k_1}{2}, Z_i + \frac{l_1}{2}\right),$$

Cuarta aproximación:

$$k_3 = hf(t_i + h, X_i + m_2, Y_i + k_2, Z_i + l_2),$$

$$l_3 = hg(t_i + h, X_i + m_2, Y_i + k_2, Z_i + l_2),$$

$$m_3 = hw(t_i + h, X_i + m_2, Y_i + k_2, Z_i + l_2),$$

Calcular:

$$X_{i+1} = X_i + \frac{m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3}{6}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}$$

$$Z_{i+1} = Z_i + \frac{l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3}{6}$$

Imprimir  $t, X, Y, Z$

Fin

## 4. VALIDACIÓN DEL MODELO

Después de tener el código elaborado, para su comprobación se tomaron los datos reportados de los nuevos casos detectados de VIH/sida en Cuba entre los años 1986-2000 y los valores iniciales de la simulación del modelo utilizados en Arazoza y Lounes (2002), dando como resultado las representaciones gráficas de las figuras 3(a) y 3(b). En la tabla 1 se presentan los valores iniciales para el caso de Cuba. Además, con los datos reportados de Cuba se hizo el acumulado por año para el VIH y el sida.

**Tabla 1. Valores de Cuba**

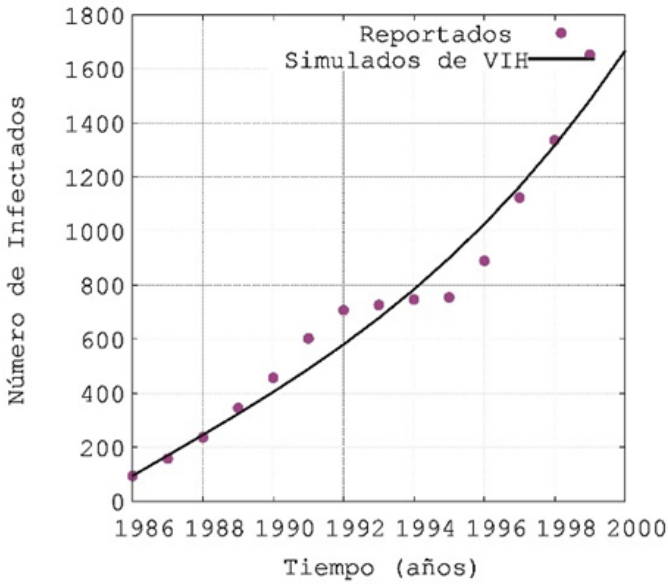
Símbolo	Valor
$X(0)$	230 individuos
$Y(0)$	94 individuos
$Z(0)$	3 individuos
$\mu$	0.0053 (1/año)
$\mu'$	[0.66, 0.85] (1/año)
$\beta$	0.10788 (1/año)
$r$	0.0579 (adimensional)
$k_1$	0.3743 (1/individuo·año)

$k_2$	0.0000227 (1/individuo· año)
$\lambda$	0.5594 (1/año)

**Fuente:** Arazoza y Lounes ( 2002).

Al comparar las simulaciones de infectados con VIH en la figura 3(a) y 3(b), observamos que entre los años 1986 a 1997 de la simulación realizada se asemeja a la representación gráfica del artículo. Por ejemplo, en 3(a) vemos cómo la línea del modelo está entre los datos de los años 1993 y 1994, de igual forma, en la simulación hecha la línea del modelo se encuentra en estos años. También observamos que no son similares en el año 1998, esto puede deberse a un error en los datos proporcionados. Por último, vemos que el dato reportado y el dato del modelo en el año 1999 de la simulación hecha es afín a la simulación de Arazoza.

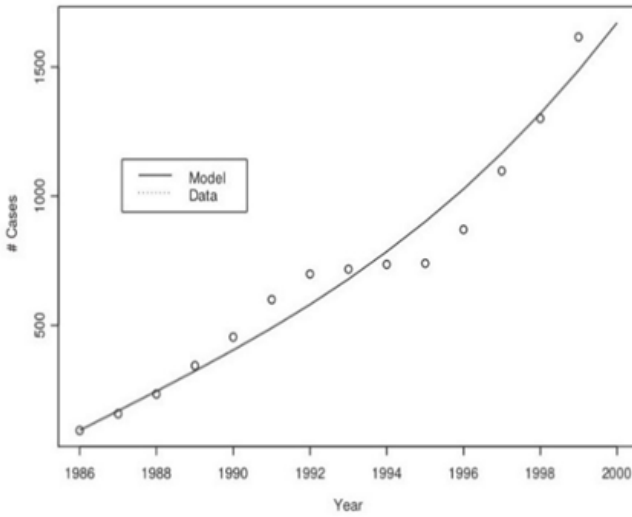
**Figura 3(a).** Simulación de infectados con VIH en Cuba. (a) Simulación de infectados de VIH realizada con la tabla 1



(a)

**Fuente:** datos reportados tomados de Arazoza y Lounes (2002).

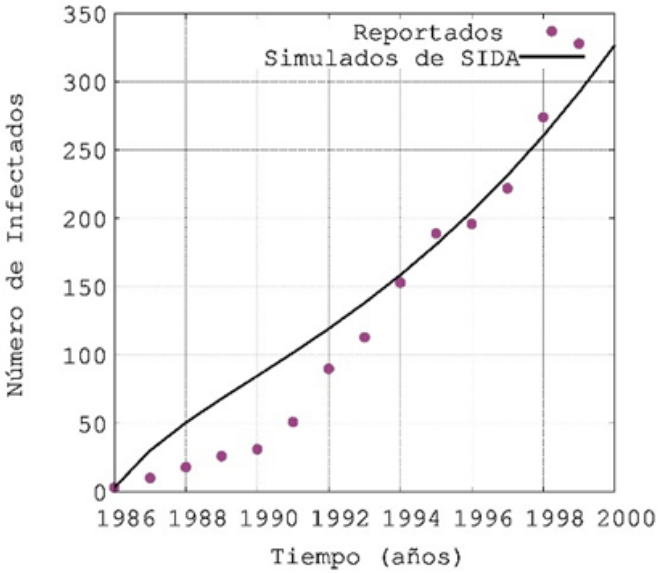
**Figura 3(b).** Simulación de infectados con VIH en CUBA.  
(b) Simulación de infectados con VIH



(b)

**Fuente:** *Arazoza y Lounes (2002).*

**Figura 4(a).** Simulación de infectados con sida en Cuba.  
**(a)** Simulación de infectados con sida realizada con la tabla 1

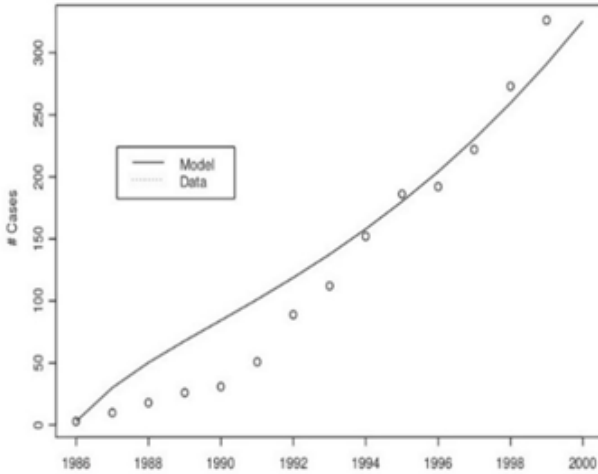


**(a)**

**Fuente:** datos reportados tomados de Arazoza y Lounes (2002).



**Figura 4(b).** Simulación de infectados con sida en Cuba.  
**(b)** Simulación de infectados con sida



**(b)**

**Fuente:** Arazoza y Lounes (2002).

En relación con la simulación de infectados con sida en Cuba, se tomaron diferentes valores de  $\mu' \in [0.66, 0.85]$ , y el valor que más se ajustó fue  $\mu' = 0.745$ . Comparando la simulación realizada en la figura 4(a) con la gráfica del artículo de la figura 4(b) vemos que son semejantes. Por ejemplo, observamos en 4(b) que los datos del modelo se aproximan a los datos reportados de los años 1994 y 1995, y de la misma manera sucede en 4(a). Concluimos que, al aproximarse las simulaciones realizadas con las del artículo, se valida el modelo y el algoritmo implementado.

## 5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

### 5.1 Valores para el caso de Colombia

Para Colombia los valores que mejor se ajustaron al modelo se muestran en la tabla 2. La simulación se realizó entre los años 1986 al 2011 con los datos reales del Ministerio de Salud de Colombia (2012), hallando el acumulado de estos y junto a los datos simulados se graficaron, obteniendo los resultados de las figuras 5 y 6.

**Tabla 2. Valores obtenidos para Colombia**

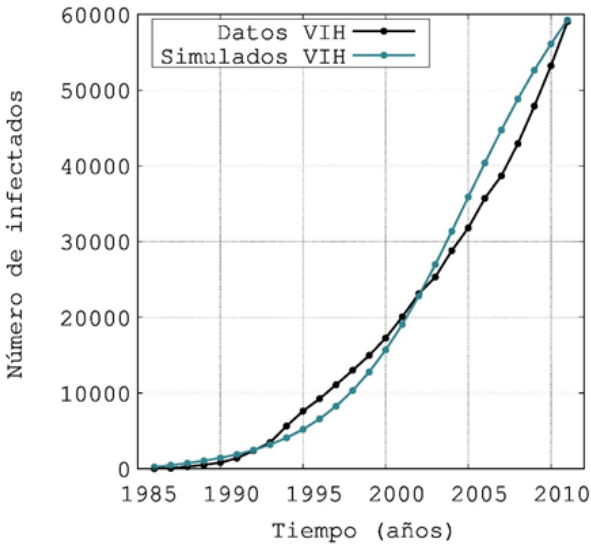
Símbolo	Valor
$X(0)$	290 individuos
$Y(0)$	6 individuos
$Z(0)$	12 individuos
$\mu$	0.00005 (1/año)
$\mu'$	0.33 (1/año)
$\beta$	0.106 (1/año)
$k_1$	0.743 (1/individuo· año)
$k_2$	0.000011 (1/individuo· año)
$\lambda$	0.9794 (1/año)

**Fuente:** elaboración propia.

Es necesario aclarar que, para realizar la estimación de los parámetros, se tomó como punto de referencia los valores del modelo de Arazoza y Lounes para Cuba, mostrados en la tabla 1. Esto ocurre debido a que no se cuenta con información de esos parámetros para el caso de Colombia.

Por esto, la hipótesis de entrada fue asumir esos mismos valores para comenzar a definir la curva de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales. Eventualmente pueden existir infinidad de valores de los parámetros que pueden reproducir la misma curva. Algunos de los parámetros se tomaron de los reportes del Ministerio de Salud de Colombia y con ellos se pudo hacer la estimación de algunos de estos. Entonces, primero se hizo un análisis variando los parámetros, es decir, cuáles son los que más contribuyen en la variación de la curva y así, con una metodología de prueba y error, lograr llegar a un conjunto de valores para los parámetros y que se ajusten a los datos reportados por el Ministerio de Salud. Cabe resaltar que en este tipo de estudio de un modelo es muy difícil encontrar un trabajo donde se estimen todos los parámetros, y algunos se hallan intuitivamente.

**Figura 5. Casos de VIH positivos en Colombia**



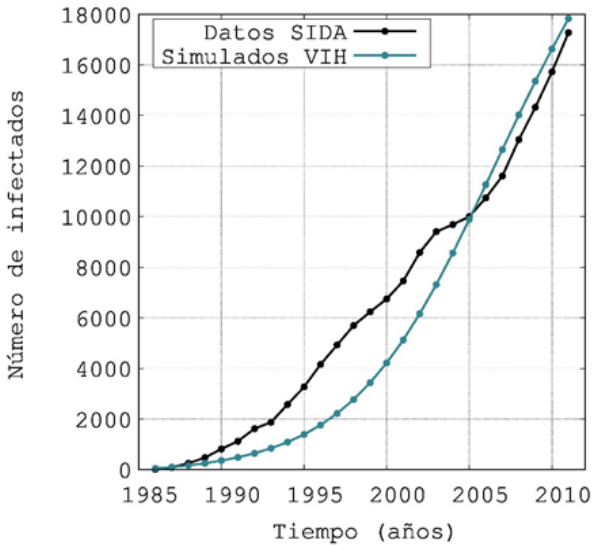
**Fuente:** los datos simulados de color verde son obtenidos con la tabla 2 y los datos de color negro son tomados del Ministerio de Salud y Protección Social (2012).

En la figura 5 se observa cómo aumenta el número de infectados con VIH en el tiempo y cómo se aproximan los datos simulados a los datos reales en los primeros 8 años con una población inferior a los 10.000 infectados, sucediendo lo mismo en los años 2000 hasta el 2004 con una población inferior a los 40.000 infectados, y de nuevo se aproxima desde el año 2010 al 2011 con una población cercana a los 60.000 infectados. Del mismo modo, en la figura 6 se muestra cómo el número de infectados con sida incrementa en el tiempo; vemos que, en los primeros años, los datos simulados se aproximan hasta el año 1989. Luego, de nuevo se acercan en el año 2005 con una población

cercana a los 10.000 pacientes con sida. Igualmente, en el año 2011 tiene una población aproximada de 18.000 infectados.

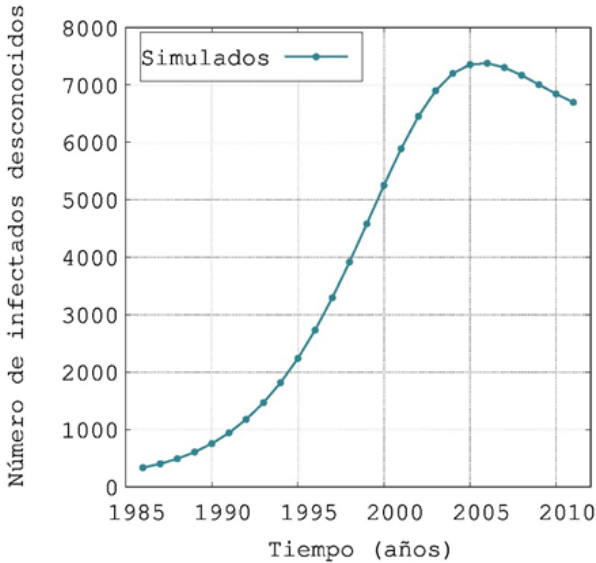
Por último, también se estimó el número de infectados desconocidos que se muestra en la figura 7. Se observa cómo la población incrementa el número de infectados en el tiempo alcanzando un punto máximo superior a los 7000 infectados y luego va disminuyendo hasta el año 2011 con una población inferior de los 7000 infectados.

**Figura 6. Casos de sida en Colombia**



**Fuente:** los datos simulados de color verde son obtenidos con la tabla 2 y los datos de color negro son tomados del Ministerio de Salud y Protección Social (2012).

**Figura 7. Pronóstico de casos de infectados de VIH desconocidos en Colombia**

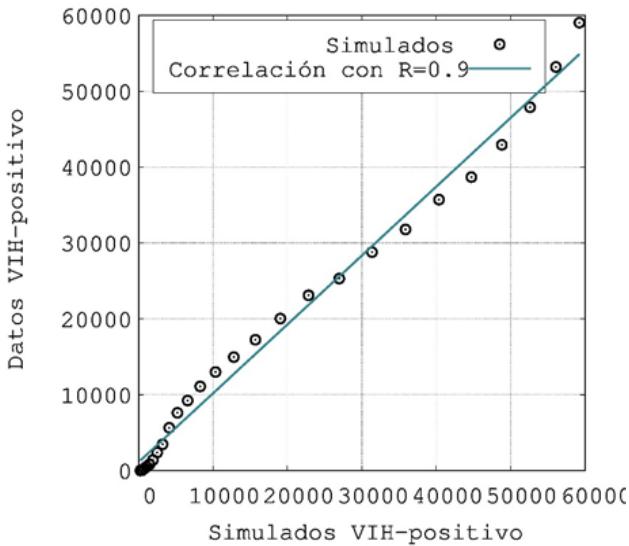


**Fuente:** los datos simulados de color verde son obtenidos con la tabla 2.

Referente a los parámetros encontramos que el valor de  $k_1 = 0.743$  se puede interpretar como  $1/k = 1.34$ , con este valor estimamos que el tiempo medio entre infección y detección es 1.34 años. Este valor evidencia que en Colombia hay políticas de detección por métodos aleatorios, además, este parámetro es un factor sustancial para determina la cantidad de personas infectadas en el país. Otro valor encontrado es  $\beta = 0.106$  o, visto de otra forma,  $1/\beta = 9.4$ , que significa que una persona con VIH+ se demora aproximadamente 9.4 años en desarrollar la enfermedad, esto concuerda con el Ministerio de Salud (s. f.) en

que el periodo de tiempo entre la infección por el virus y la aparición del sida es de aproximadamente de 7 a 11 años.

**Figura 8. Correlación de los datos de VIH-positivo**



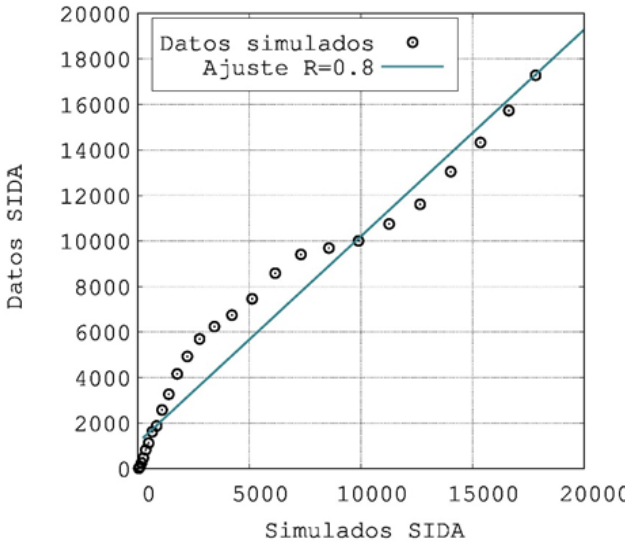
**Fuente:** tomados del *Ministerio de Salud y Protección Social (2012)* con los datos simulados obtenidos con la tabla 2.

También encontramos que  $\mu = 0.00005$ , es decir, que 5 de cada 100.000 personas que son VIH-positivo mueren, este valor se ajustó de acuerdo con la información presentada en *Así Vamos en Salud (2020)*, donde nos muestran las tasas de mortalidad de VIH por cada año en Colombia.

Así mismo, el valor encontrado para  $\mu' = 0.33$  nos quiere decir que 33 de cada 100 personas que desarrollan sida pueden morir a causa de dicha enfermedad, este valor está en el rango de la tasa de mortalidad por años reportada por el Ministerio de Salud y Protección Social (2014). Igualmente, el valor de  $\lambda = 0.97$  representa que 97 de cada 100 personas pueden infectarse por VIH a causa de personas seropositivas no detectadas, demostrando que existe la necesidad de incentivar a los individuos a usar el preservativo y, por ende, a tomar más pruebas rápidas. Por otra parte, la tasa de nuevos infectados de VIH desconocidos que son detectados por el método de búsqueda activa es  $k_2 = 0.00001$ , este valor comparado con el caso de Cuba es inferior y puede estar reflejando una problemática en el control de la enfermedad debido a que no implementan o adoptan programas efectivos como el Programa de Notificación de Parejas de Cuba, el cual se caracteriza para localizar las personas asintomáticas.



**Figura 9. Correlación de los datos de sida**



**Fuente:** tomados del Ministerio de Salud y Protección Social (2012) con los datos simulados obtenidos con la tabla 2.

Ahora, en las figuras 8 y 9 son los resultados de las correlaciones de los datos tomados del MinSalud, y los datos estimados por medio del modelo. La figura 8 corresponde a la correlación para los datos del VIH y nos da un valor de  $R=0.9$ , aproximándose bastante a 1, indicando que el resultado de los parámetros estimados se aproxima bastante bien a los datos reportados. La figura 9 es la correlación para los datos del sida, en donde se obtiene  $R=0.8$ , por lo tanto, se tiene un grado menor de correlación aunque es muy bueno, y esto puede deberse a que en Colombia hace falta tener un registro más detallado de los casos de notifi-

caciones<sup>1</sup>, pero de todas formas es un buen resultado porque se aproxima a 1 y esto evidencia que los parámetros estimados tienen un buen comportamiento para el modelo utilizado.

## 5.2 Variación de parámetros

En el proceso de estimación se realizaron varias simulaciones observando las variaciones para cada uno de los siguientes parámetros:  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $\beta$ . En cada parámetro se tomaron cinco valores diferentes y las simulaciones se realizaron en un intervalo de tiempo entre 0 y 100 años, como se muestra a continuación. Es importante mencionar que no se hizo análisis de  $\lambda'$ , ya que se debe variar  $r$  entre 0 y 0.1. Al hacer la variación, como resultado las poblaciones no presentan un cambio significativo, por esto no es relevante en el estudio.

---

1 En el año 2010 el Ministerio de Salud y Protección Social pone a disposición el documento "Panorama del VIH/sida en Colombia 1983-2010". En este documento hace referencia a que los casos notificados de VIH/sida provienen de distintas fuentes (por ejemplo, vigilancia epidemiológica, vigilancia por laboratorio y estimaciones por modelos), generando un subregistro de casos con discrepancias. Otro aspecto a destacar es que solo desde 2006 implementaron la ficha única para notificar el evento de VIH/sida, muerte por sida y los resultados de laboratorio.

### 5.2.1 Tasas de infecciones por VIH a causa de la población de seropositivos no detectados

Para realizar las diferentes variaciones se tomaron como valores iniciales los mostrados en la tabla 3 y solo se modificaron los valores de  $\lambda$ , obteniendo como resultado las figuras 10, 11 y 12 que son la representación gráfica del número de personas infectadas con VIH desconocidas, conscientes y con sida.

**Tabla 3. Condiciones iniciales ( $X, Y, Z$ )**

Símbolo	$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	$k$	$\beta$	$\mu$	$\mu'$	$k$
Valor	290	6	12	0.000011	0.10688	0.0002	0.33	0.743

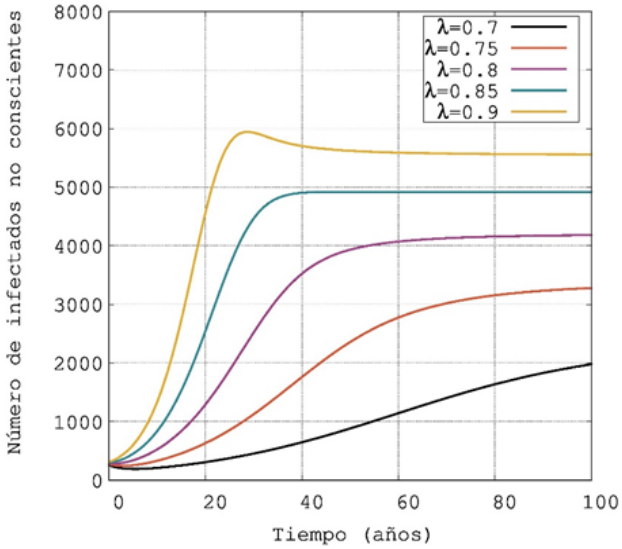
**Fuente:** tomados de la tabla 2 y parámetros iniciales  $\mu, \mu', k_1, k_2$  y  $\beta$ .

En la figura 10 observamos cómo, al aumentar los diferentes valores de  $\lambda$ , incrementa el número de infectados desconocidos. Por ejemplo, al tomar el valor de  $\lambda = 0.7$  incrementa alcanzando los 2000 infectados a los 100 años; al compararla con el valor de  $\lambda = 0.9$  incrementa hasta un punto máximo cercano a los 6000 infectados desconocidos y luego decrece hasta comenzar a estabilizarse,

comenzando aproximadamente a los 60 años. Esto puede deberse a que la población infectada desconocida, al no detectarla por un método, no sea consciente de su enfermedad y no tome medidas de prevención, generando la transmisión de la enfermedad y a su vez incrementando la población mencionada.

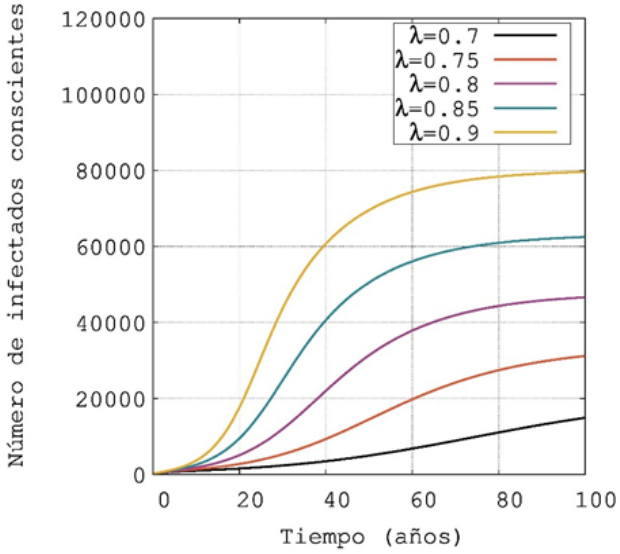
Ahora, la figura 11 muestra para los diferentes valores de  $\lambda$  el incremento del número de infectados de VIH conscientes hasta los 100 años, alcanzando para  $\lambda = 0.7$  una población inferior de 20.000 personas infectadas; al contrastar con  $\lambda = 0.9$ , que alcanza una población de 80.000 personas infectadas, vemos que al ir aumentando el valor de  $\lambda$ , también aumenta la población de infectados conscientes, esto puede deberse a los métodos de detección.

**Figura 10. Variación de la población infectada con VIH no consciente para diferentes valores de  $\lambda$**



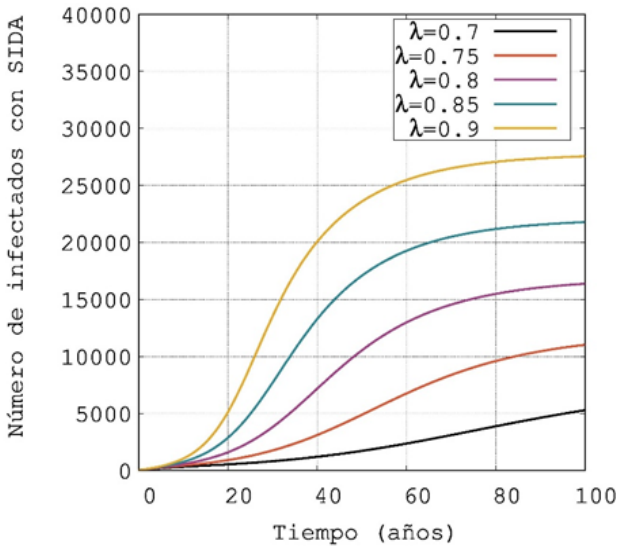
**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 11. Variación de la población infectada con VIH consciente para diferentes valores de  $\lambda$**



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 12. Variación de la población con sida para diferentes valores de  $\lambda$**



**Fuente:** Elaboración propia.

En el caso de la figura 12 observamos para los diferentes valores de  $\lambda$  cómo incrementa el número de infectados con sida hasta los 100 años. Para el valor de  $\lambda = 0.7$  alcanza aproximadamente las 5000 personas, comparado con  $\lambda = 0.8$  supera los 20.000 infectados. Por lo anterior, podemos notar cómo al aumentar los valores de  $\lambda$  aumenta el número de pacientes con sida, esto se debe a que, al aumentar el número de infectados por infectados no conscientes, si no son detectados no podrán tener atención médica y pueden desarrollar fácilmente el sida.

### 5.2.2 Tasas de detección de nuevos seropositivos debido a causas aleatorias

Las figuras 13, 14 y 15 representan la variación de la población por el VIH que no es consciente, que está consciente de su enfermedad y los pacientes con sida en el espacio de tiempo, respectivamente, para diferentes valores de la tasa de detección por métodos aleatorios representados por  $k_1$ , tomando los siguientes valores iniciales:

**Tabla 4. Condiciones iniciales ( $X, Y, Z$ )**

Símbolo	$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	$k$	$\beta$	$\mu$	$\mu'$	$\lambda$
Valor	290	6	12	0.000011	0.10688	0.0002	0.33	0.9794

**Fuente:** tomados de la tabla 2 y parámetros iniciales  $\lambda, \mu, \mu', k_2$  y  $\beta$ .

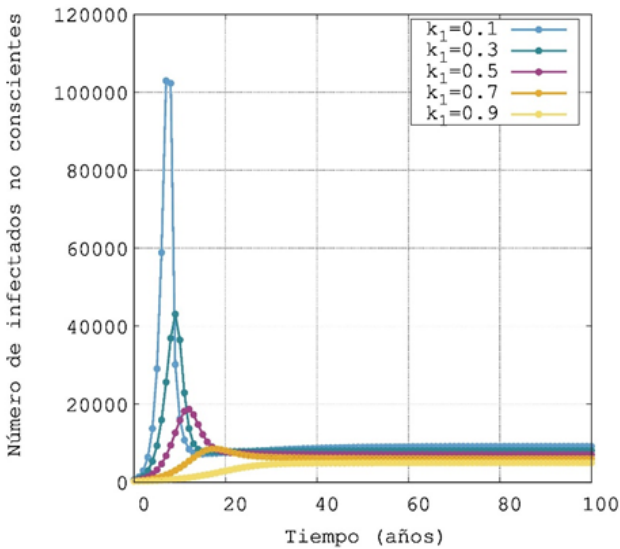
En la figura 13 podemos ver en los diferentes valores, excepto  $k_1 = 0.9$ , cómo aumenta el número de infectados desconocidos en un punto máximo y luego disminuye. Por ejemplo,  $k_1 = 0.1$  su punto máximo es superior a 100.000 infectados, mientras con  $k_1 = 0.5$  alcanza el máximo cerca de los 20.000 infectados. También podemos ver que al aumentar el valor de  $k_1$  disminuye la población, ya que, al detectar más rápido la enfermedad, estos infectados desconocidos pasan a la clase de infectados de VIH conscientes o pacientes con sida. Por otra parte, en el caso de  $k_1 = 0.9$  incrementa en el tiempo hasta encontrar el equi-



libro. Finalmente, todos los valores encuentran la estabilidad a partir de los 40 o 50 años con poblaciones menores a 20.000 infectados.

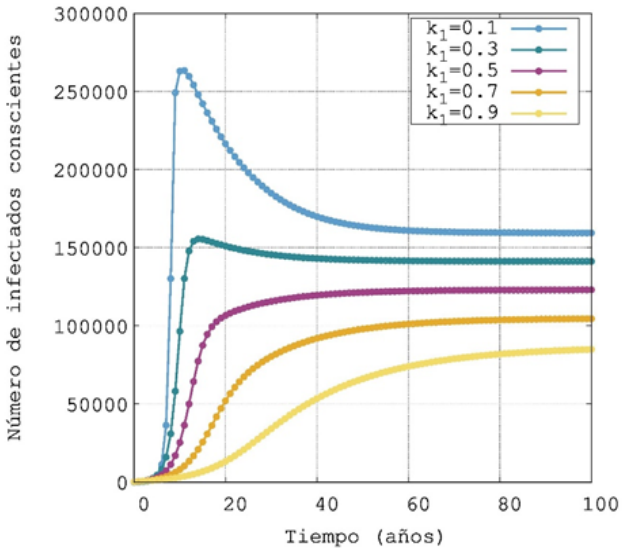
En cuanto a la figura 14, se muestra en los valores  $k_1 = 0.1$  y  $k_1 = 0.3$  el crecimiento del número de infectados conscientes hasta un punto máximo superior a 250.000 y 150.000 respectivamente, luego decrece hasta llegar a sus puntos de equilibrio aproximadamente desde los 60 años.

**Figura 13. Variación de la población infectada con VIH no consciente para diferentes valores de  $k_1$**



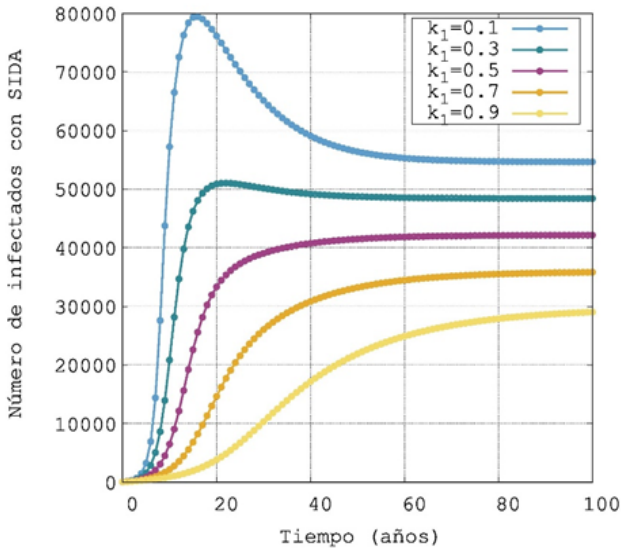
**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 14. Variación de la población infectada con VIH consciente para diferentes valores de  $k_1$**



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 15. Variación de la población con sida para diferentes valores de  $k_1$**



**Fuente:** Elaboración propia.

Con lo anterior nos damos cuenta de que, al ir aumentando los valores de  $k_1$ , disminuye la población de infectados conscientes. Esta disminución puede suceder porque al detectar estas personas con VIH, se les puede ofrecer un tratamiento y métodos de protección al tener relaciones sexuales. Respecto a los valores de  $k_1 = 0.5$ ,  $k_1 = 0.7$  y  $k_1 = 0.9$ , el número de infectados aumenta hasta estabilizarse con una población inferior a los 150.000 infectados.

En la figura 15 crece el número de infectados con sida al tomar los valores de  $k_1 = 0.1$  y  $k_1 = 0.3$ , con puntos máximos cercanos a 80.000 y 50.000, respectivamente. Luego decrecen hasta estabilizarse a partir de los 80 y 60 años, mientras en los valores  $k_1 = 0.5$ ,  $k_1 = 0.7$  y  $k_1 = 0.9$  el número de infectados con sida aumenta hasta que se equilibran con una población inferior a los 50.000 individuos. Así mismo, vemos que al aumentar los valores de  $k_1$  disminuye el número de pacientes con sida, esto se debe a que, al haber una mayor detección por métodos aleatorios, se va a detectar personas con VIH antes de que desarrollen sida brindando un tratamiento, causando que estos infectados no aumenten la población con sida.

### **5.2.3 Tasa a la que el sistema detecta a personas desconocidas infectadas por el VIH, a través de la búsqueda activa de contactos**

Las figuras 16, 17 y 18 representan la variación de la población de personas infectadas con VIH desconocidas, conscientes y con sida, respectivamente, para diferentes valores de la tasa de detección utilizando la búsqueda activa de contactos representado por  $k_2$ , tomando los siguientes valores iniciales:

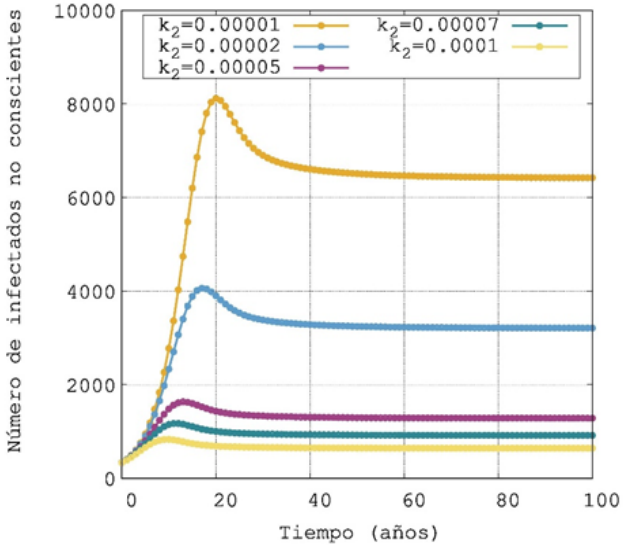
**Tabla 5. Condiciones iniciales ( $X, Y, Z$ )**

Símbolo	$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	$k$	$\beta$	$\mu$	$\mu'$	$\lambda$
Valor	290	6	12	0.743	0.10688	0.0002	0.33	0.9794

**Fuente:** tomados de la tabla 2 y parámetros iniciales  $\lambda, \mu, \mu', k_1$  y  $\beta$

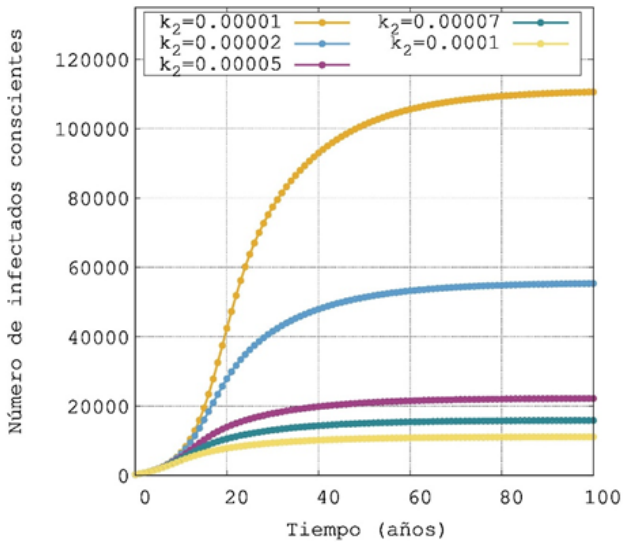
En primer lugar, observamos en la figura 16 el valor de  $k_2 = 0.00001$  cómo el número de infectados desconocidos incrementa, alcanzando un punto máximo alrededor de 8000 infectados a los 20 años, y disminuye hasta equilibrarse a partir de los 80 años. De igual forma, con el valor  $k_2 = 0.00002$  aumenta llegando al punto máximo aproximado de 4000 infectados desconocidos y luego decrece hasta estabilizarse a partir de los 60 años. Por otra parte, con los valores de  $k_2 = 0.00005$ ,  $k_2 = 0.00007$  y  $k_2 = 0.0001$  incrementa alcanzando un punto máximo inferior de los 2000 infectados y seguidamente disminuyen hasta estabilizarse a partir de los 40 años. Igualmente, se aprecia cómo al aumentar los valores de  $k_2$  disminuye la población de infectados desconocidos, esto sucede porque los detectados por búsqueda de contactos pasan a la población consciente de VIH.

**Figura 16. Variación de la población infectada con VIH no consciente para diferentes valores de  $k_2$**



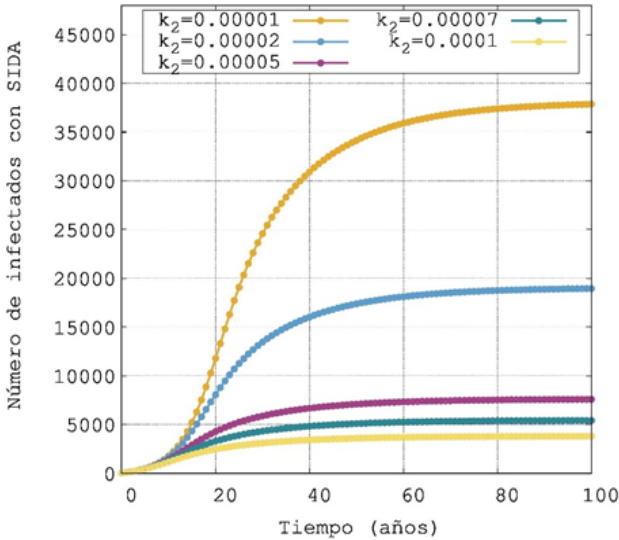
**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 17. Variación de la población infectada con VIH consciente para diferentes valores de  $k_2$**



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 18. Variación de la población con sida para diferentes valores de  $k_2$**



**Fuente:** Elaboración propia.

Ahora bien, en la figura 16 se muestra con los diferentes valores el aumento del número de infectados de VIH conscientes hasta estabilizarse. En los casos de  $k_2 = 0.00001$  y  $k_2 = 0.00002$  se estabiliza cerca a los 120.000 y 60.000, respectivamente. Para el valor de  $k_2 = 0.00005$ , el número de infectados es superior a los 20.000. Por otra parte, para los valores de  $k_2 = 0.00007$  y  $k_2 = 0.0001$ , los infectados conscientes son inferiores a los 20.000. Así mismo, observamos cómo al aumentar los valores de  $k_2$  el número de infectados disminuye, esto se puede deber a que a



las personas infectadas detectadas se les aconseja que se abstengan de la interacción sexual o que tomen medidas preventivas para detener la propagación de la infección.

Podemos observar en la figura 18 cómo los diferentes valores aumentan hasta estabilizarse. Además, el número de pacientes con sida disminuye a medida que se aumentan los valores de  $k_2$ , por ejemplo,  $k_2 = 0.00001$  aumenta hasta estabilizarse alcanzando una población cercana a los 40.000 infectados, mayor que los 5000 infectados del valor de  $k_2 = 0.00007$ . Esto posiblemente suceda porque al dar un tratamiento oportuno a la población infectada con VIH puede hacer más lenta la evolución de la enfermedad, logrando que no desarrollen sida.

#### **5.2.4 Tasa a la cual los infectados de VIH positivo desarrollan sida**

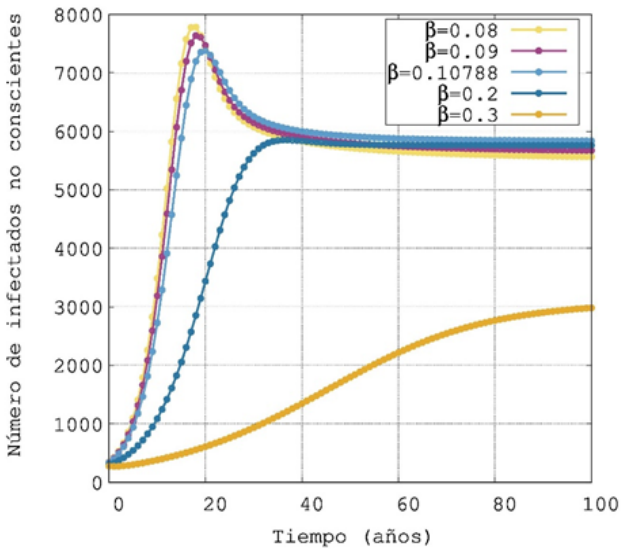
En las figuras 19, 20 y 21 se representa la variación de la población de infectados en el tiempo para diferentes valores de la tasa en la que los infectados de VIH desarrollan sida, representado por  $\beta$  con los siguientes valores iniciales:

**Tabla 6. Condiciones iniciales (X, Y, Z)**

Símbolo	$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	$k$	$k$	$\mu$	$\mu$	$\lambda$
Valor	290	6	12	0.743	0.000011	0.0002	0.33	0.9794

**Fuente:** tomados de la tabla 2 y parámetros iniciales  $\lambda, \mu, \mu', k_1$  y  $k_2$ .

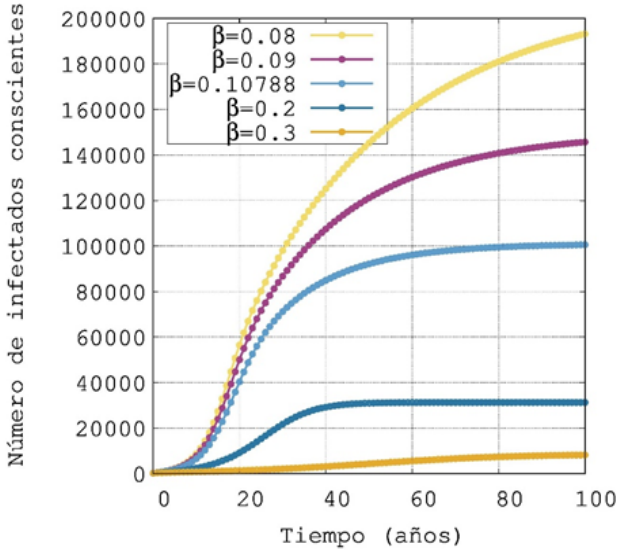
**Figura 19. Variación de la población infectada con VIH no consciente para diferentes valores de  $\beta$**



**Fuente:** Elaboración propia.

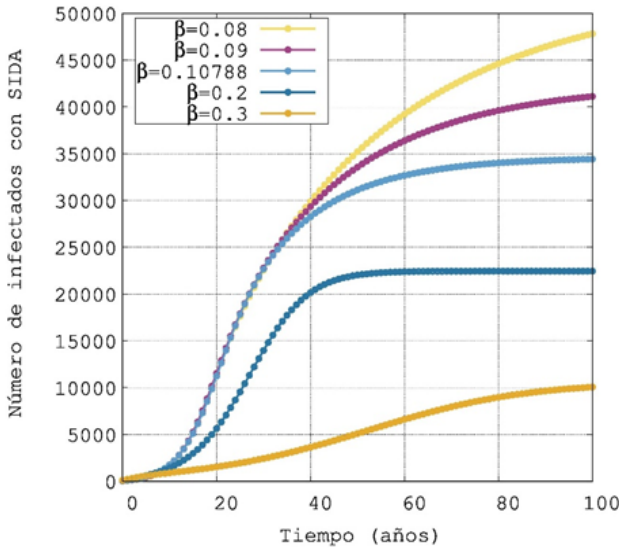
Se observa en la figura 19 los valores de  $\beta = 0.08$ ,  $\beta = 0.09$  y  $\beta = 0.10788$  un aumento hasta alcanzar su punto máximo a los 18 años, con una población cercana a los 8000 individuos que no son conscientes de que tienen sida, al transcurrir el tiempo comienza a decrecer hasta llegar a una estabilidad a los 50 años con una población que se aproxima a los 6000 infectados no conscientes. En el caso de  $\beta = 0.2$  incrementa aproximadamente hasta los 37 años con una población cercana de 6000 individuos y luego se estabiliza. Así mismo, el valor de  $\beta = 0.3$  aumenta hasta los 100 años con alrededor de 3000 infectados. Por otra parte, vemos que al ir aumentando el valor de beta disminuye la población, esto es debido a que la población infectada de VIH desconocida desarrolla el sida, pasando a engrosar la población de pacientes con sida o fallecimientos debido a la enfermedad.

**Figura 20. Variación de la población infectada con VIH consciente para diferentes valores de  $\beta$**



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 21. Variación de la población con sida para diferentes valores de  $\beta$**



**Fuente:** Elaboración propia.

Ahora veamos la figura 20 cuando el valor de  $\beta = 0.08$  el número de infectados conscientes crece en el tiempo, aproximándose a los 20.000 infectados. De la misma forma, los valores de  $\beta = 0.09$  y  $\beta = 0.10788$  aumentan hasta los 100 y 80 años, con una población infectada de 150.000 y 100.000 individuos. Por otra parte, los valores de  $\beta = 0.2$  y  $\beta = 0.3$  incrementan hasta equilibrarse cerca a los 50 y 80 años, respectivamente, alcanzando una población de infectados menor de 40.000 individuos. Por último, al aumentar

los valores de  $\beta$  se disminuye el número de población, esto sucede a causa de que el número de infectados de VIH conscientes al desarrollar el sida pasan a la población de pacientes con sida o también fallecen por la enfermedad.

Con respecto a la figura 21, tomando el valor de  $\beta = 0.08$ ,  $\beta = 0.09$  y  $\beta = 0.10788$ , incrementan hasta los 100 años el número de pacientes con sida, superando los 30.000 individuos. Igualmente, con los valores  $\beta = 0.2$  incrementan estabilizándose a partir de los 50 años con una población aproximadamente de 22.000 individuos. En el caso de  $\beta = 0.3$  crece estabilizándose alrededor de los 100 años con una población de 10.000 pacientes. Finalmente, ocurre lo mismo que en las figuras 15 y 16: al aumentar el valor de  $\beta$  disminuye el número de infectados con sida, esta disminución puede ser causa de la mortalidad de la enfermedad.

### 5.2.5 Tasa de mortalidad de la población sexualmente activa

En las figuras 22, 23 y 24 se muestra la variación de la población de infectados en el tiempo para los diferentes valores de la tasa de mortalidad ajena de la enfermedad, representada por  $\mu$  con los siguientes valores iniciales:

**Tabla 7. Condiciones iniciales ( $X, Y, Z$ )**

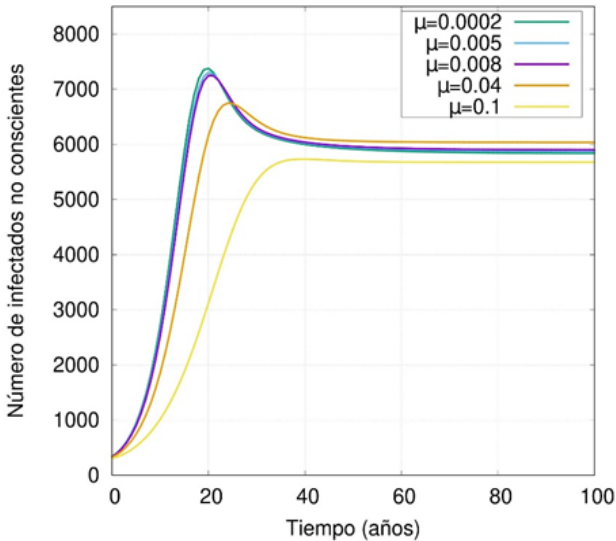
Símbolo	$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	$k$	$k$	$\mu$	$\mu$	$\lambda$
Valor	290	6	12	0.743	0.000011	0.0002	0.33	0.9794

Fuente: tomados de la tabla 2 y parámetros iniciales  $\lambda, \mu', k_1, k_2$  y  $\beta$ .

En la figura 22 se muestra que, para valores de  $\mu = 0.0002$ ,  $\mu = 0.005$  y  $\mu = 0.008$ , el número de infectados de VIH no conscientes alcanza un punto máximo aproximadamente a los 20 años con una población superior a los 7000 individuos, luego disminuyen hasta estabilizarse, comenzando desde los 50 años con una población próxima a los 6000 individuos. En el caso de  $\mu = 0.04$  y  $\mu = 0.1$  también aumentan y decrecen hasta alcanzar un equilibrio después de los 50 años, con una población cercana a los 6000 individuos.

También vemos que al aumentar la tasa de mortalidad ajena a la enfermedad, disminuye la población de infectados no conscientes, esto se debe a que al morir un infectado de VIH desconocido, este ya no puede propagar más la enfermedad, mientras que si es menor, la mortalidad ajena a la enfermedad aumenta el número de infectados desconocidos, como ya vimos con  $\mu = 0.0002$  y  $\mu = 0.1$ .

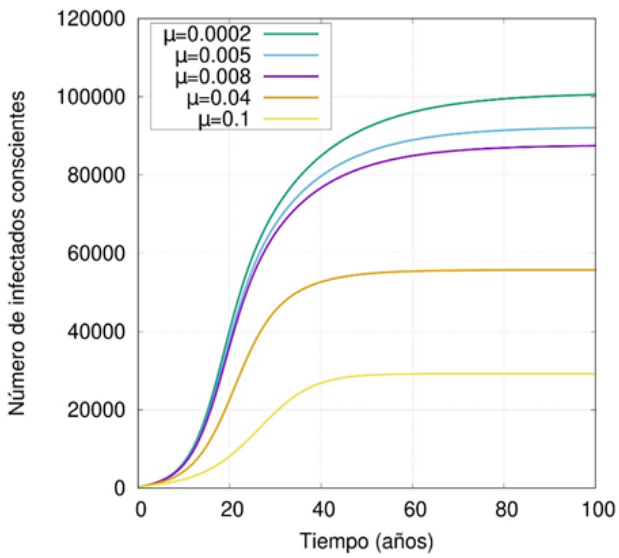
**Figura 22. Variación de la población infectada con VIH no consciente para diferentes valores de  $\mu$**



**Fuente:** Elaboración propia.

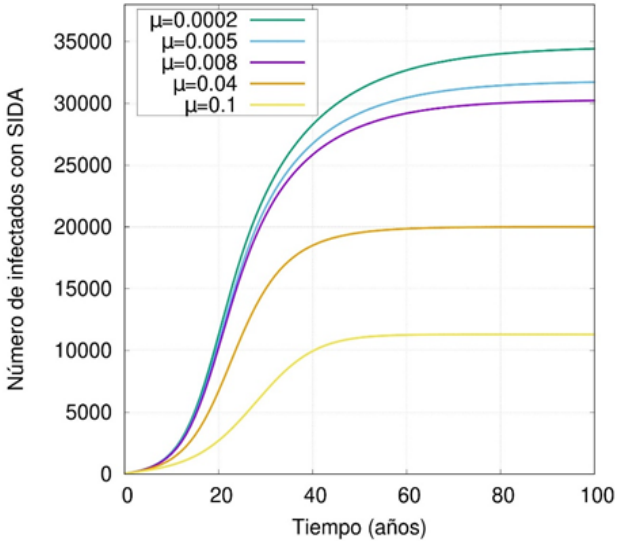


**Figura 23. Variación de la población infectada con VIH consciente para diferentes valores de  $\mu$**



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 24. Variación de la población con sida para diferentes valores de  $\mu$**



**Fuente:** Elaboración propia.

De igual modo, en la figura 23 los valores  $\mu = 0.0002$ ,  $\mu = 0.005$  y  $\mu = 0.008$  aumentan hasta estabilizarse y eso comienza a ocurrir desde los 100 años, con una población de infectados conscientes entre los 80.000 y 10.000 individuos. En los casos donde de  $\mu = 0.04$  y  $\mu = 0.1$  incrementa el número de infectados hasta los 50 años aproximadamente, después se estabiliza con unas poblaciones menores de 60.000 infectados. También ocurre lo mismo

que en el anterior: al aumentar la mortalidad por la enfermedad, el número de infectados de VIH conscientes disminuye por la misma razón.

Por otra parte, en la figura 24, al tomar los valores de  $\mu = 0.0002$ ,  $\mu = 0.005$  y  $\mu = 0.008$ , el número de infectados con sida aumenta en el tiempo hasta llegar al equilibrio a partir de los 100 años, teniendo poblaciones entre los 35.000 y 30.000 pacientes. Similarmente sucede con los valores de  $\mu = 0.04$  y  $\mu = 0.1$  que incrementan el número de infectados hasta comenzar a equilibrarse a partir de los 50 años con poblaciones de 20.000 y alrededor de 11.000 infectados, respectivamente. Por último, cabe mencionar que, al variar la tasa de mortalidad ajena a la enfermedad, ocurre lo mismo que en las anteriores gráficas.

### **5.2.6 Tasa de mortalidad de la población con sida**

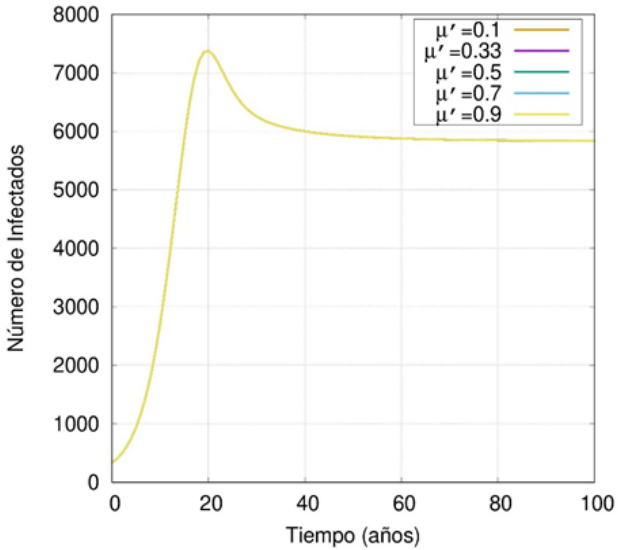
En las figuras 25, 26 y 27 se representa la variación de la población de infectados en el tiempo para los diferentes valores de la tasa de mortalidad de los pacientes con sida, representado por  $\mu'$  con los siguientes valores iniciales:

**Tabla 8. Condiciones iniciales  $(X, Y, Z)$**

Símbolo	$X(0)$	$Y(0)$	$Z(0)$	$k$	$k$	$\beta$	$\mu$	$\lambda$
Valor	290	6	12	0.743	0.000011	0.10688	0.0002	0.9794

**Fuente:** tomados de la tabla 2 y parámetros iniciales  $\lambda, \mu, k_1, k_2$  y  $\beta$ .

**Figura 25. Variación de la población infectada con VIH no consciente para diferentes valores de  $\mu'$**

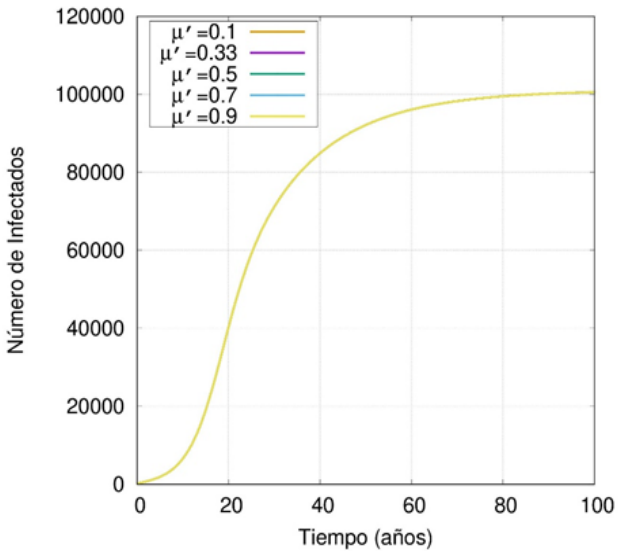


**Fuente:** Elaboración propia.

En la figura 25 el número de personas infectadas en el tiempo que fallecen a causa del sida aumenta hasta un punto máximo aproximadamente a los 20 años, sobrepasando los 7000 infectados no conscientes, luego decrece y se comienza a estabilizar desde los 50 años con una población cercana a 6000 personas infectadas no conscientes.

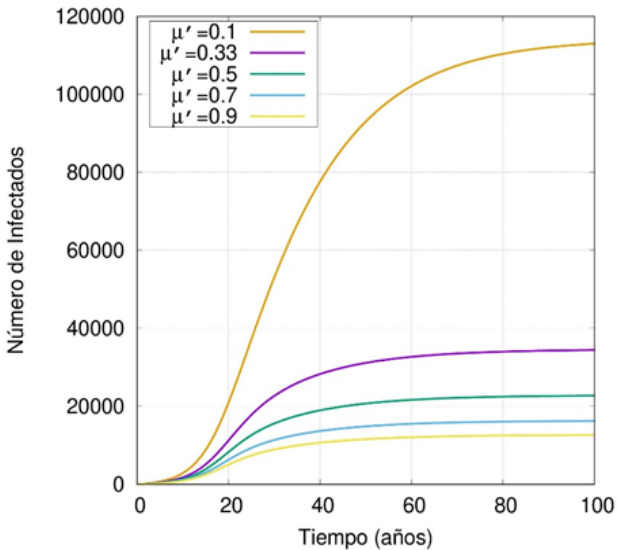
Así mismo, en la figura 26 el número de personas infectadas de VIH conscientes aumenta aproximadamente hasta los 100 años con una población de 10.000 individuos. En ambas figuras solo hay una gráfica para diferentes valores de  $\mu'$  porque al aumentar las muertes a causa del sida, esta no afecta a las poblaciones infectadas de VIH desconocidas ni tampoco a los infectados que son conscientes, ya que no están en la última etapa de la enfermedad y solo se relaciona directamente con población de pacientes con sida.

**Figura 26. Variación de la población infectada con VIH consciente para diferentes valores de  $\mu_0$**



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 27. Variación de la población con sida para diferentes valores de  $\mu'$**



**Fuente:** Elaboración propia.

En relación con la figura 27, al tomar el valor de  $\mu' = 0.1$  el número de pacientes con sida incrementa y comienza a estabilizarse a partir de los 100 años con una población cercana a los 120.000 individuos. De la misma manera, los valores de  $\mu' = 0.33$ ,  $\mu' = 0.5$ ,  $\mu' = 0.7$  y  $\mu' = 0.9$  aumentan el número de infectados con sida en los primeros 50 años y luego se estabilizan con una población inferior a los 40.000 infectados. Para terminar se observa que, al aumentar la tasa de mortalidad causada por la enfermedad,

los pacientes con sida disminuyen, mostrando que están directamente relacionadas.

Se logró observar el comportamiento de la cantidad de las personas diagnosticadas seropositivas, los seropositivos aún no detectados y los pacientes con sida para las diferentes tasas, identificándose que en las tres poblaciones, al variar la tasa a la cual una persona con VIH positivo desconocida es detectada por el sistema ( $k_1$ ), alcanza un mayor número de infectados en menos tiempo y se estabiliza, en comparación con las otras tasas. Este parámetro es determinante para el curso de la enfermedad. Igualmente notamos que, al acercarse el valor de la tasa  $k_1$  a cero, aumenta el número de infectados de VIH, esto sucede porque al sistema le lleva más tiempo en detectar a la persona de VIH desconocida, y esta persona infectada desconocida sin saber propaga más la enfermedad y contribuye a aumentar el número de casos. Si este parámetro llegara a tomar el valor de cero el número de infectados en las tres crecería exponencialmente, entonces necesariamente debe haber un método de detección en la población gestionado en las políticas de salud del país, esto mismo sucede con la tasa de detección por búsqueda de contactos. También vemos que, al variar la tasa de mortalidad de la enfermedad, no afecta a la cantidad de infectados seropositivos ni a los seropositivos desconocidos, ya que este parámetro está relacionado directamente con la población con sida. Respecto a la tasa de mortalidad ajena a la enfermedad, las poblaciones disminuyen al aproximar el valor a uno, pero esto no es bueno considerarlo, ya que si pasara esto significa que el sistema de salud no está controlando la enfermedad y ofreciendo un tratamiento oportuno. Ahora bien, la tasa de las personas que desarrollan sida al aumentar su valor las poblaciones disminuyen, pero esto no tendría mucho sentido, ya que el periodo promedio en desarrollarse la enfermedad es de 7 a 11 años sin ningún tratamiento. Para finalizar, tenemos la tasa de nuevos infectados de VIH a causa de la población de infec-



tados seropositivos desconocidos que al aumentar el valor las poblaciones aumentan, este aumento no es igual a la cantidad de infectados que con  $k_1$ , pero de todas formas muestra la importancia de detectar a la población infectada por VIH positivo desconocida.

## CONCLUSIÓN

En Colombia observamos un incremento de la población de infectados con VIH y de pacientes con sida, para el año 2011 el número de infectados es de 59.249 y 17.832, respectivamente, aproximándose a los datos ofrecidos por el Ministerio de Salud. Además, se encontró que el número de infectados desconocidos es de 6697, evidenciando la importancia de detectar a esta población para evitar la propagación y darle un tratamiento oportuno.

En la estimación de los parámetros, si bien el caso cubano es diferente al caso colombiano al carecer de información, se utilizó como punto de referencia los mismos parámetros de dicho país para tratar de ir ajustando los parámetros para el caso colombiano, ya que son bastantes variables que no se pueden establecer si no tenemos unos parámetros conocidos de algún país. Al realizar la variación de cada parámetro obtuvimos que la tasa de detección de nuevos seropositivos debido a causas aleatorias ( $k_1$ ) es un parámetro influyente para determinar la cantidad de infectados de VIH+, ya que el país no cuenta con un programa de búsqueda de contactos ( $k_2$ ) como en Cuba. En consecuencia, la mayor detección se realiza por métodos aleatorios. El resultado estimado para  $k_1$  se puede interpretar que 1.3 años es el tiempo promedio entre la infección y ser detectado. También nos dio que 97 de cada 100 personas pueden infectarse por VIH a causa de personas no detectadas, además, como ya lo hemos mencionado, el país no cuenta con un programa PNP como el de Cuba, pero sería una buena opción implementarlo para disminuir la población infectada de VIH/sida. Asimismo, se encontró que una persona tarda en desarrollar la enfermedad aproximadamente 9.4 años.

Otro parámetro estimado es la tasa de mortalidad de la enfermedad que se relaciona directamente con la población con sida: al crecer la tasa de mortalidad, causa la disminución y estabilidad de la población con sida, pero un valor alto nos indicaría que están fallando las políticas de prevención y tratamientos de los pacientes, por lo cual no se debe tener en cuenta para reducir la cantidad de infectados porque el sistema de salud busca es proteger la vida y disminuir los fallecimientos. Para terminar, la tasa a la cual los infectados de VIH positivo desarrollan sida se caracteriza que, al tener un valor alto en las tres poblaciones, disminuye el número de infectados, generando un efecto adverso porque esta disminución se debe al fallecimiento de algunos de estos pacientes.

## REFERENCIAS

Arnold-Domínguez, Y., Licea-Puig, M., y Castelo-Elías, L. (2012). VIH/sida y terapia antirretroviral: efectos endocrino-metabólicos. *Revista peruana de epidemiología*, 16(3), 01-09.

Así Vamos en Salud. (6 de abril de 2020). Tasa de mortalidad VIH/sida - Georeferenciado. <https://www.asivamosensalud.org/indicadores/salud-sexual-y-reproductiva/tasa-de-mortalidad-por-vihsida-georeferenciado>

Butcher, J. (2008). Numerical methods for ordinary differential equations. Wiley.

Cuenta alto costo. (2018). Así se comportó el VIH en el 2017. [https://cuentadealtocosto.org/site/categoria\\_publicaciones/vih/](https://cuentadealtocosto.org/site/categoria_publicaciones/vih/)

De Arazoza, H., Marrero, A., Barrios, J., y Joya, G. (2015). La complejidad en la propagación del VIH y sus modelos matemáticos. *INTERdisciplina*, 3(6), 45-62.

De Arazoza, H., y Lounes, R. (2002). A non-linear model for a sexually transmitted disease with contact tracing. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*, 19(3), 221-234.

De Arazoza, H., Lounes, R., Hoang, T., e Interian, Y. (2000). Modeling HIV epidemic under contact tracing - The cuban case. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2(4), 267-274.

Instituto Nacional de Salud. (19 de marzo de 2015). Protocolo de vigilancia en salud pública VIH/sida.

Mathews, J., y Fink, K. (1999). Numerical methods using MATLAB. Prentice Hall.

Mesa, M., Vergaño, J., Sánchez, C. y Muñoz, A. (2010). A mathematical model representing hiv/aids transmission dynamics in a sexually-active population. *Revista de Salud Pública*, 12(2), 308-316.

Ministerio de Salud. (s. f.). Guía de atención del VIH/sida. <https://www.policia.gov.co/sites/default/files/34-SIDA.pdf>

Ministerio de Salud y Protección Social República de Colombia. (2010). Panorama del VIH/SIDA en Colombia, 1983-2010. Un análisis de situación. Fondo de población de las Naciones Unidas Colombia

Ministerio de Salud y Protección Social República de Colombia. (25 de mayo de 2012). Resumen de situación de la epidemia por VIH/sida en Colombia 1983 a 2011. <https://docplayer.es/12515455-Resumen-de-situacion-de-la-epidemia-por-vih-sida-en-colombia-1983-a-2011-25-de-mayo-2012.html>

Ministerio de Salud y Protección Social República de Colombia. (abril de 2014). Seguimiento de la declaración de compromiso sobre el VIH/sida. [https://www.unaids.org/sites/default/files/country/documents//COL\\_narrative\\_report\\_2014.pdf](https://www.unaids.org/sites/default/files/country/documents//COL_narrative_report_2014.pdf)

Montesinos, O., y Hernández, C. (2007). Modelos matemáticos para enfermedades infecciosas. *Salud Pública de México*, (49), 218-226.

Naresh, R., Tripathi, A., y Sharma, D. (2009). Modelling and analysis of the spread of AIDS epidemic with immigration of HIV infectives. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(5-6), 880-892.

ONUSIDA. (2015). Orientaciones terminológicas de ONUSIDA. [https://www.unaids.org/sites/default/files/media\\_asset/2015\\_terminology\\_guidelines\\_es.pdf](https://www.unaids.org/sites/default/files/media_asset/2015_terminology_guidelines_es.pdf)

Organización Mundial de la Salud. (2018). Hoja informativa - Día mundial del SIDA de 2018.

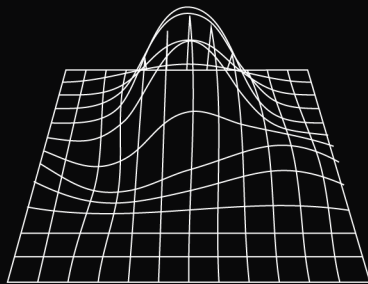
Redacción Salud. (23 de agosto de 2018). VIH en Colombia: 9399 casos nuevos en el 2017. <https://www.eltiempo.com/>

salud/cifras-de-vih-en-colombia-en-el-2017-258960

Sánchez, I. (1998). Rechazo social hacia las personas seropositivas en la CAPV. Ararteko.

Sepúlveda, L., Salguero, B. y Cardona, D. (2011). Dinámica del VIH-sida en Cali. *Revista de Salud Pública*, 13(5), 772-777.

Tripathi, A., Naresh, R., y Sharma, D. (2007). Modeling the effect of screening of unaware infectives on the spread of HIV infection. *Applied Mathematics and Computation*, 184(2), 1053-1068.



 **Editorial**  
UCundinamarca

 **UDEC**  
UNIVERSIDAD DE  
CUNDINAMARCA