UdeC UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA | 50 Años

GENERACIÓN **SIGLO 21**

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EN GRADO NOVENO

Editorial UCundinamarca | UdeC UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

**Contento Sarmiento, D. M.**

**Resolución de problemas sobre desigualdades geométricas en grado noveno.**

**Fusagasugá: Editorial de la Universidad de Cundinamarca. 2020.**

**103 p.**

**ISBN: 978-958-52515-7-1**

ISBN: 978-958-52515-7-1
Primera Edición, 2020
Dirección de Investigación
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Universidad de Cundinamarca
https://www.ucundinamarca.edu.co//
investigación@ucundinamarca.edu.co
Dg 18 No. 20-29 Fusagasugá


Editorial de la Universidad de Cundinamarca
editorial@ucundinamarca.edu.co
Autor: Diana Marcela Contento Sarmiento
Colaboradores: Martha Lidia Barreto Moreno
Osvaldo Jesús Rojas Velásquez.
Corrección de estilo: Yesid Castiblanco Barreto.
Diseño editorial: Fec Suministros y Servicios sas
Revisión editorial: Rosemberg del Carpio.

El presente libro ha sido fruto de la labor investigativa del Grupo de Investigación e Innovación en Modelación Matemática y Computacional – GIIMMYC.

En cuanto a la información consignada en el presente documento, fue revisada y evaluada por pares evaluadores externos doble ciego con el fin de garantizar una valoración crítica e imparcial sobre la calidad de los manuscritos; por lo cual los autores fueron informados sobre las recomendaciones dadas por los pares para realizar los respectivos cambios y/o ajustes del caso, para finalmente ser aprobados por el Comité Editorial de la Universidad de Cundinamarca

El desarrollo y el resultado final representado en el presente libro fue posible gracias a:

**Dr. Adriano Muñoz Barrera**
Rector

**Dra. María Eulalia Buenahora Ochoa**
Vicerrectora Académica

**Dr. José Zacarías Mayorga Sánchez**
Director de Investigación Universitaria

**Mtra. Aura Esther Álvarez Lara**
Decana de la Facultad de Educación

**Colaboradores:**
Martha Lidia Barreto Moreno - Universidad de Cundinamarca
Osvaldo Jesús Rojas Velásquez - Universidad Antonio Nariño

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EN GRADO NOVENO

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

# RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EN GRADO NOVENO

Diana Marcela Contento Sarmiento

**CONTENIDO** **PAGINA**

## INTRODUCCIÓN

La geometría, como parte fundamental de la matemática e instrumento para expresar la realidad, fue la asignatura principal en muchas partes del mundo. Esta rama de la matemática tiene múltiples aplicaciones en las ciencias, en la naturaleza, en el desarrollo tecnológico y en la vida cotidiana. La geometría ha perdido parte de su importancia en las aulas de clase, debido a diversas dificultades en los procesos de enseñanza-aprendizaje y la planeación curricular.

Según Gutiérrez (2002), se debe "… enseñar geometría porque estimula el pensamiento espacial y es un instrumento valioso para analizar las relaciones aritméticas y algebraicas y porque las construcciones geométricas contribuyen al desarrollo de las habilidades manuales, y su respectiva incidencia en el desarrollo intelectual"[1].

Tradicionalmente en la escuela, la enseñanza de la geometría se ha ocupado de favorecer el carácter deductivo. Este proceso ha ido cambiando y actualmente se apoya en el carácter algebraico formal, lo cual ha generado que el aprendizaje de la mayoría de los conceptos y las propiedades geométricas no sean representativas para el estudiante, en los cuales se deja a un lado herramientas importantes. Existen otras técnicas que intervienen en este proceso como es la percepción y la manipulación de figuras geométricas, las cuales favorecen el aprendizaje de los contenidos geométricos de los estudiantes; sin embargo, su uso en el salón de clase es limitado.

La enseñanza de la geometría está presente en los diferentes niveles educativos, pues propicia el desarrollo del pensamiento geométrico y prepara a los estudiantes para resolver problemáticas de la vida cotidiana. Para Rojas (2009), diversas investigaciones se dirigen a la necesidad de recuperar y mantener la geometría en el currículo de la escuela. Estas se dividen en dos grupos:

- Las que analizan la necesidad de retomar las formas tradicionales de enseñarla.
- Las que consideran que el enfoque tradicional se debe modificar e introducen nuevos métodos y medios (recursos tecnológicos) en su enseñanza.

Este segundo grupo es el más divulgado en la actualidad, aunque cabe resaltar que a pesar del uso de *software* de geometría dinámica (SGD) en el proceso de enseñanza, el aprendizaje de la geometría sigue presentando limitaciones. Debido a estas tendencias los docentes han abandonado la manera tradicional de abordar la geometría en el aula.

Una de las temáticas que presenta mayores potenciales en el área de geometría, para el aprendizaje de los estudiantes, es la relacionada con las desigualdades geométricas, por la cantidad de recursos intelectuales y manuales que moviliza en su proceso; a pesar de ello, esta temática es limitada en los currículos de las escuelas. Este estudio enfatiza en el primer grupo, que expone Rojas (2009), pues se retoma la enseñanza de la geometría, específicamente las desigualdades geométricas entendidas como la comparación significativa entre dos cantidades, que revela si están relacionadas de alguna forma a través de material manipulable e instrumentos tradicionales, los

[1] Gutiérrez, C. (2002). Didáctica de la matemática para la formación docente. Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica. Volumen 22, Primera Edición, Cartago, Costa Rica.

cuales fueron el eje central de su origen.

La enseñanza-aprendizaje de la geometría se llevó a cabo durante muchos años con instrumentos tradicionales. El trabajo con materiales manipulables, la regla y el compás, es de una importancia significativa para el estudiante, ya que con este se desarrollan las habilidades: de visualización, abstracción y generalización. También permiten profundizar en el conocimiento de algunas propiedades geométricas y desarrolla habilidades en el manejo de los instrumentos.

Un proceso en el aula basado en actividades que favorezcan la experimentación, búsqueda y exploración del contenido geométrico por el estudiante, en el cual el eje central sean las desigualdades geométricas, favorece un aprendizaje robusto de la geometría. El desarrollo del pensamiento visual y la independencia cognoscitiva en los estudiantes se favorece con la utilización en el aula de materiales manipulables, la regla y el compás. Este es uno de los fines de este estudio: contemplar la enseñanza de la geometría a través de las desigualdades geométricas, como eje integrador del aprendizaje del estudiante.

El uso de las desigualdades geométricas para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría es una propuesta que surge de la experiencia profesional de la investigadora, al observar el limitado desarrollo del componente geométrico en los estudiantes. En este sentido se pretende retomar, además de materiales manipulables, instrumentos que fueron base y fundamento de la geometría, y que se encuentran actualmente relegados del aula de clase como lo son: la regla y el compás.

Es de destacar que: "Solo los conceptos que son construidos por los propios niños son conocimientos realmente operativos, permanentes, generalizables a contextos diferentes del aprendizaje. Por el contrario, los conocimientos que simplemente trasmitimos a los alumnos, pero que no son construidos por ellos mismos, no quedan integrados en sus estructuras lógicas y, en consecuencia, solo pueden ser aplicados en condiciones muy similares a las iniciales del aprendizaje"[2]. En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría es importante generar conocimientos que perduren y que sean generalizables a diferentes situaciones de la vida cotidiana; este propósito se alcanza si se permite que sea el estudiante quien construya su conocimiento. En este sentido, la resolución de problemas, los materiales manipulables e instrumentos como la regla y el compás propician la construcción y fijación de nuevos conocimientos geométricos, en particular de las desigualdades geométricas, y por ende, del aprendizaje geométrico.

La enseñanza-aprendizaje de la geometría ha ocupado a los investigadores en diferentes reuniones y congresos. Esta temática y en particular las desigualdades geométricas han sido abordadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME, por su sigla en inglés), International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME) y en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros. Como resultados de estas reuniones y eventos, se muestran propuestas de modelos, estrategias, metodologías y actividades, todas dirigidas a minimizar las dificultades en la enseñanza de la geometría.

Mammana y Villani (1998) en el *Documento de discusión para un estudio ICMI* centra su estudio en las "Perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI". En este se

[2] Martínez, A. (1989). Una metodología activa y lúdica para enseñanza de la geometría. Madrid: Síntesis.

identifican los retos más importantes y las tendencias emergentes para el futuro, también se destaca el interés por el uso de materiales didácticos (manipulables y visuales) para mejorar la calidad de la enseñanza de la geometría. En el ICMI 2001 se considera a la geometría como una herramienta vital para el entendimiento, y también como una parte intuitiva y concreta de las matemáticas, ligada a la realidad. El ICMI 2008 centra su atención en la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediante SGD.

La introducción de los SGD en la enseñanza de la geometría, en ocasiones limita la posibilidad de manipular figuras geométricas concretas y que los estudiantes aprendan de esas vivencias.

Bartolini y Boero (1998) presentan las bondades de hacer uso de la historia en el aula de clase para favorecer la motivación y el aprendizaje. Díaz (2000) plantea que el desarrollo integral del individuo requiere de un desarrollo psíquico, motor e intelectual, y esto se puede lograr a través de materiales manipulables y construcciones geométricas.

Villani (2001) reconoce los cambios que ha tenido la enseñanza de la geometría y expresa la necesidad de retomar un hilo conductor que permita desplazarse del pasado reciente al futuro cercano. Berinde (2004) expone que las construcciones permiten comprender las verdades fundamentales que yacen escondidas tras una figura geométrica. Abrate y Pochulu (2008) abordan la temática de resolución de problemas como una alternativa para la enseñanza de la geometría, que favorece el razonamiento y el aprendizaje.

En la actualidad el componente geométrico es abordado a través de SGD, por diversos autores como: Laborde (1995), Lingefjärd (2011), Tatar, Kağizmanli y Akkaya (2014), Koyuncu (2014) y Gutiérrez y Jaime (2015), entre otros, los cuales enfatizan que la interacción con los SGD favorece el desarrollo cognitivo y la adquisición de conocimientos. La autora de este estudio considera que para ubicar de nuevo la geometría en un lugar prominente se hace necesario retomar las herramientas con las que se generó geometría (la regla y el compás) y su historia, complementado de ser necesario por algún SGD.

La historia de la matemática desempeña un papel vital en las clases de geometría, pues permite a los estudiantes y maestros pensar y hablar de forma significativa, enriquece el currículo, profundiza los valores culturales y amplía el conocimiento que los estudiantes construyen en la clase.

Por otra parte, la resolución de problemas en los cuales se involucra la historia de las matemáticas constituye una tendencia que favorece el razonamiento de los estudiantes, enseña a enfrentar situaciones nuevas y da la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática. También brinda una buena base matemática y favorece la idea de que hacer matemáticas es resolver problemas.

Este trabajo parte de las dificultades que presentan los estudiantes, en busca de herramientas que fortalezcan el aprendizaje robusto del conocimiento geométrico; se muestra que mediante el diseño de actividades se favorece el aprendizaje y razonamiento y, por ende, un robusto conocimiento geométrico en los estudiantes.

A través de la aplicación de métodos empíricos como la encuesta realizada a docentes de grado noveno del Colegio Teodoro Aya Villaveces y la experiencia de la investigadora por más de cinco años, se pudo constatar como insuficiencias las siguientes:

- Es escaso el tratamiento de las desigualdades geométricas en la escuela.

- Se carece de motivación e interés por el aprendizaje de la geometría en los estudiantes, por lo cual la base conceptual es limitada.
- Es limitado el uso de relaciones y comparaciones entre perímetros y áreas de figuras geométricas, para aprendizaje de las desigualdades geométricas.
- Los estudiantes carecen de habilidades en el manejo de instrumentos y materiales manipulables.
- La inclusión de las TIC ha relegado el uso de los instrumentos tradicionales.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado permiten determinar el siguiente **problema de investigación**: ¿cómo favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, a través de desigualdades geométricas en las estudiantes de grado noveno del Colegio Teodoro Aya Villaveces?

Se precisa como **objeto de estudio:** el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Se infiere como **objetivo general**: diseñar actividades sobre desigualdades geométricas, para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en las estudiantes de grado noveno del Colegio Teodoro Aya Villaveces.

Acorde con el objetivo, el **campo de acción** se enmarca en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas mediante el uso de la historia de la matemática como recurso didáctico.

Para ofrecer la solución del problema, se precisa la siguiente **hipótesis científica**: el proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas, sustentado en las construcciones geométricas, la resolución de problemas retadores, el uso de la historia de la matemática como recurso didáctico y la incidencia del pensamiento visual favorecen el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de grado noveno del Colegio Teodoro Aya Villaveces.

En aras de dar cumplimiento al objetivo y lograr resolver el problema planteado, así como para guiar el presente estudio, se proponen las siguientes **tareas de investigación**:

1. Elaborar el estado del arte sobre el proceso de enseñanza de la geometría, específicamente sobre las desigualdades geométricas en el grado noveno.
2. Determinar los fundamentos teóricos que sustentan el proceso de enseñanza de la geometría, en particular de las desigualdades geométricas en el grado noveno.
3. Elaborar actividades basadas en desigualdades geométricas, para favorecer el proceso de enseñanza de la geometría en las estudiantes de grado noveno del Colegio Teodoro Aya Villaveces.
4. Valorar la viabilidad de las actividades elaboradas.

**Metodología de la investigación**

En la investigación se asume el paradigma cualitativo, con un enfoque de investigación-acción. Se combinan métodos y técnicas, de los niveles teórico y empírico. Entre los métodos teóricos se tienen:

**Histórico-lógico**: se emplea con el fin de valorar la evolución y el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular de las desigualdades geométricas en la escuela.

**El análisis y la síntesis**: para lograr la sistematización de la información sobre las desigualdades geométricas y de los diferentes criterios al respecto, precisar tendencias y concepciones que permitieron la elaboración de la propuesta.

Entre los métodos empíricos utilizados se tiene:

**La observación participante**: facilita obtener información sobre el proceso de la geometría, en particular la enseñanza de las desigualdades geométricas.

*Encuesta**:** a los profesores de matemática de la Institución para obtener información sobre las dificultades acerca del proceso de enseñanza de la geometría, en particular de las desigualdades geométricas en grado noveno. También a los estudiantes se les aplica una encuesta de satisfacción terminada la implementación de las siete actividades.*

Los métodos **matemáticos estadísticos** se utilizan para el procesamiento de la información obtenida a través de los métodos y las técnicas del nivel empírico, en diferentes momentos de la investigación. Se hace uso del procedimiento del cálculo porcentual.

La población objeto de investigación son las estudiantes del grado noveno del Colegio Teodoro Aya Villaveces, ubicado en el municipio de Fusagasugá (Cundinamarca). La muestra la conforman 18 estudiantes del grado noveno, grupo 905.

El **aporte práctico** radica en actividades basadas en desigualdades geométricas, que se sustentan en la resolución de problemas retadores, el uso de la historia de la matemática como un recurso didáctico, las construcciones geométricas y la incidencia del pensamiento visual, para favorecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en las estudiantes de grado noveno del Colegio Teodoro Aya Villaveces.

El estudio consta de introducción, cuatro capítulos y conclusiones.

# CAPÍTULO 1. ESTADO DEL ARTE

La enseñanza de la geometría en la secundaria, en algunas escuelas, por directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, se orienta con el uso de SGD, los cuales aportan herramientas útiles para lograr el aprendizaje en los estudiantes, pero en ocasiones se limita el desarrollo de habilidades con instrumentos tradicionales. En este capítulo se realiza un análisis sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y las desigualdades geométricas a través de las construcciones geométricas y de la resolución de problemas. También se abordan estas temáticas por medio de la historia de la matemática como recurso didáctico. Por último, se hace referencia a investigaciones en el contexto colombiano.

## 1.1. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en el grado noveno

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, como parte de la educación matemática, ha atravesado constantes cambios, lo que ha obligado a cambiar las prácticas del docente en el aula. A continuación, se referencian algunas investigaciones respecto a este proceso en la secundaria.

### 1.1.1. Enseñanza de la geometría en el ciclo secundario[3]

Santaló (1985) estudia la enseñanza de la geometría en el ciclo secundario, en estudiantes entre los 12 y 16 años. Este autor propone dos ciclos para la enseñanza de la geometría: el básico (3 años) y el superior (2 años). El ciclo básico es considerado como el más importante, pues debe brindar al estudiante todo lo necesario para comprender y actuar en el mundo de hoy, en el cual toma como un reto la búsqueda de metodologías adecuadas para que estos conocimientos logren ser aprendidos. En el ciclo superior se debe profundizar en la axiomática y poner un mayor énfasis, si se identifica que el estudiante posee una vocación hacia carreras con alto contenido matemático.

Santaló (1985) plantea que el objetivo de la enseñanza de la geometría en la secundaria se dirige a:

- Informar sobre el espacio exterior, en el que identifica la forma de las figuras, así como sus propiedades.
- Ejercitar el método deductivo como medio para ordenar el pensamiento y adquirir los conocimientos necesarios para la vida contemporánea.
- Desarrollar el pensamiento crítico, la expresión verbal precisa y la capacidad de abstracción.
- Impulsar la imaginación y la creatividad, en las cuales se estimule el pensar independiente, la elaboración y el desarrollo de ideas propias.
- Fomentar la habilidad para resolver problemas, en la que se introduzca la construcción de modelos geométricos y el uso de gráficos, como medios para visualizar, intuir y comprender mejor situaciones problemáticas.
- Integrar las ideas geométricas con las otras ramas de la matemática, para formar conciencia de la unidad de esta.

Aunque estos objetivos son claros existen diferencias, las cuales se hacen presentes en la manera como cada docente planea alcanzarlos en el nivel secundario. Santaló (1985) describe año por año los contenidos por orientar y da algunas indicaciones pertinentes. Por ejemplo, en el primer

[3] Santaló, L. (1985). *Enseñanza de la geometría en el ciclo secundario (estudiantes de 12 a 16 años de edad)*. Universidad de Buenos Aires. pp. 11-23

año del ciclo básico (12 años) insiste en el uso de la regla, el compás y el transportador para las construcciones geométricas, como herramientas tradicionales que aportan en la enseñanza de la geometría, entre otros temas.

La autora comparte los criterios dados por Santaló (1985), pues aporta elementos importantes como es el trabajo con regla y compás; la no utilización o inclusión de elementos axiomáticos en la secundaria, ya que en este ciclo no es de interés general para todos y requieren un mayor nivel de comprensión, el cual no se logra en la secundaria. También se considera que la geometría, como el razonamiento matemático de las formas de la naturaleza, es lo que debe tener principal interés en la secundaria.

#### 1.1.2. El camino por seguir[4]

Villani (2001) realiza una proyección respecto al camino por seguir en cuanto a la enseñanza de la geometría, para lo cual propone cinco acciones dirigidas a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría:

- No cambiar los procesos de enseñanza de la geometría, pues desde la antigüedad fueron significativos y se lograba el aprendizaje de los estudiantes.
- El currículo debe tener una coherencia interna, pero admitir discontinuidades siempre y cuando se favorezca el aprendizaje.
- El aprendizaje de la geometría por repetición se ha convertido en la metodología más utilizada, pero resalta que la práctica con la regla y el compás es aún deseable en el aula de clase.
- No limitar la geometría a formas bidimensionales como único objeto de estudio.
- El método de enseñanza de la geometría debe favorecer el razonamiento de los estudiantes.

La omisión de algunas de estas acciones propuestas, genera las dificultades presentes en el proceso de enseñanza de la geometría actualmente. En la primera acción se pone énfasis en utilizar la historia de la matemática como recurso didáctico y el uso de los instrumentos en el aula, fines hacia los cuales se dirige este estudio.

#### 1.1.3. Categorías para el análisis didáctico de prácticas de enseñanza de geometría a alumnos de 12 a 15 años[5]

Sgreccia y Massa (2009) realizan un estudio el cual denominan “Geometría del profesor”, entendido como una estructura compleja; entre su concepción disciplinar, como resultante de su formación específica, sus valoraciones como contenido de enseñanza y su actuación en el aula. En estas condiciones se propician procesos reflexivos en los estudiantes, para la construcción de representaciones mentales y comprensión de relaciones espaciales.

Estos autores plantean que: “La clase de geometría destinada a alumnos de 12 a 15 años ha de gestionarse considerando como punto de partida sus saberes previos, experiencia e intuición de los estudiantes asociado a las percepciones del mundo sensible y al conocimiento escolar del nivel primario, y recurriendo a actividades cercanas a lo contingente, con carácter de experiencias

[4] Vinicio, V. (2001). *Camino a seguir. Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI.* Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. pp. 20-29.

[5] Sgreccia, N. y Massa, M. (2009). Categorías para el análisis didáctico de prácticas de enseñanza de geometría a alumnos de 12 a 15 años. En Lestón, P. (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 187-196). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

empíricas, para avanzar hacia elaboraciones geométricas cada vez más abstractas”[6]. Se es del criterio que la concepción y el actuar del docente frente a la geometría dejan una huella notable en los estudiantes, por ello es importante realizar un autoanálisis a la didáctica, que se usa a fin de lograr los mejores resultados de aprendizaje.

### 1.1.4. The students’ perspective of geometry teaching and learning in high school[7]

Gamboa y Ballestero (2010) desarrollan su estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en secundaria, cuyo objetivo era identificar la percepción de los estudiantes de secundaria respecto a la enseñanza-aprendizaje de la geometría. Como parte del resultado inicial, los estudiantes ven la geometría como algo sin importancia, algo que no van a necesitar en el futuro, como un tema fácil en el cual no se necesita profundizar, pues basta con memorizar fórmulas y propiedades.

Según Gamboa y Ballestero (2010) la apreciación observada es que el estudiante le da verdadera importancia a aquello que es útil para la vida, además caracterizan la enseñanza de sus profesores como tradicional, es decir: definen conceptos, dan unos ejemplos y colocan ejercicios de práctica. La visualización, las construcciones, las conjeturas y la contextualización a la vida diaria no son abordados en clase de geometría. También consideran que la enseñanza de la geometría debe estar orientada hacia el desarrollo de habilidades como: la exploración, visualización, argumentación y justificación.

La autora de este estudio considera que la geometría se desarrolla en el aula de clase como si fuera una receta de fórmulas y teoremas, y se han dejado a un lado procesos como la argumentación, el razonamiento, la exploración, la visualización y la justificación, los cuales son esenciales para el desarrollo de habilidades geométricas en el estudiante.

### 1.1.5. ¿Rebirth of Euclidean Geometry? Learning model focused on modeling and simulation for learning and instruction volume[8]

Lingefjärd (2011) plantea que la esencia del conocimiento matemático se ha centrado en la capacidad de construir objetos geométricos, lo cual ha sucedido durante años. Durante la segunda mitad del siglo XX, las construcciones de la geometría euclidiana desparecieron casi por completo del plan de estudios en la mayoría de los países, entre ellos Suecia (excepto Uruguay y Grecia). Estos contenidos fueron reemplazados por tópicos de la matemática moderna, la cual enfatiza la algebrización por encima de la geometría, pues introduce nuevos contenidos como la teoría de conjuntos y los sistemas axiomatizados, probabilidades y estadística, ciencias computacionales y matemática discreta.

En Suecia el uso de SGD en el aula, como el GeoGebra, ha cambiado las circunstancias del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. En este estudio se aduce que a través del uso del GeoGebra por parte de los profesores de matemáticas, se posibilita que “… las construcciones geométricas vuelvan a las aulas”[9].

La autora de este estudio no comparte la enseñanza de la geometría basada únicamente en

---

[6] Fioriti, G. (2006). Didácticas específicas. Reflexiones y aportes para la enseñanza. Buenos Aires: Miño y Dávila editores - UNSAM.

[7] Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). The students’ perspective of geometry teaching and learning in high school. Revista Electrónica Educare, XIV(2), 125-142. Recuperado de http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/906

[8] Lingefjärd, T. (2011). ¿Rebirth of Euclidean Geometry? Learning model focused on modeling and simulation for learning and instruction. Volumen 6, pp. 205-215.

[9] Lingefjärd, T. (2011). ¿Rebirth of Euclidean Geometry? Learning model focused on modeling and simulation for learning and instruction. Volumen 6, p. 211.

el uso de los SGD, sin embargo, el objetivo descrito por este autor pone de manifiesto la importancia de construcciones geométricas en el aula de clase, como esencia del conocimiento matemático. Con respecto a las construcciones geométricas, se considera pertinente primero el trabajo en el aula con instrumentos tradicionales y después hacer uso de los SGD.

#### 1.1.6. Problems of teaching and learning of geometry in secondary schools in Rivers State, Nigeria[10]

Adolphus (2011) realiza un estudio a 300 estudiantes y 30 profesores procedentes de diez escuelas secundarias en el estado de Rivers, a fin de establecer las dificultades presentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría. Tras el análisis de datos, las dificultades identificadas son:

- Es escasa la base de la mayoría de los profesores de matemáticas en geometría.
- Es limitada la base conceptual de los estudiantes en matemáticas, y no les es posible resolver un problema, incluso cuando se les dan ejemplos similares.
- El entorno de enseñanza y aprendizaje no es el adecuado.
- La actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje no es la correcta, dado que carecen de voluntad y disposición para aprender.
- Los profesores carecen de compromiso debido a la falta de motivación en los estudiantes.

Se considera que algunas de estas dificultades, junto con otras identificadas por la autora de este estudio, hacen que el desempeño en las diferentes pruebas del ámbito internacional y nacional, sea limitado respecto al componente geométrico en distintos países.

#### 1.1.7. Effect of instruction based on origami spatial visualization, geometry and geometric reasoning achievement[11]

Arici y Aslan (2013) realizan un trabajo en Turquía a un grupo de 184 estudiantes del grado décimo, con el objetivo de identificar el efecto de la instrucción basada en la geometría del origami, la visualización espacial, el aprendizaje de geometría y el razonamiento geométrico.

En este estudio se divide el grupo en dos: un grupo de control (94 estudiantes), el cual recibe instrucción regular durante una unidad de geometría en un salón de clases de grado décimo; el otro grupo experimental (90 estudiantes) recibe la instrucción basada en origami durante cuatro semanas. La prueba de visualización espacial (SVT) se utiliza para medir esta habilidad en los estudiantes. Los resultados indicaron que la instrucción basada en origami tuvo efecto significativo en todas las variables dependientes (la visualización espacial, el aprendizaje de geometría y el razonamiento geométrico).

La autora de este estudio considera que el origami puede ser integrado como una herramienta útil en las lecciones de construcciones geométricas en la escuela secundaria, para hacer que el aprendizaje de la geometría sea eficaz.

En la literatura revisada y la experiencia de la autora se pudo constatar la limitada disponibilidad de tiempo en la escuela para abarcar los temas geométricos, por lo cual la geometría se orienta de manera teórica y sin mostrar su aplicabilidad. Además, esta temática se ubica en la última etapa del periodo escolar en algunas instituciones educativas, es limitado el uso de los

[10] Adolphus, T. (2011). Problems of teaching and learning of geometry in secondary schools in Rivers State, Nigeria. Department of Science and Technical Education. *International Journal of Emerging Sciences*, 1, 143-152.

[11] Arici, S. y Aslan, F. (2013). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), February. DOI: 10.1007/s10763-013-9487-8

instrumentos tradicionales para la construcción en las clases y la enseñanza no propicia un aprendizaje significativo en los estudiantes.

## 1.2. Investigaciones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas a través de la resolución de problemas y construcciones geométricas

### 1.2.1. Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos[12]

Schoenfeld (1985) hace sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Este autor pone énfasis en el intento de comprender la naturaleza de los procesos mentales del pensamiento de los estudiantes, que intervienen en la resolución de problemas. Schoenfeld (1985) plantea que "… existen tantas maneras de enseñar eficazmente a pensar matemáticamente, como existen profesores de talento"[13], una de ella es mediante la resolución de problemas y plantea una serie de ejemplos para llevar a cabo en el aula.

Es de destacar, primeramente, que estas sugerencias son válidas para la enseñanza de la geometría a través de la resolución de problemas y también es significativo el intento de comprender la naturaleza de los procesos mentales del pensamiento, para lograr un adecuado desempeño del estudiante en las clases de geometría.

### 1.2.2. Construcciones con regla y compás[14]

Pan (2000) afirma que las construcciones con regla y compás poseen aspectos importantes los cuales son observables a través de la historia, y considera inapropiado el uso de instrumentos diferentes a la regla y el compás en el salón de clases. Además, precisa que existieron construcciones imposibles con regla y compás (los tres problemas griegos), lo cual hizo que estos instrumentos perdieran cierto grado de confiabilidad para algunos matemáticos, aspectos que son importantes que los estudiantes los conozcan.

Es necesario destacar que en algunas ocasiones la geometría es abordada en la escuela como un proceso terminado e ideal, sin permitir ver los obstáculos que han estado presentes a través de la historia, los cuales sin lugar a dudas han sido relevantes para concertar las ideas geométricas. Desde este punto de vista es significativo utilizar la historia de la geometría como una herramienta para fomentar la motivación en los estudiantes.

### 1.2.3. Problemas de optimización y pensamiento matemático[15]

Malaspina (2001) plantea que: "Es importante que los docentes conozcamos una variedad amplia de problemas de optimización: los que se presentan en la vida cotidiana, los que tienen que ver con juegos y estrategias, los relacionados con construcciones, los de geometría, los que tienen que ver con el azar"[16]. Este autor afirma que luego de conocer los problemas se debe "… reflexionar sobre ellos, manejar adecuadamente el ensayo y error, buscar la visualización, proponer nuevos enunciados o contextualizaciones, resolver el mismo problema de varias formas, hacer variantes al problema y

[12] Schoenfeld, A. (1985). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Simposio La enseñanza de la matemática a debate. pp. 25-66. University of Rochester (EE. UU.).

[13] Schoenfeld, A. (1985). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Simposio La enseñanza de la matemática a debate. p. 25. University of Rochester (EE. UU.).

[14] Pan, A. (2000). Construcciones regla y compás. Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. pp. 36-46.

[15] Malaspina, U. (2001). Problemas de optimización y pensamiento matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17, 930-936. Perú.

[16] Malaspina, U. (2001). Problemas de optimización y pensamiento matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17, 932. Perú.

crear nuevos problemas"[17]. En este estudio, se proponen problemas de optimización relacionados con áreas y perímetros.

En los problemas de optimización de la geometría euclidiana o isoperimetrías, la intuición tiene un papel importante para prever la resolución o dar una buena aproximación a la resolución. La autora de este estudio comparte las ideas planteadas en este artículo, dado que los problemas de optimización de la geometría euclidiana poseen una gran riqueza geométrica, la cual se puede potenciar a través de la resolución de problemas y así facilitar la aprehensión de los conceptos geométricos.

### 1.2.4. A geometric construction using ruler and compass, exploring, investigating and discovering in mathematics[18]

Berinde (2004) explica que los problemas de construcciones geométricas en los cuales se utilizan regla y compás, forman una clase muy especial de problemas que, con el fin de resolverlos, requieren no solo un buen conocimiento de los resultados básicos de la geometría, sino también habilidades especiales y de la inteligencia. En las últimas décadas la geometría ha perdido la importante posición que tenía en el plan de estudios de las escuelas secundarias y superior. Esto es lamentable, pues a fin de ser bien asimilada, la geometría requiere que el estudiante posea habilidades de resolución de problemas e invertir tiempo en la comprensión de las verdades fundamentales, que yacen sutilmente escondidas detrás de una figura geométrica.

Hasta cierto punto no se comparte lo planteado por Berinde (2004), pues para aprender geometría no se requiere ser inteligente, pero sí es necesario poseer ciertas habilidades que no están relacionadas directamente con la inteligencia. La geometría en la escuela ha quedado en muchas ocasiones en el olvido, a causa de la planeación curricular, entre otros aspectos, por lo cual las construcciones geométricas no son abordadas, desaprovechando la riqueza y las habilidades especiales que desarrolla en los estudiantes para el aprendizaje de las desigualdades geométricas.

### 1.2.5. La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos[19]

Siñeriz (2002) estudia la enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás en la escuela media argentina. En este trabajo se destaca el uso de las heurísticas planteadas por Polya (1962), pues la regla y el compás poseen ciertas formas de proceder propias que pueden enriquecer los principios heurísticos. Siñeriz (2002) elabora un modelo teórico, en el cual describe los elementos característicos de la conducta competente del docente, al enseñar a resolver problemas de regla y compás.

Este autor plantea algunos métodos para llevar a cabo las construcciones con regla y compás, como: la figura de apoyo y la figura semejante, entre otros, los cuales tienen como soporte la teoría de Polya (1962). En cuanto a las heurísticas, como reglas para favorecer la resolución de problemas de manera eficaz, fueron clasificadas en: destrezas, herramientas, métodos y sugerencias

[17] Malaspina, U. (2001). Problemas de optimización y pensamiento matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17, 932. Perú.
[18] Berinde, V. (2004). A geometric construction using ruler and compass. Exploring, investigating and discovering in mathematics. pp. 27-33. Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7889-0_3
[19] Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 5(1), 79-101.

generales. A modo de conclusión es posible, a través de la regla y el compás, desarrollar heurísticas que permitan enseñar métodos de resolución de problemas.

De acuerdo con el artículo, las construcciones geométricas tienen un rol indudable en el sistema de Euclides desde la antigüedad y son un instrumento para trabajar las temáticas propuestas en el currículo escolar. A través de problemas de regla y compás, desde el punto de vista heurístico se favorece el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, por lo cual estos instrumentos deben estar presentes en las clases de geometría de la secundaria.

#### 1.2.6. Las figuras de análisis en el aula de matemática[20]

Se comparte el criterio que "… la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas"[21]. En este sentido, Micelli y Crespo (2011) conceden una gran importancia a las figuras de análisis en la geometría, plantean la necesidad de que estas existan en el aula de clase, pero al mismo tiempo hacen evidente los obstáculos que podrían presentar los estudiantes al realizar dichas figuras; sobre todo en el proceso de análisis, en el cual la visualización interviene directamente sobre la figura realizada.

Micelli y Crespo (2011) aseveran que este proceso puede conducir a razonamientos equivocados si la figura no es adecuada; por otra parte, se afirma que para "… esbozar una figura de análisis, es necesario tener un conjunto de conocimientos de la geometría (figuras, cuerpos geométricos, construcciones geométricas, etc.) y un conjunto de habilidades (intelectuales y prácticas) que le permitan, a partir de la imaginación, sintetizar en una figura una situación dada y explicarla"[22]. La enseñanza de la geometría enmarcada en las construcciones geométricas va más allá de realizar figuras de análisis. En este proceso, para que el estudiante pueda a partir de una figura realizar razonamientos apropiados, debe poseer una base de conocimientos geométricos (conceptos, figuras geométricas y trazos válidos, entre otras) y habilidades en el uso de instrumentos.

#### 1.2.7. Investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments[23]

Koyuncu, Akyuz y Cakiroglu (2014) analizan la estrategia de los futuros docentes frente a la resolución de problemas geométricos, en la cual se puso a disposición los SGD y los entornos de papel y lápiz, para analizar cuál de estos recursos era el de mayor uso. Los resultados revelaron que, si bien los participantes utilizan principalmente soluciones algebraicas, prefieren soluciones geométricas y en su mayoría a través de los SGD. Como tal, el uso de ambos entornos simultáneamente en la solución de los mismos problemas parece aportar beneficios importantes.

Es criterio en este estudio, que en ocasiones no se tiene en cuenta la manera como el estudiante comprende o comprendería mejor cierto tema, la mayoría de las veces se piensa en la forma como se resuelve cotidianamente, así esta no sea tan asequible para el estudiante. Lo que sucede con los SGD es que el docente en algunas ocasiones hace uso de ellos sin haber establecido

[20] Micelli, M. y Crespo, C. (2011). Las figuras de análisis en el aula de matemática. pp. 719-737. México. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4866/1/MicelliLasfigurasALME2011.pdf
[21] Poincaré, H. (1913). Dernières pensées. p. 27. París: Flammarion.
[22] González, M., García, L. y Lamothe, M. (2005). Resolución de problemas geométricos a través de la modelación gráfica. Instituto Superior Pedagógico Raúl Gómez García, Guantánamo, Cuba.
[23] Koyuncu, I. Akyuz, D. y Cakiroglu, E. (2014). Investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. International Journal of Science and Mathematics Education, 13(4), 837-862. Recuperado de http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-014-9510-8

una base conceptual geométrica, lo cual en el concepto de la autora de este estudio es equívoco, en esas condiciones. El uso de los SGD es apropiado para explorar, conjeturar y mostrar al estudiante la belleza de la geometría inmersa en la dinámica. Se retoma esta investigación, a pesar de no estar en el campo de acción, pues se considera que una sólida formación de profesores incide en la enseñanza de la geometría en el aula.

La literatura revisada en este epígrafe evidencia el trabajo en dos direcciones: los que utilizan SGD para las construcciones y los que rescatan el trabajo con regla y compás en el aula.

## 1.3. Investigaciones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular de las desigualdades geométricas, a través de la historia de la matemática como recurso didáctico

A continuación, se realiza un análisis sobre los aportes de diferentes investigaciones al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, a través de la historia de la matemática como recurso didáctico, para una mejor comprensión del epígrafe.

### 1.3.1. Tendencias innovadoras en educación matemática[24]

De Guzmán (1992) resume de manera general el panorama actual de la educación matemática, en el cual destaca las situaciones históricas que han generado grandes cambios en la enseñanza de las matemáticas. Este análisis se centra en las tendencias actuales, enfocadas en: favorecer los procesos del pensamiento matemático más que los contenidos; conceder importancia al posicionamiento afectivo del estudiante frente a la matemática y ver la educación matemática como un proceso intercultural.

Las herramientas útiles para enfrentar las tendencias actuales son: la solución de problemas y la historia de la matemática. En relación con la historia de la matemática afirma que: "… proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés"[25]. Por otra parte, aduce que si se conoce "… la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan y sus distintas consecuencias, las aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir y la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado"[26].

Por otro lado, De Guzmán (1992) plantea que cuando se aborda la enseñanza de la matemática y las investigaciones en educación matemática desde un enfoque histórico, es posible:

- Precisar cómo han surgido los planteamientos teóricos.
- Identificar cuáles son los problemas abiertos, en cada periodo histórico, su evolución y su situación en la actualidad.
- Enmarcar en tiempo y espacio, los asuntos que han llamado el interés y la atención de los investigadores.
- Señalar las conexiones de la matemática con otras ciencias.

El planteamiento de este autor coincide con las expectativas de la autora de este estudio,

[24] De Guzmán, M. (1992). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. Studia Paedagogica. Revista de Ciencias de la Educación, (21), 19-26.
[25] De Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en educación matemática. Olimpíadas Matemáticas Argentinas. Buenos Aires.
[26] De Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en educación matemática. Olimpíadas Matemáticas Argentinas. Buenos Aires.

pues relaciona la solución de problemas no rutinarios con la historia de las matemáticas como recurso didáctico, pues estas herramientas permiten que el estudiante comprenda una idea compleja, de un modo más adecuado. Además, favorece el desarrollo del pensamiento y motiva a los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas.

### 1.3.2. History in mathematics education[27]

Fauvel y Maanen (2000) en su trabajo responden al interrogante: ¿qué papel tiene la historia de la matemática en la educación matemática? Para ello, analizan y evalúan el estado actual de la educación matemática. Los asuntos abordados fueron: el contexto de políticas; cuestiones filosóficas, interdisciplinarias y multiculturales; historia de la matemática para la formación de profesores; y formación histórica y entendimiento estudiantil de la matemática. También hacen referencia a la historia como apoyo de diversas exigencias educativas; a la integración de la historia de la matemática en el aula de clases; soporte histórico para temas particulares; y el uso de fuentes originales en el aula de clases, entre otros temas relacionados.

Fauvel y Maanen (2000) exponen, de manera amplia, información de gran interés, pues ponen en contexto el uso de la historia de la matemática en las aulas de clase. También brindan un panorama internacional (Marruecos, Brasil, Hong Kong, Italia, Países Bajos, Francia, Alemania, Austria, China y Rusia, entre otros), el cual es importante para la autora de este estudio, y en esta investigación se exponen ejemplos de uso en el aula.

### 1.3.3. “Malditos sean la regla y el compás”, historias de matemáticas alternativas

Pérez (2007) afirma que “… existen constelaciones de hechos matemáticos… bien interesantes. Me pregunto si… los profesores de matemáticas de todos los niveles, no podrían invertir su tiempo con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano”[28]. El autor aborda lo que para él son las matemáticas ortodoxias (incluidas en el libro *Los Elementos de Euclides*, “la biblia” matemática), en las cuales solo tiene validez lo que se pueda construir con regla y con compás, y las heterodoxias son aquellas que solo hacen uso de la dinámica y la mecánica, pues a través de ellas Arquímedes dio solución a los tres problemas griegos irresolubles con regla y compás.

También este autor considera de mayor potencialidad orientar la geometría en el sentido de la dinámica, la cual brindan los SDG, que en su concepto es mucho más asequible en la actualidad. En esencia, Pérez (2007) es del criterio de dejar a un lado a Euclides, pues su geometría a través de la regla y el compás en la escuela muestra al estudiante un mundo casi siempre plano. Adicionalmente plantea que con dichos instrumentos solo se abordan líneas, que siempre son rectas; curvas, las cuales son círculos o cónicas; figuras planas, las cuales son polígonos (regulares de ser posible) y los cuerpos sólidos no son abordados.

Para la autora de este estudio, hablar de la historia de la geometría es hablar de instrumentos como la regla y el compás, ya que a través de ellos se dio sustento formal a la geometría y todo cuanto existió; sería deshonesto no permitir a los estudiantes usar estas herramientas y descubrir por sus propias manos la belleza que esconde la geometría.

---

[27] Fauvel, J. y Maanem, J. (2002). History in mathematics education. The ICMI Study United States of America. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[28] Pérez, A. (2007). ¡Malditos sean la regla y el compás! Historias de matemáticas alternativas. XIII JAEM. Granada, España. Recuperado de http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/XIIIJAEM/malditos%20sean%20regla%20y%20comp%E1s.pdf

#### 1.3.4. Alternative geometric constructions: promoting mathematical reasoning[29]

Pandiscio (2002) concede un valor importante a las construcciones geométricas que han tenido lugar históricamente, pues poseen una riqueza que es sin duda importante para aprender. A medida que el mundo avanza y evoluciona, también lo hace la geometría y sus métodos de enseñanza. Producto de los avances tecnológicos y metodológicos, en la actualidad en las aulas escolares el papel de las construcciones de la geometría ha cambiado drásticamente, al punto de encontrarse casi inexistente en el salón de clase.

Es criterio de la autora de este estudio, que los cambios en la concepción de la geometría se han hecho notorios a través del tiempo y, como menciona el artículo, hay aspectos y prácticas que han evolucionado con el objetivo de favorecer el aprendizaje, pero en la búsqueda de ello se han abandonado muchas herramientas, entre ellas las construcciones geométricas que históricamente fortalecieron y dieron origen a la geometría.

#### 1.3.5. Historia de la matemática, educación matemática e investigación en educación matemática[30]

Belisario y González (2012) establecen dos relaciones entre la Historia de las Matemáticas (HM) y Educación Matemática (EM), y la Historia de las Matemáticas (HM) e Investigación en Educación Matemática (IEM); de la primera se deduce un cambio de perspectiva sobre la matemática, contribuyendo al restablecimiento de su estatus de actividad cultural y humana, ayudando con ello a motivar su aprendizaje. La segunda relación se refiere a aquellas investigaciones en educación matemática que tienen a la historia de las matemáticas con un punto de interés, de la cual se deduce que para alcanzar una comprensión profunda de los conceptos de cualquier ciencia se requiere del conocimiento de su historia.

Desde el punto de vista de los autores, la historia de "… la matemática muestra la transformación de los conceptos y procesos en esta disciplina, así como el contexto sociocultural en el cual ella aparece y se desarrolla, considerando también su influencia sobre su enseñanza y aprendizaje como sobre la investigación que se realiza en torno a estos procesos"[31]. Por lo cual la HM en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, como la resolución de problemas, se encuentra entre los campos temáticos usados con más frecuencia en las IEM.

La autora de este estudio comparte las ideas de Belisario y González (2012), pues conceden un potencial importante a la historia de la matemática en el aula de clase, y la reconocen como un instrumento didáctico, lo cual enriquece culturalmente la enseñanza, motiva y facilita al estudiante la comprensión profunda de la matemática.

#### 1.3.6. Voices from the field: incorporating history of mathematics in secondary and post- secondary classrooms[32]

[29] Pandiscio, E. (2002). Alternative geometric constructions: promoting mathematical reasoning. The Mathematics Teacher, 95(1), 32-36.

[30] Belisario, A. y González, F. (2012). Historia de la matemática, educación matemática e investigación en educación matemática. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (31), 161-182. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/31/archivo_16_de_volumen_31.pdf

[31] Belisario, A. y González, F. (2012). Historia de la matemática, educación matemática e investigación en educación matemática. Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (31), 161-182. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/31/archivo_16_de_volumen_31.pdf

[32] Clark, K. (2012). Voices from the field: incorporating history of mathematics in secondary and post-secondary classrooms. Cerme7. The Florida State University. pp. 1-10.

Clark (2012) registra los resultados de la incorporación de la historia de la matemática, en la secundaria y postsecundaria, durante 32 clases del año académico 2008. Este autor en su estudio realiza una encuesta a 26 docentes sobre la incorporación de la historia de la matemática en la enseñanza en los Estados Unidos. Las encuestas reportaron que los docentes hacían uso de la historia de las matemáticas como: anécdota, biografía o problemas interesantes.

Luego, seis de estos docentes participaron en este estudio exploratorio, en el cual debían incluir la historia de la matemática en la preparación de sus clases. Los resultados muestran que la historia como anécdota fue usada en veinte de las 32 clases, nueve de las clases reportaron el uso de "la historia como biografía" y quince incluyeron el uso de "la historia como problemas interesantes" (cada clase tiene la posibilidad de usar una tipología o mezclar las tres).

La prevalencia de la utilización de anécdotas históricas en la enseñanza de la matemática no es sorprendente, pues son usadas para compartir un nuevo tema y pueden ayudar a humanizar las matemáticas, además requieren menor cantidad de preparación y compromiso de tiempo durante la enseñanza. Sin embargo, el autor centró su atención en las clases, en las cuales se trabajó la historia a través de problemas interesantes. En la clase se trabaja con problemas históricos por dos razones: primero porque la historia a través de problemas interesantes involucra a los estudiantes en el contenido matemático, y segundo porque les permite investigar métodos alternativos de resolución para el mismo problema.

Según Clark (2012), un valor agregado de este estudio exploratorio es que los docentes identificaron dificultades en la incorporación de la historia de la matemática en la enseñanza, a saber:

- Desconocimiento por parte del docente, pues por lo general ha aprendido poco de historia de la matemática durante su formación.
- La obtención de conocimiento de la evolución histórica de los temas de la escuela que se orientan.
- Se requiere bastante tiempo para leer y estudiar.
- La adaptación de los contenidos históricos para su uso con los estudiantes requiere destreza.
- Tiempo para el desarrollo de la historia en las clases.

A pesar de los desafíos y las dificultades identificadas, los docentes que participaron en la investigación se sintieron motivados a usar la historia en sus clases.

Se es del criterio de Clark (2012), quien vincula dos aspectos que son objeto de este trabajo: los problemas interesantes y la historia de las matemáticas, lo cual hace este artículo de interés especial, aunque los obstáculos patentes son a corto plazo fortalezas que harán más productiva la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En muchas ocasiones el docente considera la historia de la matemática como un complemento más para la enseñanza, lo cual la hace irrelevante y por ende se desconocen las bondades que pueden llegar a brindar en el campo del conocimiento matemático.

#### 1.3.7. What do mathematics teachers and teacher trainees know about the history of mathematics?[33]

Gazit (2013) indaga respecto a los saberes de los futuros profesores y profesores de matemáticas, y

[33] Gazit, A. (2013). ¿Qué saben los profesores de matemáticas y futuros profesores acerca de la historia de las matemáticas? Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología, 44(4), 501-512.

acerca de la historia de la matemática. Se presentan los resultados de un estudio que examinó los conocimientos de los profesores de matemáticas y los estudiantes de magisterio, sobre los conceptos, temas y personajes de la historia de la matemática.

Los resultados indican una falta de conocimientos sobre la mayoría de los temas examinados. Solo alrededor del 40 % de los participantes conocía el origen de nuestro sistema de conteo y el único elemento que alcanzó por encima del 50 % fue el tema relativo al hombre que editó el libro de la antigüedad más destacado en geometría: Euclides (alrededor del 83 % lo identificó correctamente). El grupo con la puntuación más baja fue el de las matemáticas de la escuela primaria (19.3 %). En conclusión, se debe fortalecer el conocimiento de la historia de la matemática en la formación docente y en el servicio de estudios avanzados de los maestros.

La historia de la matemática hace parte de la cultura del docente de matemática, pero como muestra en este estudio se carece de este aspecto, quizá porque se desconoce su importancia en el ámbito educativo.

#### 1.3.8. ¿Cómo contextualizar y dejar pensar la matemática?[34]

Sánchez (2013) analiza cómo contextualizar y pensar en matemática, con el objetivo de que el nivel de razonamiento de los estudiantes aumente. Para este fin propone usar la historia de la matemática en las clases y textos, para lograr que los contenidos sean más atractivos y eficaces.

El tema sustentado en la teoría del desarrollo de la cultura matemática fue el problema isoperimétrico con polígonos, el cual posee transcendencia, pero no se aborda tradicionalmente en la escuela. Tras el desarrollo de la temática se notó el interés y la motivación por saber más acerca de ella. Lograr que el estudiante se motive y aprenda a pensar matemáticamente, es posible a través del enfoque historicista como recurso didáctico, siempre y cuando se tenga presente que su uso deba ser moderado y consciente, sin limitarse a la narración de anécdotas.

La aplicación de la historia como recurso didáctico en el aula por parte del docente requiere dedicar más tiempo a la preparación de clases, lo cual no es fácil, pero vale la pena. “El profesor de matemáticas, aquel de la enseñanza media en particular, no tiene que formar lógicos puros, debe contribuir a formar hombres que razonen y para esto debe ocuparse no solamente de los razonamientos rigurosos, sino sobre todo de la adquisición de las premisas de estos razonamientos y de la aplicación de sus resultados a lo concreto”[35].

La autora de este estudio coincide con lo expuesto, pues a través de la historia de la matemática es posible contextualizar y mostrar a los estudiantes una matemática asequible e interesante, aunque esta no es tarea fácil para los docentes, ya que no es común que en la formación académica este componente se desarrolle. En el proceso de enseñanza-aprendizaje hacer uso de este recurso representa un desafío, dado que el docente debe prepararse para aprender y enseñar a pensar la matemática.

### 1.4. Investigaciones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en Colombia

En el ámbito local son varios los autores que abordan el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría como eje temático de sus investigaciones. A continuación, se realiza un análisis de algunas

[34] Sánchez, C. (2013). ¿Cómo contextualizar y dejar pensar la matemática? CEMACYC, República Dominicana. Universidad de La Habana, Cuba. ICMI. pp. 1-16.

[35] Lebesgue, H. (1930). La Mesure des Grandeurs. (La medida de las magnitudes).

de ellas:

#### 1.4.1. Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para grado sexto [36]

Pérez (2011) propone actividades teórico-prácticas que se fundamentan en la comunidad de práctica de Wenger, para favorecer la construcción de significado robusto del concepto de área de algunas figuras planas en grado sexto. Pérez (2011) sugiere el diseño de actividades en las cuales los estudiantes presenten algunas dificultades, que los motiven a buscar, indagar y esforzarse para resolverlas.

También expresa que "… la utilización de las formas de razonamiento de Euclides en su libro 'Los Elementos' facilita la adquisición del concepto de área y la solución de problemas a través de este método…, por lo cual podemos afirmar con certeza que la utilización de este método potencia y desarrolla el pensamiento geométrico"[37]. Criterios que la autora de este estudio comparte y tiene en cuenta en el desarrollo de las actividades.

#### 1.4.2. Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas[38]

Arenas (2012) desarrolla una estrategia metodológica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas. Esta estrategia para la enseñanza de la geometría se basa en el uso del tangram y la plataforma educativa Moodle, a fin de concretar los preconceptos existentes en el estudiante por medio de la manipulación. Este proceso acompañado con el uso de las tecnologías favorece el desarrollo de habilidades en el estudiante, puesto que la tecnología es la nueva cultura de aprendizaje.

#### 1.4.3. Colombia es una cenicienta que quiere ir al baile de los países desarrollados[39]

Llinás (2014) afirma con respecto a la educación colombiana, que "Colombia es una cenicienta que quiere ir al baile de los países desarrollados"[40]. La educación es tan esencial como el agua porque mejora la calidad de vida, pero en Colombia esto no sucede, pues no se enseña a los niños lo que necesitan; por lo tanto, lo que aprenden no les resulta fácil aplicarlo a la realidad.

La metodología y estructura de los profesores influye directamente en lo que enseñan y como lo enseñan. Este autor expresa que: ¿de dónde sale la geometría si no hay un contexto histórico? Plantea que lo único que importa es saberse las propiedades de los triángulos para obtener una nota.

También expresa la necesidad de que el estudiante comprenda la utilidad que tiene el aprendizaje de los contenidos. A continuación, se muestra un ejemplo a través de preguntas

[36] Pérez, D. (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

[37] Pérez, D. (2011). Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

[38] Arenas, M. (2012). Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas. Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

[39] Llinás, R. (2014). Colombia es una cenicienta que quiere ir al baile de los países desarrollados. Entrevista para la revista Semana. Recuperado de https://bit.ly/2P4JYnF

[40] Llinás, R. (2014). Entrevista para la revista Semana. Recuperado de http://www.semana.com/educacion/articulo/rodolfo-llinas-colombia

heurísticas, de cómo debe ser este proceso: ¿para qué sirven los triángulos?, ¿quiénes los utilizaron y para qué los utilizaron?, ¿por qué las pirámides son triangulares? y ¿cómo hicieron para construir las pirámides? Este tipo de situaciones en el aula permiten que el estudiante aplique lo que aprende a la realidad. Este autor pone de manifiesto la problemática interna del país, pero plantea estrategias de mejoramiento, las cuales encierran la cultura matemática y la resolución de problemas en contexto en el aula de clase.

#### 1.4.4. Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo[41]

Tafur (2015) enfatiza las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de transformaciones en el plano: traslación, rotación, simetría axial y homotecia. El diseño de las actividades sobre esta temática se sustenta en problemas no rutinarios, en la visualización, en la representación, en la heurística como herramienta didáctica y en las comunidades de práctica de Wenger (1998). Como resultado de la implementación de las actividades realizadas por Tafur (2015), se favorece la construcción de significados robustos de cada una de las transformaciones en el plano, en los estudiantes de grado séptimo de la institución educativa Colegio Nuestra Señora de la Paz.

También Tafur (2015) expresa que "El trabajo con regla, compás y lápiz y preguntas específicas permite al estudiante identificar con mayor facilidad las características y propiedades…"[42] y también plantea que "El uso de los materiales didácticos concretos generan mayor disposición, seguridad y agilidad al momento de la resolución de los problemas"[43]. Se comparten estos criterios y se consideran útiles en el desarrollo de las actividades propuestas en este estudio.

En la revisión de la literatura nacional, se realizan algunas investigaciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas a través de la resolución de problemas y las construcciones geométricas. Entre las que se destacan:

#### 1.4.5. El efecto del programa de formación docente "Enseñando a pensar" en el conocimiento del contenido pedagógico y la práctica en la enseñanza de la geometría a través de la resolución de problemas[44]

López, Noriega y Ospino (2007) plantean una alternativa para el mejoramiento de la calidad educativa, y es un programa de formación denominado "Enseñando a pensar" dirigido a docentes (sexto y noveno) de geometría, el cual se desarrolla a través de la resolución de problemas. Durante el desarrollo del programa, los docentes del grupo experimental adquirieron estrategias de solución de problemas geométricos, como la lectura, comprensión, visualización y contextualización, entre otras; además, las prácticas escolares mejoraron dado que la preparación y las planeaciones de las clases son más sólidas. Se retoma esta investigación, pues se considera que, para lograr resultados

---

[41] Tafur, A. (2015). Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo. Tesis de maestría en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

[42] Tafur, A. (2015). Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo. Tesis de maestría en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia. p. 137.

[43] Tafur, A. (2015). Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo. Tesis de maestría en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia. p. 137.

[44] López, S., Noriega, H. y Ospino, A. (2007). El efecto del programa de formación de docentes "Enseñando a pensar" en el conocimiento del contenido pedagógico y la práctica en la enseñanza de la geometría a través de la resolución de problemas. Disertación doctoral, tesis de maestría no publicada. Fundación Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.

satisfactorios en el aprendizaje de la geometría, en particular sobre las desigualdades geométricas, se debe contar con docentes capacitados y con pleno dominio del contenido geométrico. Esta investigación, se considera pertinente dado que el aprendizaje de la geometría tiene sus bases en el dominio y la instrucción que posee el docente.

#### 1.4.6. Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros[45]

Morales y Majé (2011) exponen los resultados obtenidos tras la aplicación de actividades basadas en la solución de problemas sobre cuadriláteros, a través del uso de los SGD. El objetivo es analizar el desarrollo del pensamiento espacial, los niveles de competencia matemática y la formulación y resolución de problemas de los estudiantes de grado séptimo de la educación básica secundaria.

Estos autores afirman que la resolución de problemas constituye un buen camino para desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, si logra consolidarse como eje articulador entre la enseñanza de la geometría y el desarrollo del pensamiento espacial. Este trabajo constituye una alternativa para el desarrollo del pensamiento espacial y de habilidades en los estudiantes.

En el campo nacional son escasas las investigaciones dirigidas hacia el proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas, por medio de la resolución de problemas y las construcciones geométricas, y en las existentes no se evidencia un desarrollo a profundidad de esta temática.

También en la escuela colombiana se registran algunas investigaciones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, a través de la historia de la matemática como recurso didáctico, entre las que se tienen:

#### 1.4.7. ¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor?[46]

Guacaneme (2010) profundiza en el papel de la historia de la matemática en la formación del conocimiento del profesor de matemáticas y responde a la pregunta sobre el tipo de historia de la matemática requerido y deseable para el conocimiento del profesor de esta disciplina; para ello identifica inicialmente diez tipologías de la historia de la matemática:

- “Objeto de referencia de la obra histórica.
- Fuentes originales y secundarias.
- Dos tipos extremos de historia (internalista y externalista) y posturas intermedias.
- El nivel de profundidad del producto de la historia de las matemáticas, el relato histórico y el análisis histórico.
- Existencia de diversos enfoques del análisis histórico, no necesariamente disjuntos.
- Las matemáticas objeto del estudio histórico son las reconocidas como hegemónicas (o matemáticas occidentales) o si pertenecen a culturas o sociedades específicas.
- Dos tendencias, denominadas historia y herencia.
- Una historia contada desde el punto de vista del autor o historia cultural y una historia contada desde la perspectiva de los científicos modernos.

[45] Morales, C. y Majé, R. (2011). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros. Universidad de la Amazonia, Florencia, Caquetá, Colombia. Recuperado de https://bit.ly/39RLQcw

[46] Guacaneme, É. A. (2010). ¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor? Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10437/1/Guacaneme2010Qu%C3%A9.pdf

- Reflexión sobre los dos modos de afectación (evolutivo [comprensión de los procesos de evolución de los objetos matemáticos] y situado [comprensión de los razonamientos de los matemáticos en un momento específico]).
- Una historia conceptual a una historia de los problemas”[47].

Aunque existen diferentes alusiones de esta tipología, las investigaciones al respecto son escasas. En el 2011 este autor, en otro artículo concreta las razones e intenciones de incluir la historia de la matemática en la educación de un profesor. Allí registra cinco categorías respecto de su objeto:

- “Los que aluden a la racionalidad (los por qué).
- Las intenciones (los para qué).
- Tipo de historia (los qué).
- Las estrategias metodológicas (los cómo).
- Momento adecuado (el cuándo), de una formación histórico-epistemológica en función del conocimiento y la educación del profesor”[48].

En esencia se enseña historia de la matemática para dotar al profesor de matemática de “instrumentos” para el ejercicio docente, lo cual responde al por qué y para qué; en cuanto al qué, se tienen las diez tipologías antes mencionadas; el cómo y el cuándo, se deja a libertad del docente, o como parte de investigaciones futuras.

#### 1.4.8. La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides[49]

Sánchez (2012) comenta cómo a través del tiempo y con la inclusión de la matemática moderna, la geometría ha sido relegada y casi olvidada, de ahí que existan numerosas investigaciones orientadas hacia propuestas, de cómo y qué enseñar en geometría. Este autor dirige su atención a la historia de la matemática como un recurso para el mejoramiento de la enseñanza de la geometría, pues permite considerar el origen de los conceptos y las trasformaciones que han tenido a través del tiempo. Para Sánchez (2012) la obra cumbre de las matemáticas griegas, *Los Elementos de Euclides*, sigue de alguna forma vigente y proporciona herramientas didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, el álgebra y la teoría de números. La enseñanza enmarcada en esta obra sería una manera útil de vincular la historia de la matemática en la práctica docente. Además, la regla y el compás en *Los Elementos* desempeñaron un papel protagónico dado que tenían como objetivo garantizar la existencia o inexistencia de los objetos geométricos. Se es del criterio que para abordar geometría en el aula de clase, es ineludible el uso de instrumentos como la regla y el compás.

### Conclusiones del Capítulo 1

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en el grado noveno se destacan investigadores como: Santaló (1985), Villani (2001), Sgreccia y Massa (2009), Gamboa y Ballestero (2010), Lingefjärd (2011), Adolphus (2011) y Arici y Aslan (2013), entre otros. Estos autores enfatizan en sus investigaciones sobre el aprendizaje de geometría, la visualización espacial y el razonamiento geométrico; también algunos proponen el origami como una herramienta para estudiar algunos conceptos de la geometría.

---

[47] Guacaneme, É. A. (2010). ¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor? Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología EDUCyT. Revista EDUCyT, 2, junio-diciembre. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10437/1/Guacaneme2010Qu%C3%A9.pdf

[48] Guacaneme, É. A. (2011). La historia de las matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

[49] Sánchez, C. (2012). La historia como recurso didáctico: el caso de Los Elementos de Euclides. XX Encuentro de geometría y sus aplicaciones, realizado en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

En el proceso investigativo sobre las desigualdades geométricas, a través de la resolución de problemas y construcciones geométricas en la escuela, se destacan: Pan (2000), Malaspina (2001), Berinde (2004), Siñeriz (2002), Micelli y Crespo (2011) y Koyuncu, Akyuz y Cakiroglu (2014). Estos investigadores dirigen sus trabajos a la importancia de las construcciones con regla y compás, y hacia los problemas de construcciones geométricas utilizando regla y compás en la escuela media. También abordan la resolución de problemas geométricos, a través de los SGD, pues estos permiten explorar, conjeturar y mostrar al estudiante la belleza de la geometría. Es de destacar, que en cuanto a desigualdades geométricas es escaso el tratamiento por parte de la literatura revisada a este tema.

De Guzmán (1992), Fauvel y Maanen (2000), Pandisico (2002), Pérez (2007), Belisario y González (2012), Clark (2012), Gazit (2013) y Sánchez (2013), entre otros, investigan sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular de las desigualdades geométricas, a través de la historia de la matemática como recurso didáctico. Estos investigadores enfatizan en las potencialidades y la importancia de la historia de las matemáticas en el aula de clase, y también apuntan sobre algunas dificultades de su incorporación en la enseñanza.

Son varias las investigaciones realizadas en Colombia sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría; en este sentido se destacan: López, Noriega y Ospino (2007), Tapia y Pabón (2009), Guacaneme (2010), Pérez (2011), Morales y Majé (2011), Sánchez (2012), Arenas (2012), Santa y Jaramillo (2013) y Tafur (2015), entre otros. Estos investigadores centran sus estudios en la importancia de la geometría en la escuela, en el proceso de razonamiento en geometría y en el uso de los SGD. Asimismo proponen estrategias para: desarrollar habilidades de visualización y razonamiento visual, y enseñar áreas y perímetros en figuras planas, en los estudiantes de la educación básica.

# CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se hace referencia al marco teórico que sustenta esta investigación. Primeramente, se centra la atención en la resolución de problemas, como una herramienta que favorece el razonamiento matemático y el aprendizaje activo. También se aborda la historia de las matemáticas como recurso didáctico que motiva y potencializa su aprendizaje, además se considera el pensamiento visual y su incidencia en la construcción del conocimiento geométrico. Se concluye con los referentes teóricos de grado noveno, en específico sobre desigualdades y construcciones geométricas.

## 2.1. Fundamentos de la teoría de resolución de problemas. Problemas retadores

La enseñanza de las matemáticas debe favorecer el desarrollo de actividades mentales que incentiven el razonamiento en el estudiante y motiven su aprendizaje. La resolución de problemas aporta hacia este fin y es parte esencial del origen y desarrollo de la matemática. La teoría de la resolución de problemas va más allá de la solución de un problema, se refiere a situaciones por lo general complejas, que permite que el estudiante ponga a prueba todas sus capacidades mentales, lo cual se convierte en todo un reto y motivación personal.

Por estas grandes potencialidades, la resolución de problemas se ha convertido en una teoría que ha ocupado a numerosos investigadores, entre los que se destacan: Polya (1965), Fridman (1972), Ballester (1992), Schoenfeld (1985), Mayer (1986), Sánchez (1995), Garret (1995), Labarrere (1996), Campistrous y Rizo (1996), Puig (1996), Lester y Kehle (2003), Sigarreta (2004), Lesh y English (2005), Cruz (2006), Lesh y Zawojewski (2007), Santos (2007), Sriraman y English (2010) y Pochulu y Rodríguez (2012), entre otros. Estos investigadores han aportado sustancialmente hasta convertir la resolución de problemas en una teoría.

En primer lugar, estos autores se ocupan de articular la definición de problema. Polya (1965) define que: "Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata"[50]. Esta definición es la que se asume en este estudio, pues se ajusta a los objetivos de la investigación.

Por su parte, Krulik y Rudnik (1987) establecen que un problema es "… una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"[51]. Labarrere (1996) sostiene que se tiene un problema en determinada situación cuando existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente; "(…) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar".

Se comparte lo planteado por Campistrous y Rizo (1996) acerca de los rasgos que presentan las diferentes definiciones de problemas abordadas; en cada una de ellas se precisa:

- Existencia de condiciones iníciales o finales (lo dado y lo buscado, lo conocido y lo desconocido), que exprese la necesidad de transformación.
- Contradicción o exigencia desconocida.
- Necesidad o deseo del estudiante por resolver esa contradicción (deseo de resolverlo).

[50] Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas. p. 28.
[51] Krulik, S. y Rudnik, J. (1980). Problem solving: a handbook for teachers. Boston: Allyn and Bacon. p. 4.

Diferentes investigadores han abordado la resolución de problemas: Restle y Davis (1962), Polya (1965), Fridman (1991), Ballester (1992), Schoenfeld (1994) y Lesh y Zawojewski (2007), entre otros. Polya (1965), por su parte, afirma que: "… resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados". Criterios que se comparten en esta investigación.

Por otra parte, Schoenfeld, citado por Sriraman y English (2010), recomienda que la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática, es factible para:

- Propiciar en los estudiantes una habilidad para utilizar estrategias que lo vinculen con el contexto.
- Fomentar en los estudiantes estrategias metacognitivas para que se apropien del contenido matemático.
- Mejorar las creencias que tienen los estudiantes acerca de su entorno.

Investigadores como: Dewey (1933), Polya (1965), Schoenfeld (1985), Fridman (1991) y Guzmán (1994) han aportado estrategias o fases para la resolución de problemas. En esta investigación se asume el modelo propuesto por Polya (1965), el cual tiene las siguientes fases:

- Orientación hacia el problema.
- Trabajo en el problema.
- Solución del problema.
- Evaluación de la solución y de la vía.

A continuación, se explican cada una de estas fases y se proponen algunos interrogantes, que son tomadas de Ballester y otros (1992). En el proceso de resolución de los problemas, estos interrogantes o preguntas heurísticas se realizan por parte del docente de ser necesario, para lograr la independencia de los estudiantes en su resolución.

Orientación hacia el problema: esta fase se dirige a la búsqueda o motivación del planteamiento y comprensión del problema. Por su parte, la motivación está relacionada con las potencialidades del problema, para contribuir a la educación integral de los estudiantes (Ballester y otros, 1992). Para lograr que el estudiante resuelva el problema de forma independiente, el docente formula las siguientes preguntas heurísticas: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos? y ¿cuál es la condición?, entre otras.

Trabajo en el problema: en esta se debe tener presente la precisión y el análisis del problema, y la búsqueda de la idea de la solución. La precisión y el análisis del problema están dados por la comprensión de su estructura, lo que implica determinar los datos dados y buscados, para comprender la formulación matemática (Ballester y otros, 1992). También en esta fase es necesario aplicar los procedimientos heurísticos y además el docente le puede formular las siguientes preguntas: ¿es semejante a un problema conocido?, ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil?, ¿le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar?, ¿puede usted construir una figura de análisis? También se le puede formular:

¿podría imaginarse un problema análogo más simple / general / particular? y ¿puede resolver una parte del problema?, entre otras.

Solución del problema: en esta fase se debe desarrollar la realización del plan de solución y la representación de la solución (Ballester y otros, 1992). Para lograr una adecuada orientación en el estudiante, se le sugiere al docente que les formule a los estudiantes las siguientes preguntas: ¿puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?, ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto? y ¿puede usted demostrarlo?, entre otras.

Evaluación de la solución y de la vía: en esta fase se debe tener presente la comprobación del problema, la cual debe desarrollarse en su enunciado. El docente logra una mayor comprensión del estudiante cuando es capaz de formularle las siguientes preguntas: ¿puede usted verificar el resultado?, ¿puede verificar el razonamiento?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede verlo de inmediato?, ¿puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? También es propicio utilizar las estrategias heurísticas: trabajo hacia adelante y trabajo hacia atrás.

Los fundamentos teóricos abordados sobre la resolución de problemas sustentan también a los problemas retadores, estos problemas tienen cierta importancia para el desarrollo del pensamiento lógico matemático y el pensamiento geométrico. También favorece las habilidades y estrategias en la resolución de situaciones geométricas en los estudiantes. En el estudio se asume lo expresado por Pérez (2004) al plantear que los problemas retadores "… son problemas que invitan al estudiante a pensar autónomamente, a indagar, a cuestionar, a razonar y a explicar su razonamiento"[52].

Por otra parte, Pérez (2004) plantea que los problemas retadores "… exigen la integración de conceptos relacionados y el establecimiento de nexos con otras áreas de la matemática…"[53]. Los problemas retadores por sus características son propicios para generar motivación e interés en los estudiantes, y para lograr este objetivo estos problemas deben presentar ciertas particularidades. Estas particularidades son resumidas por Falk (1980), al expresar "… que sea una situación que estimule el pensamiento, que sea interesante para el alumno, y que la solución no sea inmediata"[54]. En este sentido, la resolución de un problema retador exige del estudiante: compromiso, responsabilidad, integración de saberes, habilidades, creatividad y sentido de pertenencia, para propiciar el desarrollo de nuevas estrategias.

Un problema retador también debe dirigir su atención a:

- "Hacer que el estudiante piense productivamente.
- Desarrollar su razonamiento.
- Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.
- Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.
- Hacer que las clases de matemática sean más interesantes y desafiantes.
- Equiparlo con estrategias para resolver problemas.
- Darle una buena base matemática".[55]

Un aspecto por tener en cuenta en la resolución de problemas es la heurística. Los recursos heurísticos están conformados por los medios auxiliares, procedimientos heurísticos y el programa heurístico general (fases para la resolución de problemas). Los procedimientos heurísticos están

[52] Pérez, F. (2004). Olimpiadas colombianas de matemáticas para primaria 2000-2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[53] Pérez, F. (2004). Olimpiadas colombianas de matemáticas para primaria 2000-2004. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.
[54] Falk, M. (1980). La enseñanza a través de problemas. Bogotá: Universidad Antonio Nariño. p. 16.
[55] Resolución de problemas. Documento electrónico. Recuperado de http:www.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial

determinados por principios generales y especiales, estrategias y reglas, los cuales se aplican a las actividades basadas en la resolución de problemas sobre desigualdades geométricas.

Una ayuda al proceso de resolución de problemas retadores sobre desigualdades geométricas lo constituye el método heurístico. En el estudio se asume lo planteado por Ballester y otros (1992) al expresar que este método "… facilita la búsqueda independiente de problemas y soluciones de estos, donde el profesor no le informa al estudiante los conocimientos terminados, sino que lo lleva al redescubrimiento de las suposiciones y las reglas correspondientes de forma independiente"[56], estos criterios se tienen en cuenta para el desarrollo de las actividades.

## 2.2. La historia de la matemática como recurso didáctico en el aula

La enseñanza-aprendizaje de la matemática ha sido un tema de interés a lo largo de los años y son frecuentes las metodologías y técnicas que han surgido para garantizar el aprendizaje, despertar el interés y captar la atención de los estudiantes. Este proceso es un desafío para el docente, pues supone buscar alternativas que incentiven a los estudiantes a adquirir conocimientos**.**

En el estudio ICMI, publicado en el 2000, se analiza ampliamente la integración de la historia de las matemáticas en su enseñanza-aprendizaje, como un aspecto motivador para los estudiantes. En este estudio se desarrolla una metodología basada en la historia como recurso didáctico y en él la información es presentada en la siguiente estructura:

- Análisis del impacto de la metodología en el currículo de los diferentes países.
- Consideraciones filosóficas, multiculturales e interdisciplinarias relacionadas con esta metodología.
- Implementación de la metodología (se explicita de diversas maneras de concreción en el aula).
- Análisis de resultados y viabilidad con respecto a la implementación.

Este estudio considera que la metodología planteada es apropiada para motivar el desarrollo de las actividades sobre desigualdades geométricas.

En los últimos años se han realizado importantes investigaciones sobre el uso de la historia como recurso didáctico. Algunos autores que han aportado a este tema son: Katz (1990), De Guzmán (1992), Bidwell (1993), Garuti (1997), Fauvel y Maanen (2000), Marshall y Rich (2000), Tzanakis (2002), Liu (2003), González (2004), Siu (2005), Groenwald (2005), Sierra (2007), Arcavi (2008), Jankvist (2009), Guacaneme (2010), Abdelfatah (2011), Clark (2012), Sánchez (2013), Gazit (2013) y Quintero (2015), entre otros.

Urbaneja (2004) considera la historia de la matemática como una "… fuente de inspiración, autoformación y orientación en la actividad docente, que revela la dimensión cultural de la matemática, el legado histórico permite enriquecer su enseñanza"[57]. De Guzmán (1993) aduce que la historia es un medio apropiado y la cataloga como una tendencia innovadora para la enseñanza de la matemática, pone de manifiesto que la historia de la matemática unida a las situaciones problema garantizan un aprendizaje activo. Estos criterios dados por Guzmán se asumen en el desarrollo de las actividades del estudio.

Sierra (2009) afirma que "… la historia de las matemáticas puede ayudar a restituir la

[56]Ballester, S. y otros. (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática. Tomo I-II. La Habana: Pueblo y Educación. p. 225.
[57]Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Suma, Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, (45), 17-28.

dimensión cultural a menudo tan olvidada en el ámbito escolar… "[58], lo cual permite al estudiante conocer y reflexionar sobre el contexto cultural inmerso en el conocimiento matemático, aspecto que es poco abordado debido al carácter formal de la matemática y al desconocimiento de las formas de incluirla en el aula. Otros autores no conciben la enseñanza apartada de la historia como es el caso de Bell (1985), quien expresa: "Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las matemáticas"[59].

La hipótesis planteada en el ICMI del uso de la historia como un recurso didáctico en el aula, se sustenta, según Barbin (2000), en dos afirmaciones que se consideran atinadas para el desarrollo de las actividades de este estudio. Estas pueden resumirse en:

- "Un estudiante que está interesado en la matemática, hará más trabajo.
- El estudiante que realiza más trabajo, tiene mayor posibilidad de alcanzar el aprendizaje y la comprensión"[60].

También Barbin (2000) describe variadas reacciones obtenidas tras el uso de la historia como recurso didáctico; menciona que, en esa metodología, la matemática pasa desde el estado de una ciencia inerte a una ciencia viva. Tzanakis y Arcavi (2000) destacan las potencialidades de la integración de la historia de las matemáticas en el aula de clases, como apoyo a su enseñanza. Estas son:

- El aprendizaje de la matemática.
- El desarrollo de criterios sobre la naturaleza y la actividad matemática.
- El conocimiento didáctico y pedagógico de los profesores.
- La predisposición afectiva hacia las matemáticas.
- La matemática es resultado del esfuerzo cultural humano.

En este mismo sentido, Fernández (2010) enmarca los objetivos que debe poseer la historia como un recurso didáctico, los cuales se enuncian a continuación:

- "Hacer patente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas.
- Enmarcar temporalmente y espacialmente las grandes ideas, problemas, junto con su motivación, precedentes.
- Señalar los problemas abiertos de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente.
- Apuntar las conexiones históricas de la matemática con otras ciencias, en cuya interacción han surgido tradicionalmente gran cantidad de ideas importantes"[61].

Dada la importancia que tiene la historia como recurso didáctico en el aula, Tzanakis y Arcavi (2000) consideran tres maneras diferentes de incluirla en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática:

---

[58] Sierra, M. (2009). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. Colección Digital Eudoxus, 1(5).
[59] Bell, E. (1985). Historia de las matemáticas. México: Fondo de Cultura Económica. p. 54.
[60]Barbin, E. (2000). The historical dimension: from teacher to learner. History in mathematics education. The ICMI Study. p. 64.
[61] Fernández, S., Aubanell, A., Laserna, D. B. y Dedò, M. (2010). Escuela de educación matemática "Miguel de Guzmán": enseñar divulgando. Ministerio de Educación.

- Ofrecer situaciones o problemas con información histórica de manera directa.
- Aprender temas matemáticos, a través de un enfoque de enseñanza-aprendizaje estimulado por la historia.
- Desarrollar una conciencia profunda del contexto cultural de la matemática.

Estas tres variantes para utilizar la historia de la matemática en el aula, pueden resumirse en: directa, indirecta y de profundización. La autora de este estudio asume los planteamientos del estudio ICMI sobre esta temática, en particular los criterios dados por Tzanakis y Arcavi (2000) y lo planteado por Fernández, Aubanell, Laserna y Dedò (2010) para los sustentos de las actividades propuestas. También considera que la historia de la matemática permite identificar ideas, intuiciones, situaciones que dieron lugar a los diferentes conceptos, que propician ver la matemática como una ciencia en proceso de cambio, en la cual es necesario aportar.

En este estudio, sobre la base de la literatura revisada y la experiencia de la autora sobre esta temática, se entiende que la historia como un recurso didáctico es una estrategia, en la cual se plantea la inclusión de situaciones históricas o adaptaciones de estas, en el desarrollo de diferentes contenidos vistos en el aula de clase.

Es necesario destacar que para la implantación de esta metodología en el aula de clase es indispensable que el docente posea un conocimiento sólido de la historia de la matemática y del contenido por tratar, teniendo en cuenta que no todos los contenidos geométricos son propicios para su implementación. En resumen, se puede concretar que esta metodología de hacer uso de la historia como recurso didáctico, tiene las siguientes potencialidades para la resolución de problemas de desigualdades geométricas:

- Propicia la motivación y el interés por el aprendizaje de la geometría.
- Permite aprender geometría considerando el desarrollo y la evolución de la matemática.
- Se rescata la utilización de los instrumentos tradicionales, el desarrollo de habilidades de construcción de figuras geométricas.
- Integra la resolución de problemas, el uso de instrumentos tradicionales y los contenidos previos, para que el estudiante descubra las propiedades geométricas.
- Desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes.
- Mejora la cultura matemática del estudiante.
- Propicia la formación integral del estudiante.

## 2.3. Fundamentos de la incidencia del pensamiento visual en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular de las desigualdades geométricas

Para la construcción de un robusto conocimiento geométrico, por las características propias de la geometría, es necesario desarrollar en los estudiantes el pensamiento visual. Este pensamiento es propio de los seres humanos, pues desde la antigüedad el desarrollo de la matemática ha tenido en cuenta tres recursos principales: el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y símbolos e imágenes.

El término y concepto de pensamiento visual se le atribuye a Arnheim's (1969). Varios son los investigadores que se destacan en esta temática: Arnheim's (1969), De Guzmán (1996), Presmeg (1999, 2006), Alsina y Nelsen (2006), Giaquinto (2007), Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) y Reed (2013). Estos autores aportan definiciones y características, las cuales son consideradas en el marco teórico de este estudio.

Algunos de estos investigadores indagan sobre la importancia del pensamiento visual para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, en particular de la geometría, pues propicia la construcción del conocimiento matemático. Zimmermann (1991) citado por Álvarez (2010) afirma que "el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo, que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema"[62].

Por su parte, Díaz y Dircio (2010) plantean que "… el pensamiento visual puede convertirse en pensamiento abstracto, es decir también puede ser medio para la construcción de conocimiento"[63]. Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) aducen "… que el pensamiento visual proporciona a los estudiantes nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas"[64]. De estos criterios se puede precisar que el pensamiento visual es una herramienta valiosa para acercar al estudiante de forma intuitiva al concepto de desigualdad geométrica, con el objetivo de lograr la concreción de dicho concepto, a través de diferentes caminos que generen un robusto conocimiento sobre las desigualdades geométricas.

Estos autores también aportan ideas y definiciones acerca del pensamiento visual. Para Presmeg (1999) este pensamiento es producto de procesos visuales, el cual se sustenta en generalizaciones y argumentos, que son necesarios en el aprendizaje de los contenidos matemáticos. Gutiérrez (2013) plantea que el pensamiento visual es un proceso "… que consiste en manipular ideas a través de dibujos simples y fácilmente reconocibles, creando conexiones entre sí por medio de mapas mentales, con el objetivo de entenderlas mejor, definir objetivos, identificar problemas, descubrir soluciones, simular procesos y generar nuevas ideas"[65].

Según Roam, citado por Díaz (s. f.), el pensamiento visual "… significa aprovechar la capacidad innata de ver… para descubrir ideas que de otro modo serían invisibles, desarrollarlas rápida e intuitivamente, y luego compartirlas con otras personas de una manera que puedan captar de forma simple"[66].

En el estudio se asume lo planteado por Giaquinto (2007), el cual enuncia que el pensamiento visual visto desde la matemática tiene un valor cognitivo, pues constituye una ayuda y un medio de descubrimiento para el contenido matemático.

Un análisis realizado acerca de las definiciones de pensamiento visual, permite precisar los siguientes rasgos:

- Manipulación de ideas a través de dibujos simples y fácilmente reconocibles.
- Creación de interrelaciones por medio de mapas mentales.
- Definir objetivos, identificar problemas, descubrir soluciones, simular procesos y generar nuevas ideas.

---

62 Álvarez, T. (2010). La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo. Recuperado de http://www.lajpe.org/jan10/21_Teresa_Alvarez.pdf p. 143.

63 Díaz, M. y Dircio, L. (2010). El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4556/1/D%C3%ADazElgradoALME2010.pdf p. 338.

64 Di Domenicantonio, R., Costa, V. A. y Vacchino, M. C. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (27), 75-87. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/27/union_027_010.pdf

65 Gutiérrez, L. (2013). ¿Qué es visual thinking y cómo puedes usarlo? Recuperado de https://extremservicejam.wordpress.com/2013/02/18/que-es-visual-thinking-y-como-puede-ayudarte/

66 Díaz, A. (s. f.). ¿Qué es el pensamiento visual? Recuperado de http://www.motivacionymas.com/que-es-el-pensamiento-visual/

- Constituye una ayuda para el descubrimiento del contenido matemático.

Un prerrequisito para el desarrollo del pensamiento visual es la capacidad de representación de imágenes, las cuales proporcionan un almacenamiento especial de información. En matemáticas las imágenes sustituyen largas descripciones lingüísticas, para facilitar la reflexión mental basada en la intuición.

El pensamiento visual tiene sus bases en la percepción de imágenes visuales o diagramas. Giaquinto (2007) afirma que estas "… pueden ilustrar los casos de una definición, lo que da una idea real de sus aplicaciones; pueden ayudarnos a comprender la descripción de una situación matemática o los pasos de un razonamiento secuencial; que pueden sugerir una propuesta de investigación o una idea para una prueba".[67]

Giaquinto (2007) expresa que una fuente importante de nuestra comprensión de las matemáticas (geometría básica, aritmética, álgebra y análisis real) recae sobre la naturaleza de los conceptos de los estudios empíricos, la percepción visual, las imágenes mentales, y de la cognición numérica. Se es del criterio que estos elementos son básicos para el desarrollo del pensamiento visual en el estudiante.

Roam (2008) aduce que: "… mirar mejor, ver más claro, imaginar más allá, constituyen herramientas y reglas de un buen pensamiento visual"[68]. En el ámbito educativo estos elementos influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

La incidencia del pensamiento visual en la enseñanza posee ventajas, las cuales son valoradas por autores como Pou (2002) y Múgica (2013), entre otros. Por su parte, Pou (2002)[69] plantea que:

- Mejora las capacidades deductivas y argumentativas de los estudiantes.
- Favorece las interpretaciones basadas en las imágenes de menor a mayor complejidad.
- Permite la mejora de la expresión oral.
- Fomenta una nueva relación profesor-estudiante, reafirmando el desarrollo personal del estudiante.
- Potencia el aprendizaje activo frente a la recepción pasiva tradicional.

En este mismo sentido, Múgica (2013) precisa algunas ventajas que aporta el pensamiento visual como herramienta imprescindible para la enseñanza-aprendizaje, a saber:

- El lenguaje gráfico es universal.
- El ser humano piensa de forma visual en mayor porcentaje.
- La retención en la memoria de una imagen es varias veces mayor que la de un conjunto de palabras.
- El 75 % de la información que es captada por el ser humano se realiza a través del canal visual.

[67] Giaquinto, M. (2007). Visual thinking in mathematics. Great Britain: Oxford University Press.
[68] Roam, D. (2008). The back of the napkin: solving problems and selling ideas with pictures. New York: Penguin Group. p. 55.
[69] Pou, C. (2002). El programa educativo "Mira" del laboratorio de las artes: un instrumento para la escuela primaria. (Texto sin publicar, investigación financiada por la Fundación La Caixa).

- Incentiva la concentración y genera motivación por el aprendizaje.
- El uso de las imágenes permite interiorizar y fortalecer los conceptos.
- Las imágenes ayudan a representar mejor mentalmente situaciones complejas.
- El proceso de dibujar conduce al surgimiento de nuevas ideas.
- Los dibujos no tienen una estructura definida, lo cual supone un reto para el cerebro.

Aunque los autores mencionados no dirigen las ventajas al ámbito propio de la enseñanza de la matemática, estas pueden ser adaptadas y aprovechadas en su proceso de enseñanza-aprendizaje, a fin de potencializar y brindar nuevas herramientas para lograr un robusto aprendizaje en los estudiantes.

Por otra parte, el proceso de la visualización está relacionado con el pensamiento visual. Alsina y Nelsen (2002) en este sentido aducen que "… la visualización es cualquier proceso de producción de imágenes al servicio del desarrollo del pensamiento visual". La autora de este estudio comparte este planteamiento, puesto que considera que aspectos como mirar, ver, imaginar y mostrar conducen a la visualización, y esta a su vez contribuye al desarrollo del pensamiento visual de las desigualdades geométricas; cabe aclarar que este proceso es productivo si la visualización es acertada.

El pensamiento visual es pertinente en el ámbito de la educación matemática, en especial cuando se habla de la enseñanza-aprendizaje de la geometría, dado que permite aumentar la comprensión, la habilidad de descubrimiento y la experiencia del estudiante. En este proceso es necesario aclarar que se deben poseer nociones básicas de los conceptos geométricos, de lo contrario el pensamiento visual no será fiable y el conocimiento descubierto no será válido (Giaquinto, 2007). Estas ideas son consideradas para el desarrollo de las actividades propuestas en el estudio.

### 2.4. Referentes sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas en el grado noveno

La matemática concede una gran importancia a las desigualdades, dado que la mayoría de los conceptos matemáticos son el resultado de comparaciones y relaciones, las cuales a veces tienen que ver con una desigualdad, más que con una igualdad. A continuación, se realiza un análisis de algunas definiciones de desigualdades:

- "Proposición que enuncia una relación entre cantidades diferentes. Los símbolos que se utilizan son: mayor que (>), menor que (<)".[70]
- "… es un enunciado o ecuación en el que dos expresiones no son iguales".[71]

Una desigualdad es una comparación significativa entre dos cantidades, que revela si están relacionadas de alguna forma, aun cuando las relaciones no sean una igualdad.

En el grado noveno de la educación secundaria, se propone desarrollar las siguientes temáticas en el área de la geometría:

- Ángulos, medida de ángulos y circunferencia.
- Teorema de Tales y semejanza de triángulos.

---

[70] Diccionario matemático. (s. f.). Desigualdad. Recuperado de http://www.mathematicsdictionary.com/spanish/vmd/full/i/inequality.htm

[71] 71 Klever, K. (2013). Desigualdades. Recuperado de http://es.slideshare.net/kaliklemo/desigualdades-22163560

- Criterios de semejanza.
- Triángulos rectángulos y teorema de Pitágoras.
- Áreas superficiales y volumen de sólidos.

En la escuela secundaria, las desigualdades geométricas no están propuestas dentro del currículo como una temática por trabajar, aunque cabe destacar que en las clases de geometría plana, las desigualdades aparecen de manera natural, cuando se comparan medidas (longitudes, áreas y volúmenes, entre otras). En este proceso, la dificultad yace en el salón de clases, no se ofrece una visión generalizada al análisis de estas comparaciones; no se contextualiza ni se concede la debida importancia en temas como los de construcción, existencia o inexistencia de las figuras y diversas situaciones de optimización.

A continuación, se hace referencia a las propiedades que se presentan en estas desigualdades, las cuales son tomadas de Montoya (2010)[72]:

Tricotomía. Para todo a, b є R, se cumple uno y solo uno de los siguientes casos:

- $a < b$
- $a = b$
- $a > b$

Propiedad transitiva. Para todo a, b, c є R, se cumple que:

- Si $a < b$, $b < c$ entonces $a < c$.

Propiedad aditiva. Para todo a, b, c, x, y є R, se cumple que:

- Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

Propiedad multiplicativa. Para todo a, b, c є R, se cumplen los siguientes casos:

- Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$

El presente estudio enfatiza en la resolución de problemas retadores, en los cuales se considerarán las siguientes desigualdades geométricas:

1. Desigualdad triangular: la suma de las medidas de cualquiera de dos lados de un triángulo, es mayor que la medida del tercer lado (ver Figura 1).

$$\boldsymbol{a + b > c}$$

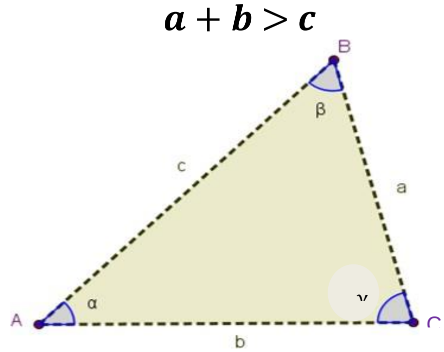



Figura 1. Desigualdad triangular.

[72] Montoya, J. (2010). Curso de geometría euclidiana. Universidad de Antioquia. Recuperado de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/course/view.php?id=631

2. Desigualdades que relacionan la longitud de los lados y medida de los ángulos: en el triángulo ABC, *a, b, c,* lados del triángulo, *c* el lado de mayor longitud, $\alpha, \beta, \gamma$ son ángulos interiores del triángulo.

- Si dos lados de un triángulo no son congruentes, los ángulos opuestos a ellos tampoco son congruentes, y a mayor lado se opone mayor ángulo (ver Figura 2).

$$\text{Si } c > b > a \ \boldsymbol{entonces} \ \gamma > \beta > \alpha$$

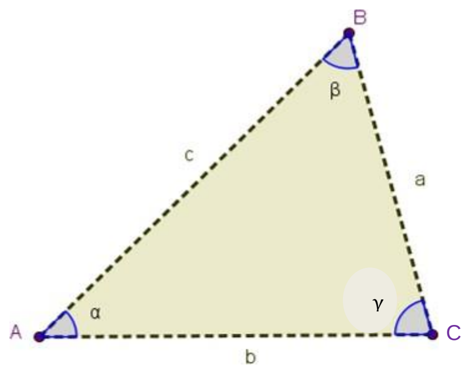



Figura 2. Relación lado-ángulo del triángulo.

- Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos tampoco lo son, y a mayor ángulo se opone mayor lado. (ver Figura 3).

$$\text{Si } \gamma > \beta > \alpha, \boldsymbol{entonces} \ c > b > a$$

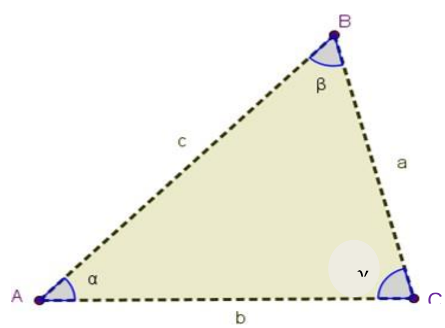



Figura 3. Relación ángulo-lado del triángulo.

De la igualdad planteada en el teorema de Pitágoras ($c^2 = a^2 + b^2$), se obtienen dos desigualdades.

- Si $c^2 > a^2 + b^2$, entonces el triángulo es obtusángulo (ver Figura 4).

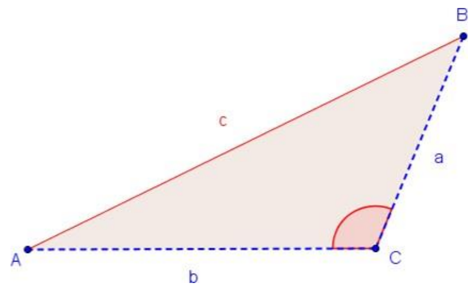



Figura 4. Relación suma de los cuadrados de los lados de un triángulo, y su ángulo obtuso opuesto al lado mayor.

- Si $c^2 < a^2 + b^2$, entonces el triángulo es acutángulo (ver Figura 5).

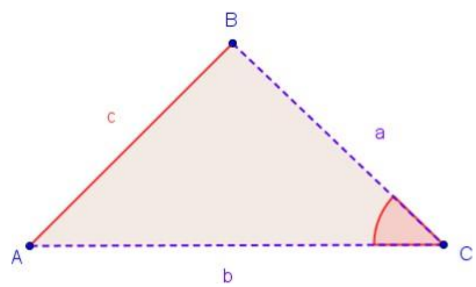



Figura 5. Relación suma de los cuadrados de los lados de un triángulo, y su ángulo agudo opuesto al lado menor.



3. Desigualdades entre perímetros y áreas en figuras geométricas: en geometría se denomina isoperimetría a la "… condición de tener el mismo perímetro; aplicado al problema de encontrar una figura plana de la mayor área posible cuyo límite tiene una longitud especificada. Las desigualdades isoperimétricas son relaciones entre el perímetro y el área de una figura"[73].

A continuación, se muestran algunas de estas desigualdades:

- "De todas las figuras planas con perímetro dado, el círculo tiene mayor área.
- De todas las figuras planas con área dada, el círculo es el de menor perímetro.
- De todos los triángulos con la misma base y perímetro, el triángulo isósceles es el de mayor área.
- De todos los triángulos con la misma base y área, el triángulo isósceles es el de menor perímetro.
- De todos los polígonos de n lados con un área fija, el de mínimo perímetro es el polígono regular"[74].

4. Desigualdades entre media aritmética, media geométrica y media armónica:

- La media aritmética de dos números reales no negativos es mayor o igual que la media geométrica de dichos números. La igualdad se cumple solo cuando $a = b$.

[73] YourDictionary.com. (s. f.). Isoperimetric. Recuperado de http://www.yourdictionary.com/isoperimetric

[74] 74 Kazarinoff, N. (1961). Geometric inequalities. University of Michigan: Mathematical Association of America. DOI: https://doi.org/10.5948/UPO9780883859223

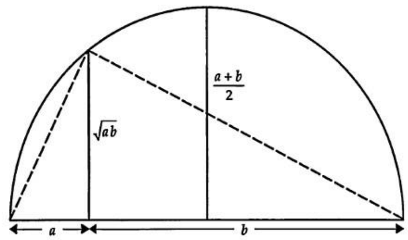



Figura 6. Relación media geométrica y media aritmética.

$$MG \leq MA$$
$$\sqrt[2]{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

- La media armónica es menor que la media geométrica, la media aritmética y la media cuadrática.

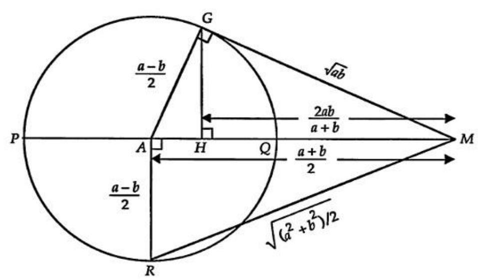



Figura 7. Relación media, aritmética, geométrica, cuadrática y armónica.

$$MH < MG < MA < MR$$
$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt[2]{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt[2]{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

El desarrollo de actividades, en las cuales se fomente la comparación de medidas y se involucre instrumentos para su resolución, motiva a los estudiantes hacia el aprendizaje de la geometría y les propicia construir un conocimiento robusto de los contenidos geométricos.

**Conclusiones del Capítulo 2**

Este capítulo contempla un recorrido por diversos autores y teorías que sustentan esta investigación. Tras el análisis, la autora de este estudio asume en primera instancia la resolución de problemas, según Polya (1945), como una teoría apropiada para el desarrollo de un pensamiento activo y productivo por parte del estudiante especialmente en el área de geometría.

La resolución de problemas sobre desigualdades geométricas es un medio de instrucción y refuerzo para la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de la geometría, pues ofrece a los estudiantes la oportunidad de involucrarse con la identificación de propiedades y construcción de conceptos, desarrollando habilidades de razonamiento y análisis, además de:

- Brindar una nueva óptica a los estudiantes de lo que implica aprender geometría.
- Dotar al estudiante de motivación y seguridad al ser el protagonista de que exploren, investiguen y conjeturen su propio conocimiento.

Según Polya, a menudo la resolución de un problema es concebida desde la representación visual, pues una de las estrategias para la resolución de problemas sugiere realizar un diagrama o imagen. Esta afirmación permite relacionar de manera directa la resolución del problema con el desarrollo del pensamiento visual.

También se asume la historia como un recurso didáctico, cuyo objetivo es motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de las desigualdades geométricas y dar una visión cultural del desarrollo de la temática dentro del tiempo.

Las representaciones visuales (imágenes) tienen un papel facilitador en el pensamiento visual. Se aducen los planteamientos de Giaquinto (2007) puesto que su estudio epistemológico está específicamente orientado a la enseñanza-aprendizaje de la matemática y a la geometría.

Aspectos como motivar (historia como recurso didáctico), desarrollar habilidades de pensamiento y crear estrategias (resolución de problemas y pensamiento visual) conduce al aprendizaje robusto de las desigualdades geométricas en el grado noveno de la educación básica.

# CAPÍTULO 3. ACTIVIDADES PARA CONSTRUCCIONES Y DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS EN EL GRADO NOVENO

Las actividades diseñadas para la clase de geometría del grado noveno están orientadas hacia el aprendizaje de las desigualdades geométricas, temática que no está contemplada en el currículo; algunas de las temáticas abordadas en las clases de geometría involucran desigualdades geométricas, pero no se da lugar a la comparación. Hacia las desigualdades geométricas como una vía para el aprendizaje de la geometría se dirigen las actividades de este estudio.

## 3.1. Estructura de las actividades

Las actividades sobre desigualdades geométricas que se presentan en este capítulo favorecen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, pues propician: la experimentación, la exploración, la conjeturación, el desarrollo de habilidades con el uso de los instrumentos tradicionales y la búsqueda del contenido geométrico sobre esta temática. En el estudio se elaboran e implementan seis actividades conformadas por problemas no rutinarios y una en la cual se abordan problemas retadores. Estas actividades se sustentan en el marco teórico asumido, pues se basan en:

Contenido de desigualdades geométricas. Estas expresan la relación que se puede establecer entre diferentes elementos de las figuras geométricas, que en ocasiones conducen a propiedades, en las que se propicia la comparación entre estos elementos. En el epígrafe 2.4. se explican las desigualdades geométricas en las cuales se basan las actividades.

Construcciones geométricas. Se fundamentan en la utilización de los instrumentos tradicionales para construir o representar las figuras geométricas y sus propiedades. En este proceso se especifican las construcciones básicas con regla y compás, se combinan materiales manipulables y trabajo con dobleces, y se propicia el desarrollo de habilidades con los instrumentos tradicionales. Como consecuencia del trabajo con las construcciones geométricas en el aula, se favorece el conocimiento robusto de las desigualdades geométricas.

Teoría de la resolución de problemas. Los problemas que se proponen en las actividades propician pensar, buscar y explorar, para comprender y cuestionar el problema que se presenta, con el objetivo de que sean capaces de resolverlo a través de la estrategia dada por Polya (1965). Las actividades propuestas son contentivas de problemas sobre desigualdades geométricas y se dirigen a lograr un robusto proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela.

Pensamiento visual. Posee valor cognitivo para la matemática y es una ayuda y un medio de descubrimiento para la construcción de su contenido (Giaquinto, 2007). Este pensamiento en la resolución de problemas propicia crear e interrelacionar dibujos y representaciones para la comprensión del problema y el descubrimiento de sus soluciones.

Historia de la matemática como recurso didáctico. Se refiere a utilizar en las clases situaciones históricas relacionadas con los contenidos, que permitan motivar a los estudiantes y conocer cómo se construyó y desarrolló el conocimiento matemático para favorecer un robusto proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas.

La relación e integración entre los componentes. Construcciones geométricas, resolución de problemas, pensamiento visual e historia de la matemática como recurso didáctico (ver Figura 8), constituyen la base para lograr un conocimiento robusto sobre las desigualdades geométricas. Cada uno de estos componentes aporta un significado y un sentido en la construcción del conocimiento de las desigualdades geométricas.

La incidencia y la interrelación de estos cuatro componentes sobre las desigualdades geométricas genera un proceso de enseñanza-aprendizaje robusto de la geometría, en los estudiantes de grado noveno en la educación básica.

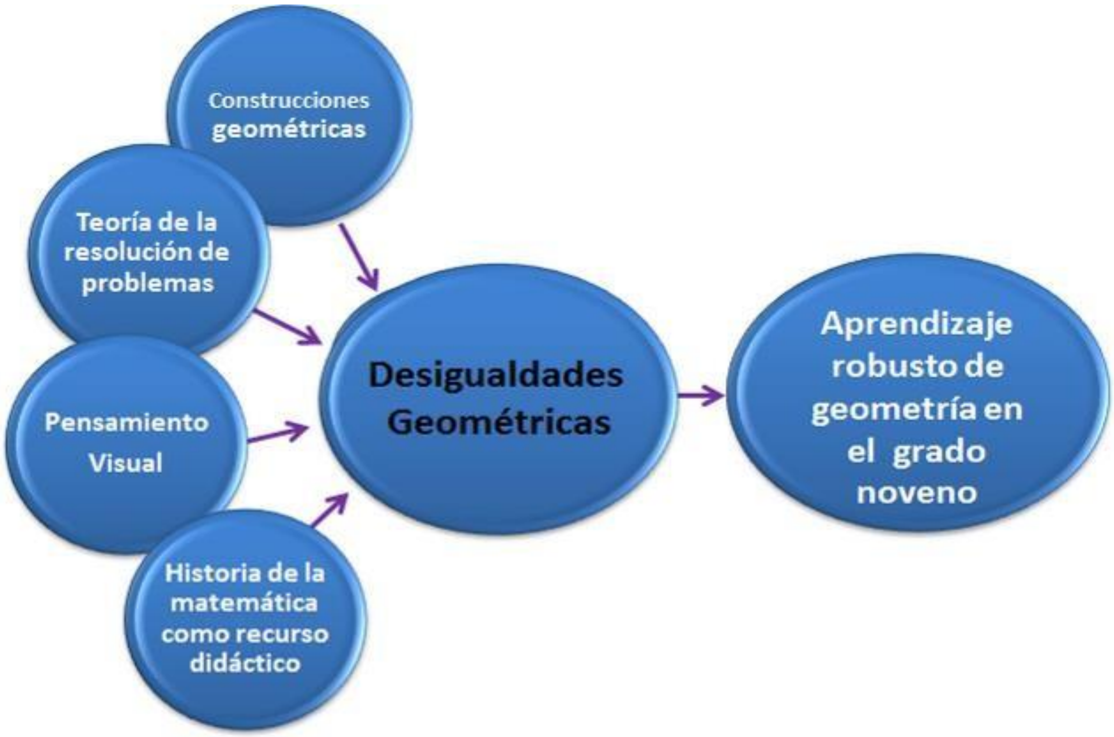



Figura 8. Relación entre las actividades y el marco teórico.

Las actividades propuestas se estructuran en: tema, objetivo, sugerencia metodológica, materiales por utilizar y desarrollo de la actividad.

## 3.2 Actividades para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las desigualdades geométricas a través de la resolución de problemas en el grado noveno

A continuación, se dan a conocer cada una de las actividades diseñadas, las cuales están sustentadas en el pensamiento visual, historia como recurso didáctico y la “solución de problemas”, según Polya.

### 3.2.1 Actividad 1. Criterio de construcción de un triángulo.

**Objetivos:**

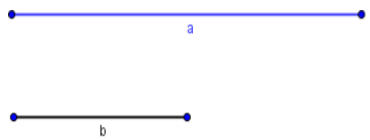
- Explorar y conjeturar propiedades de los triángulos.
- Enunciar como resultado de la experimentación y manipulación, la desigualdad triangular.

**Sugerencia metodológica**: el docente entrega la guía de trabajo a los estudiantes, la actividad se desarrolla de manera individual, el tiempo estimado para el desarrollo de la actividad es de dos (2) horas. Una vez terminada, los resultados finales serán socializados con el objetivo de concertar ideas. Durante toda la actividad habrá acompañamiento del docente, pues este les ofrece niveles de ayuda a través de preguntas heurísticas para guiar el desarrollo de las actividades en los estudiantes que así lo requieran.

**Materiales por utilizar:** guía de trabajo, regla, compás.

**Desarrollo de la actividad:**

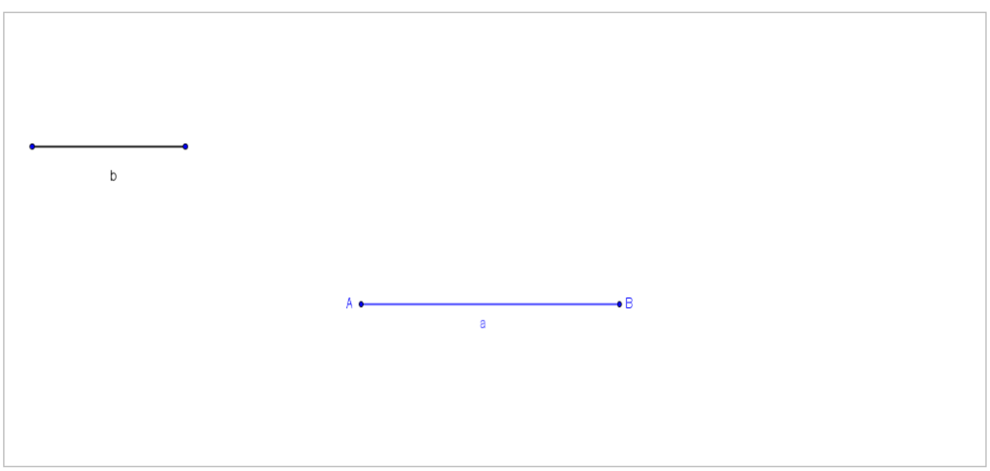
I. Dados los segmentos de longitud a y b:




a. Construya un triángulo en el cual uno de sus lados sea igual a ***a*** y otro a ***b*** (traslade los segmentos).

b. ¿Es posible construir más de un triángulo con un lado de longitud *a* y otro de longitud *b*? ¿Cuántos? Justifique su respuesta.

Al trasladar el segmento de longitud *a*, se fijan dos vértices de un triángulo, como se muestra en la figura. Dado el segmento *AB* construya cinco triángulos distintos, siendo la longitud *b* la medida de uno de sus lados (*BC*). (Trasladar el segmento de longitud *b* haciendo que uno de sus extremos sea el punto *B*).




Registre en la tabla la longitud de los segmentos *AC* obtenidos y determine el perímetro de los triángulos.

| Figura | Longitud AC | Perímetro del triángulo |
|---|---|---|
| Triángulo 1 | | |
| Triángulo 2 | | |
| Triángulo 3 | | |
| Triángulo 4 | | |
| Triángulo 5 | | |

c. ¿Cuántas opciones diferentes se tienen para fijar el vértice C del triángulo ABC?

d. ¿Qué figura describe las distintas posiciones del vértice C, con respecto del segmento BC?

II. El triángulo ABC tiene un perímetro igual a 15 cm y la longitud de sus lados son números enteros. Encuentre cuántos triángulos tienen esta característica.

a. Construya los triángulos encontrados.

b. ¿Cuántos triángulos le fue posible construir?

c. ¿Dentro de las posibilidades está el triángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm, 8 cm? Constrúyalo. ¿Qué se observa? Justifique su respuesta.

III. En un triángulo con lados de longitudes enteras, la longitud de un lado es igual a tres veces la longitud de un segundo lado, y la longitud del tercer lado es 15.[75]

a. ¿Cuál es el mayor perímetro que el triángulo puede tener? Justifique su respuesta.

IV. Juan desea sembrar un árbol a 5 metros del limón y a 6 metros del durazno. Indíquele el lugar adecuado. (En la Figura 9 cada centímetro representa un metro).

[75] Universidad Antonio Nariño. (2010). Problemas y soluciones de matemáticas. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Nivel intermedio.


[76]

Figura 9.

a. ¿Cuántas opciones tiene Juan para realizar la plantación? Justifique su respuesta.

Se quiere plantar un segundo árbol, de tal manera que quede a 3 metros del limón y 1 metro del durazno. Indique su ubicación.

b. ¿Es posible plantar el árbol según las indicaciones? Justifique su respuesta.

### 3.2.2 Actividad 2. Relación ángulo-lado

**Objetivo:** explorar y conjeturar propiedades de los ángulos y los lados opuestos en los triángulos.

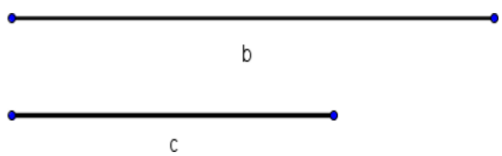
**Sugerencia metodológica**: la actividad se desarrolla de manera grupal, se entrega la guía de trabajo a los estudiantes y el tiempo estimado para su desarrollo es de dos (2) horas. Una vez terminada, los resultados finales serán socializados a fin de concertar ideas y aclarar interrogantes. En esta socialización el docente hace uso de la historia como recurso didáctico, al analizar el origen y descubrimiento de dicha propiedad.

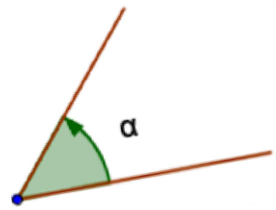
**Materiales por utilizar:** guía de trabajo, regla, compás, transportador, tijeras.

**Desarrollo de la actividad:**

I. Dados los segmentos de longitud $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, y un ángulo de medida $\alpha$, comprendido entre estos dos segmentos.

[76] Espinosa, L. (2007). Estudiando los triángulos a través de su construcción con regla y compás. Segunda unidad didáctica.




a. Construya un triángulo ABC en el cual uno de sus ángulos sea igual a **α**, un lado sea igual al segmento de longitud ***b*** y otro de sus lados sea igual al segmento de longitud ***c***. (Traslade el ángulo y los segmentos).



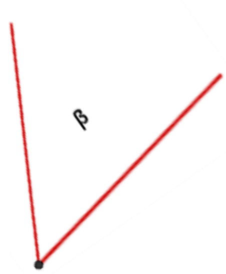
b. Si se rota el segmento de longitud ***c***, ¿qué se observa respecto a la medida del ángulo formado entre los dos segmentos?

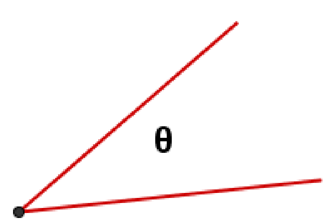
c. Si la medida del ángulo formado entre los dos segmentos aumenta, ¿qué se observa en cuanto a la longitud del segmento opuesto?

| Figura | a | b | c | $\alpha$ | $\beta$ | $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Triángulo ABC | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

d. ¿Sucede lo mismo con los demás ángulos y lados del triángulo ABC? Justifique su respuesta.

II. Dado los ángulos $\beta$, $\theta$ construya un triángulo tal, que la medida de uno de sus ángulos sea igual a $\boldsymbol{\beta}$ y otro de sus ángulos sea igual a $\boldsymbol{\theta}$. (Traslade los ángulos).



a. ¿Es posible construir más de un triángulo tal, que la medida de uno de sus ángulos sea igual a $\boldsymbol{\beta}$ y la de otro de sus ángulos sea igual a $\boldsymbol{\theta}$? Justifique su respuesta.
b. ¿Qué sucedería al segmento de longitud $\boldsymbol{c}$, si $\boldsymbol{\beta}$ fuera mayor? Construya un ejemplo.
c. ¿Qué se observa en la medida de los ángulos, si la longitud de alguno de los segmentos cambia?
d. Al analizar los resultados, ¿observa alguna relación entre la longitud de los lados y la medida de los ángulos? ¿Cuál? Justifique su respuesta.

III. Dos ciudades necesitan el servicio de agua potable. La empresa purificadora de agua decidió construir la planta junto al río más cercano y canalizar el agua desde la planta hasta cada ciudad. Cada ciudad pagará la instalación de las tuberías que irán de la planta a ella. La planta debe ubicarse a la misma distancia de las dos ciudades.

[77]

a. Indique la ubicación adecuada (punto **P**) de la planta purificadora de agua, para que esté a la misma distancia de ambas ciudades. ¿Cómo obtuvo este punto?
b. ¿Qué figura geométrica se observa al unir los puntos?
c. ¿Qué se observaría con respecto al ángulo APB, si la distancia entre la ciudad A y B se hace mayor?
d. Si la distancia entre la ciudad A y B se hace menor, ¿qué se observaría con respecto al ángulo APB?

### 3.2.3 Actividad 3. ¿Desigualdades en el teorema de Pitágoras?

[77] Juárez, J. A., Martínez, A. y Flórez, A. (2009). Matemáticas III. Geometría y trigonometría. Recuperado de http://uaprepasemi.uas.edu.mx/libros/3er_SEMESTRE/19_Matematicas_III.pdf

**Objetivo:**

- Formular conjeturas sobre propiedades de los tipos de triángulo según sus ángulos.
- Explorar, conjeturar y descubrir nuevas relaciones geométricas aplicando sus conocimientos.

**Sugerencia metodológica**: la actividad se desarrolla en grupos de trabajo, el tiempo estimado para el desarrollo de la actividad es de dos (2) horas. Se entrega la guía de la actividad a los estudiantes. Al terminar el numeral II habrá una intervención del docente de aproximadamente 15 minutos, en los cuales dará a conocer el desarrollo histórico del teorema de Pitágoras y mostrará varias de sus demostraciones. Una vez terminada la actividad, los resultados finales serán socializados, a fin de concertar ideas y aclarar dudas existentes.

**Materiales por utilizar:** guía de trabajo, reglas, compás, pegante, cuerda de 100 cm, *puzzle* (Figura 9 y Figura 10), silueta triángulo 1 y 2.

**Desarrollo de la actividad:**

I. Lea atentamente el relato: *La cuerda egipcia: 2000 años antes de Cristo.*

Cuenta la leyenda que los egipcios utilizaban una cuerda cerrada, con 12 nudos igualmente espaciados para trazar ángulos rectos (muy similar a como los obreros de la construcción todavía hacen en Colombia para asegurar que sus construcciones rectangulares tengan esquinas rectas). Los egipcios conocían muy bien las propiedades del triángulo y lo manejaban con mucha facilidad, en especial el denominado triángulo de Isis, utilizado por los constructores de todas las épocas. La particularidad de este triángulo es que la longitud de sus lados son tres números enteros consecutivos; este triángulo tenía un carácter sagrado para los egipcios.

a. Construya con la cuerda dada el triángulo rectángulo de Isis (recuerde que los nudos deben ser equidistantes).
b. ¿Cuál es la medida de cada uno de sus lados? ¿Cuánto mide cada uno de sus ángulos?

II. El triángulo de Isis o triángulo perfecto ocupó a diferentes pensadores quienes realizaron múltiples deducciones. Una de ellas se muestra en las Figuras 10 y 11.

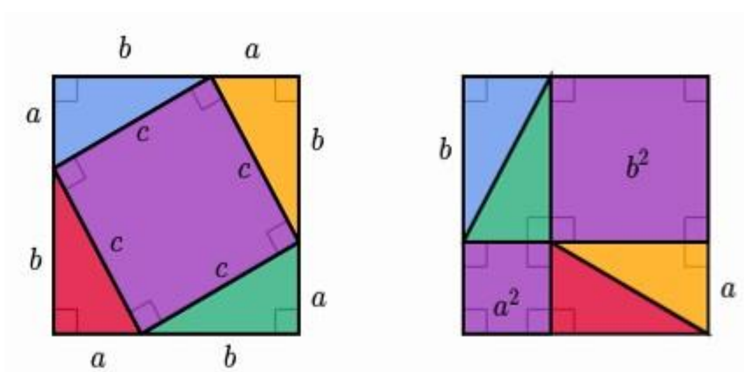



Figura 10.

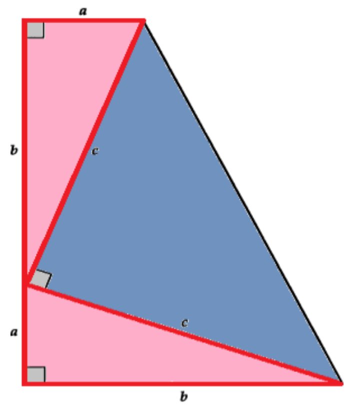



Figura 11.

a. Determine de dos maneras distintas la expresión para el área del cuadrado de la Figura 10 y compárelas.
b. Determine de dos maneras distintas la expresión para establecer el área del trapecio de la Figura 11 y compárelas. (Recuerde que el área del trapecio se determina a través de la expresión $A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \times h$ ).
c. ¿Observa alguna relación entre la Figura 10 y la Figura 11? ¿Se relacionan de alguna manera sus áreas?
d. Pegue en el recuadro la silueta del triángulo de Isis dado 1, y con las figuras que componen el cuadrado de la Figura 10 cercar el triángulo de Isis completamente. Realice el mismo procedimiento para la Figura 11, con la silueta 2.

e. Describa qué relación observa en las figuras obtenidas.
f. ¿Mediante qué expresión puede representar esta relación?
g. ¿Qué conjetura puede establecerse según el análisis realizado?
h. ¿La expresión hallada es aplicable a cualquier triángulo rectángulo? Justifique su respuesta.

De acuerdo con la situación planteada y analizada en el numeral anterior, considere las situaciones de los numerales III y IV.

III. ¿Qué se observa si el ángulo BCA del triángulo ABC es obtuso?

a. ¿Qué relación se observa?
b. ¿Mediante qué expresión puede representar la relación que observa?
c. ¿Qué conjetura puede establecerse?

IV. ¿Qué se observa, si el ángulo BCA del triángulo ABC es agudo?

a. ¿Qué relación se observa?
b. ¿Mediante qué expresión puede representar la relación que observa?
c. ¿Qué conjetura puede establecerse?

### 3.2.4. Actividad 4. Identificar relaciones entre área y perímetro del triángulo.

**Objetivos:**

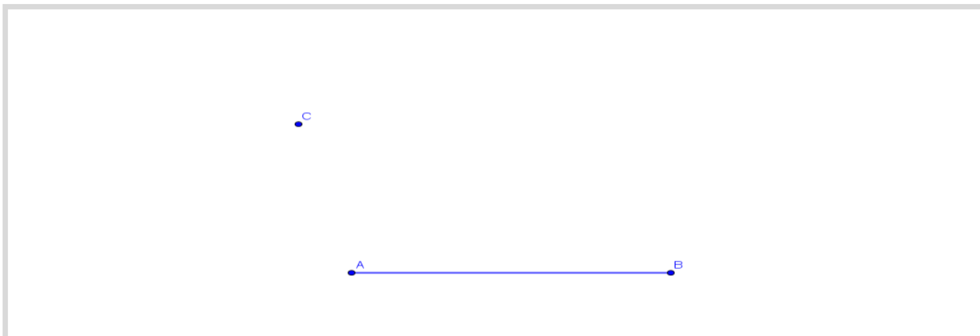
- Determinar entre todos los triángulos con perímetro fijo y base fija, cuál es el de mayor área.
- Establecer entre todos los triángulos con área y base fija, cuál es el de menor perímetro.

**Sugerencia metodológica**: el docente entrega la guía de trabajo a los estudiantes, la actividad se desarrolla de manera individual, pasados 30 minutos se les solicita agruparse por parejas para la culminación de los problemas propuestos. El tiempo estimado para el desarrollo de la actividad es de dos (2) horas. Una vez terminada, los resultados finales serán socializados con el objetivo de intercambiar las diferentes soluciones dadas por los estudiantes y aclarar las dudas que existieron durante el desarrollo de la actividad. Este proceso permite la construcción robusta de la relación que existe entre el área y el perímetro del triángulo.

**Materiales por utilizar:** guía, regla, compás, colores.

**Desarrollo de la actividad:**

I. Dado el segmento AB de longitud *c,* y un punto C exterior a él, construya una recta paralela (*m*) al segmento AB*,* que pase por el punto C dado.




a. Construya tres triángulos distintos (según la medida de sus lados), de tal forma que todos tengan como base el segmento AB, y su tercer vértice esté situado sobre la recta *m*. Registre el perímetro y el área de los triángulos:

| Figura | Tipo de triángulo | Perímetro | Área |
|---|---|---|---|
| Triángulo ABC | | | |
| Triángulo ABD | | | |
| Triángulo ABE | | | |

b. ¿Es posible construir más triángulos con esta misma característica? Justifique su respuesta.

c. Al analizar los datos registrados en la tabla, ¿es posible establecer una relación entre el tipo de triángulo según sus lados y el perímetro?

d. De todos los triángulos construidos, ¿cuál es el de menor perímetro? Justifique su respuesta.

e. ¿Qué conjetura puede establecerse?, ¿es esta conjetura generalizable?

II. En la Figura 12 se muestran los triángulos ABC y ABD, los cuales comparten la misma base y tienen el mismo perímetro.

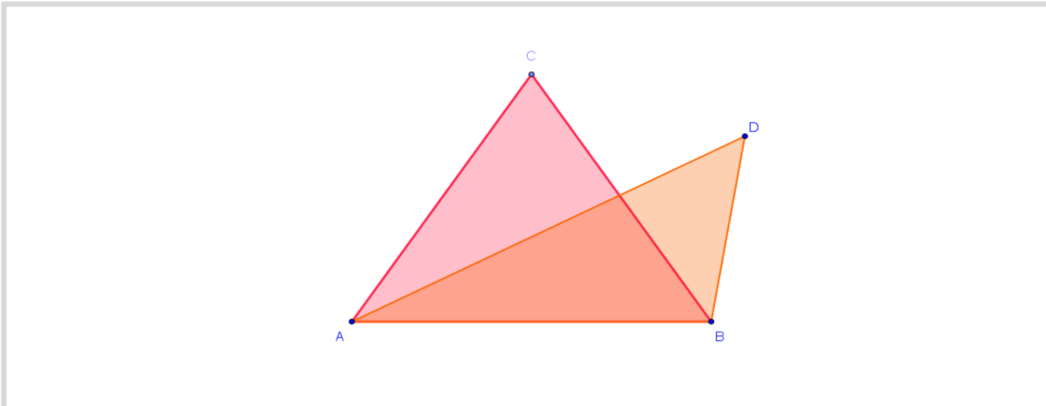



Figura 12.

a. ¿Es posible construir más triángulos que conserven esta característica? ¿Cuántos? Represente algunos.

b. Dados los vértices A y B, ¿dónde debería ubicarse el tercer vértice del triángulo, si se desea que el área de triángulo sea la mayor posible?

c. De todos los triángulos construidos, ¿cuál es el de menor área? Justifique su respuesta.

d. ¿Qué conjetura puede establecerse a partir del análisis realizado?, ¿es esta conjetura generalizable?

III. En la Figura 13 se muestra un mismo procedimiento realizado a los vértices D y B del triángulo BAD.

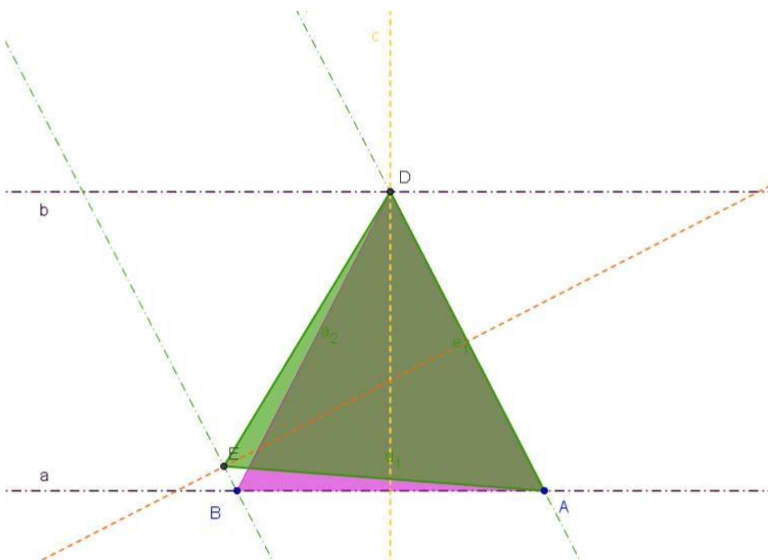
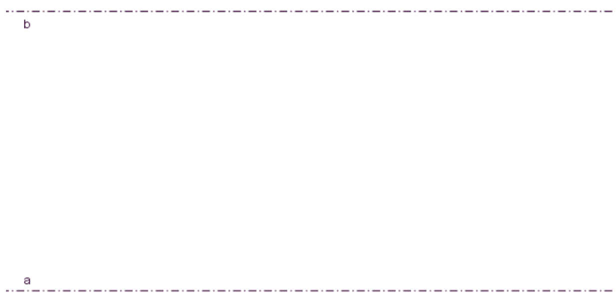


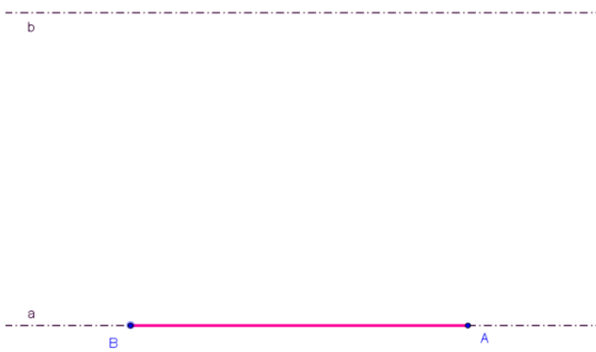

Figura 13.

A continuación, se describe el procedimiento que se lleva a cabo para obtener esta construcción.

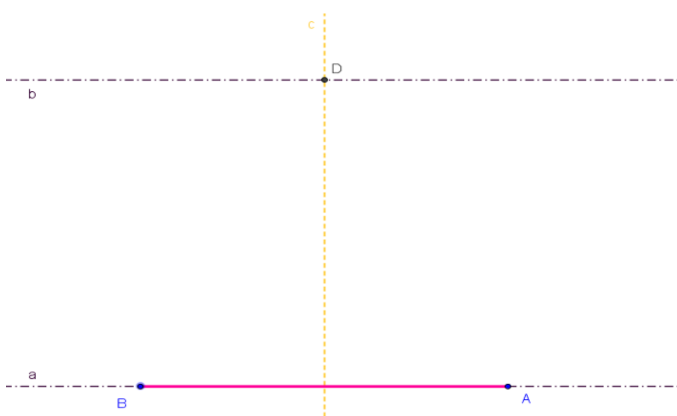
1. Se construyen dos rectas paralelas a y b.




2. En una de las rectas paralelas se traza un segmento AB.




3. Se traza la mediatriz del segmento AB, que corta a la recta paralela en D.




4. Se unen los extremos del segmento con el punto D y se obtiene el triángulo BAD.

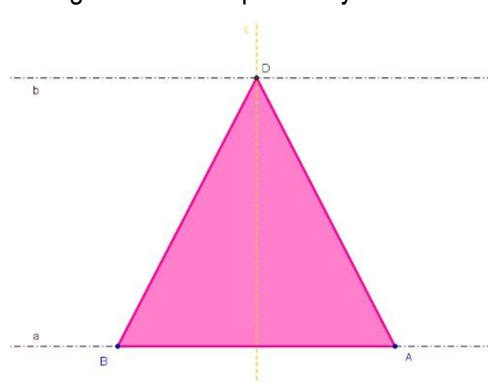


Figura 14.

Observe que el procedimiento realizado es sobre el vértice D, en el cual en una de las rectas paralelas se encuentra este vértice y la otra recta paralela contiene el lado opuesto a este vértice del triángulo DAB.

a. Realice el mismo procedimiento de la Figura 14, al vértice A del triángulo BAD.
b. Si este procedimiento se repite varias veces, ¿qué se observaría?, ¿qué figura se obtendría?
c. ¿Qué relación se observa entre cada uno de los triángulos y el área? Justifique su respuesta.
d. ¿Qué le sucede al perímetro de cada uno de los triángulos a medida que se repite el procedimiento, si este es comparado con el perímetro del triángulo BAD?

### 3.2.5 Actividad 5. Identificar relaciones entre área y perímetro del rectángulo

**Objetivos:**

- Determinar entre todos los rectángulos con perímetro fijo, cuál es el de mayor área.
- Establecer entre todos los rectángulos de área fija, cuál es el de menor perímetro.

**Sugerencia metodológica**: la docente les entrega la guía de trabajo a los estudiantes, la actividad se desarrolla por parejas, transcurridos treinta (30) minutos se les solicita agruparse con uno de los demás grupos para la culminación de los problemas propuestos. El tiempo estimado para el desarrollo de la actividad es de dos (2) horas. Una vez terminada, los resultados finales serán socializados, con el objetivo de aclarar las dudas que existieron durante el desarrollo de la actividad.

**Materiales por utilizar:** guía, retícula, marcadores.

**Desarrollo de la actividad:**

I. Dado el cuadrado construya rectángulos en los cuales su perímetro sea igual al perímetro del cuadrado. Compare sus áreas y describa lo que observa.

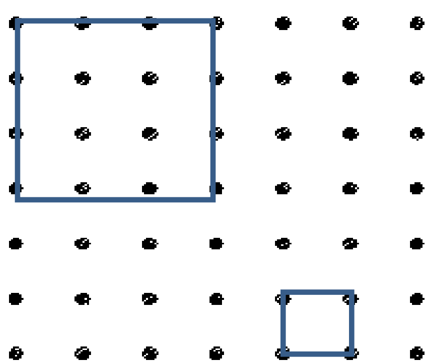


Figura 15.

Registre sus observaciones en el recuadro:

| | |
|---|---|
| Figura 15 | |

a. Con cada uno de los rectángulos dados construya un cuadrado cuya área sea igual a la del rectángulo. Luego compare sus perímetros y describa lo que observa.

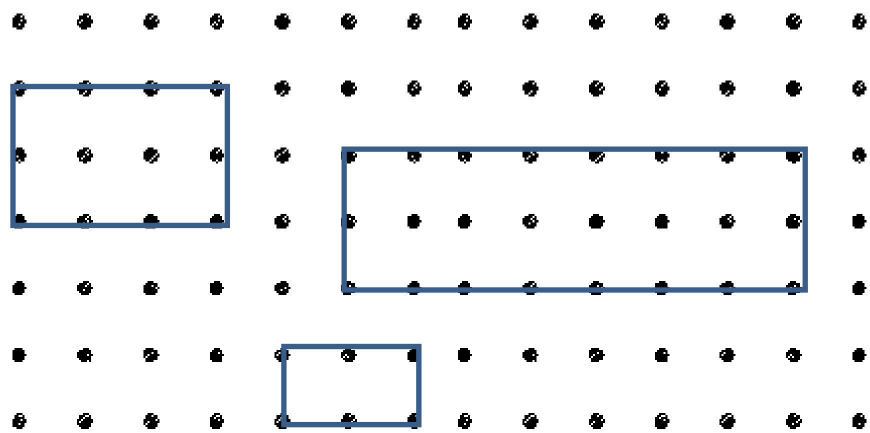


Figura 16.

| | |
|---|---|
| Figura 16 | |

II. Se dispone de una tabla de madera de 100 centímetros (Figura 17), para enmarcar una fotografía.


Figura 17.

a. ¿Qué valores pueden tomar *a* y *b?* Justifique su respuesta.

Registre en la tabla algunos de los valores posibles para *a* y *b,* y determine el área en cada caso para las diferentes figuras obtenidas.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lado a** | | | | | | |
| **Lado b** | | | | | | |
| **Área** | | | | | | |
| **Perímetro** | | | | | | |

b. ¿Qué ocurre con el valor del área a medida que varían los valores de *a* y *b*?
c. ¿Es posible establecer una relación entre la figura obtenida y su área?
d. ¿Cuántas maneras distintas se tienen para enmarcar la fotografía con la tabla de madera?
e. ¿Qué forma debe tener la fotografía para que la superficie enmarcada sea la máxima posible?
f. ¿Qué conjetura puede establecerse, luego de analizar la situación?
g. Si se sabe que el perímetro de la fotografía rectangular que se quiere enmarcar es ***x*** centímetros, ¿cuál es la fotografía de mayor área que se puede enmarcar?

III. Sea BCDE un cuadrilátero dado de área 15 $cm^2$. Para construir un cuadrilátero de igual área, se tuvieron en cuenta los siguientes pasos:

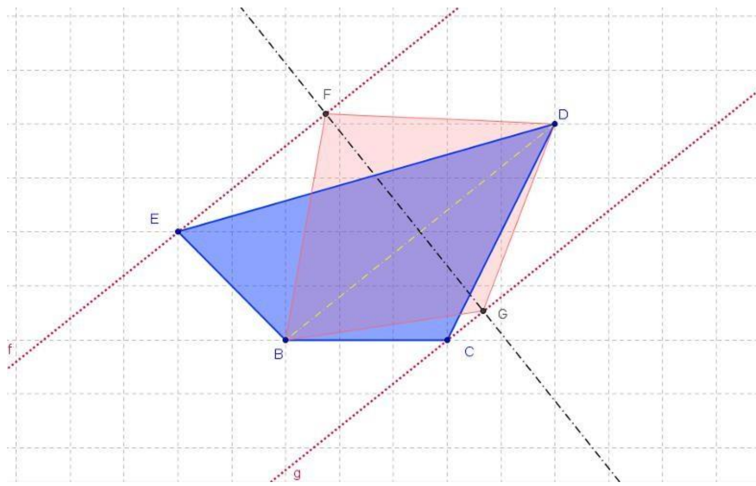



Figura 18.

- Se trazó una de las diagonales del cuadrilátero BCDE, el segmento DB.
- Por los vértices E y C del cuadrilátero BCDE, se trazaron las rectas *f* y *g* paralelas al segmento BD.
- Se trazó la mediatriz del segmento DB, de tal forma que intersecte a las dos rectas paralelas en los puntos F y G.
- Se identifican los puntos de intersección de las rectas paralelas y la mediatriz de DB.
- Se traza el cuadrilátero BGDF, el cual tiene la misma área que el cuadrilátero BCDE.

a. Realice este procedimiento dos veces más, a partir del cuadrilátero BFDG, usando como diagonal el segmento FG.
b. Si este procedimiento se realiza varias veces, ¿qué se observaría?, ¿qué figura se obtendría?
c. ¿Qué le sucede al perímetro de cada uno de los cuadriláteros a medida que se repite el procedimiento para hallar cuadriláteros de igual área?
d. Al comparar el perímetro del cuadrilátero BCDE, en relación con el perímetro de los demás cuadriláteros construidos, ¿qué se puede decir?
e. Exprese la conjetura obtenida luego de analizar la situación.

### 3.2.6 Actividad 6. Descubriendo la figura plana con mayor área en condiciones dadas

**Objetivos:**

- Descubrir a través de la experimentación y manipulación la figura plana con perímetro dado y con la mayor área posible.
- Explorar y conjeturar propiedades de las figuras planas según su área.

**Sugerencia metodológica**: la actividad se desarrollará por parejas, el tiempo estimado para la actividad es de dos (2) horas, se entregará la guía de trabajo a los estudiantes. Una vez terminada, los resultados finales serán socializados a fin de concertar ideas y aclarar interrogantes. Durante toda la actividad habrá acompañamiento del docente.

**Materiales por utilizar:** guía de trabajo, tijeras, molde, papel blanco y cuadriculado tamaño carta, cinta de tela de 50 cm, retícula, marcadores, compás.

**Desarrollo de la actividad:**

I. Lea detenidamente y realice los numerales del 1 al 4.

1. Tome la cuerda dada y determine su medida.
2. Usando la cuerda anteriormente atada, forme figuras geométricas planas como el cuadrado, triángulo, rectángulo, trapecio…
3. Enumere las unidades contenidas en la región delimitada por la cuerda, tras la construcción de las diferentes figuras geométricas.
4. Registre los datos obtenidos en la tabla.

| N.° | Figura | Número de unidades |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |

a. ¿Qué figura tiene el menor número de unidades? ¿Cuál cree que sea la razón?
b. ¿Existe alguna relación entre la forma de la figura y la cantidad de unidades que esta encierra? Justifique su respuesta.
c. ¿La cantidad de lados de la figura tiene relación con la cantidad de unidades contenidas en la región que esta encierra?
d. ¿La longitud de los lados de las figuras se relaciona de alguna manera con la cantidad de unidades contenidas en la región?
e. ¿Podría formar más figuras? ¿Cuáles?

II. Lea el siguiente fragmento de la leyenda e imagine estar allí para resolver la situación.


[78]

[78] Alsina, C. y Nelsen, R. (2009). When less is more: visualizing basic inequalities. The Mathematical Association of America. United States of America.

Cuenta la leyenda que Dido era la princesa de la ciudad fenicia de Tiro. Dido huyó de la ciudad después de que su hermano asesinó a su esposo y llegó a África, cerca de la bahía de Túnez. Allí Jarbas, un rey local, estaba dispuesto a venderle a Dido un trozo de tierra con la única condición de que no fuese más grande que el que se puede encerrar con la piel de un buey.

a. ¿Cuál es su estrategia para encerrar la mayor extensión de terreno con el cuero de un buey?
b. Para que la estrategia funcione, ¿qué cortes realizaría?
c. ¿Al realizar los cortes obtuvo alguna figura geométrica?
d. ¿Qué procedimiento usó para asegurarse de que la piel encierre la mayor parte de terreno posible?
e. ¿Qué puede concluir según los resultados obtenidos? ¿Dido pudo lograr sacar provecho de esta situación?

III. Una cabra está en un potrero atada a la esquina de un redil (jaula, cerca, etc.) de forma rectangular con dimensiones de 4 metros de ancho y 5 metros de largo, con una cuerda que mide 6 metros.

   a. Realice un esquema gráfico de la situación planteada.
   b. ¿Qué posibilidades tiene la cabra para pastar? Señale la región encontrada. Justifique su respuesta.
   c. ¿Podría representar esta situación en la retícula y enumerar las unidades de la región donde la cabra puede pastar? Si es así, ¿cuántas unidades contiene?
   d. ¿Sería útil el uso del compás? Explique.

### 3.2.7 Actividad 7. Feria de geometría. Problemas no rutinarios

**Objetivos:**

- Resolver problemas geométricos que permitan identificar el nivel de conocimientos geométricos en el estudiante.
- Motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de la geometría.

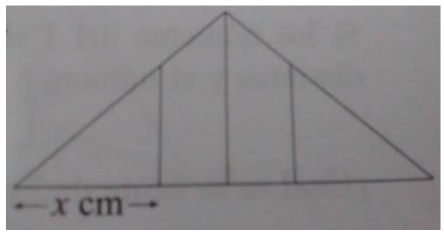
**Sugerencia metodológica:** en la actividad participan las 16 estudiantes de la muestra como grupo control y 32 estudiantes en calidad de asistentes a la feria. Esta actividad se realiza de manera grupal y se emplean cuatro (4) horas para su desarrollo. Durante la actividad se identifican dos momentos: el primero es la resolución de los problemas no rutinarios por parte de los ocho (8) grupos de control. En un segundo momento se realiza la feria, en la cual las estudiantes asistentes se distribuyen en las ocho (8) mesas de trabajo. En cada una de las mesas hay dos (2) estudiantes del grupo control, las cuales les presentan a las estudiantes que visitan la feria geométrica, un problema no rutinario. Al final de la actividad, las estudiantes del grupo control comentan las experiencias observadas durante su desarrollo. La docente está presente durante toda la actividad y visita cada una de las mesas de trabajo, en las cuales ofrece niveles de ayuda. Algunos de los problemas que se consideran pertinentes para el desarrollo de la feria de geometría son tomados de los problemas y las soluciones de matemáticas (2012).

**Materiales por utilizar**: guía de trabajo, tijeras, molde, papel blanco tamaño carta, cinta, compás, palillos.

**Desarrollo de la actividad**:

I. En un triángulo con lados de longitudes enteras, la longitud de un lado es igual a tres veces la longitud de un segundo lado, y la longitud del tercer lado es 15. ¿Cuál es el mayor perímetro que el triángulo puede tener?[79] Justifique su respuesta.

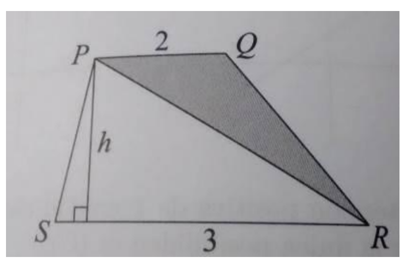
II. Un triángulo isósceles tiene una base horizontal de 12 cm de largo. Se divide en cuatro regiones de igual área usando tres líneas paralelas, como se muestra. ¿Cuál es el valor de x?[80]




III. María tiene 62 baldosas cuadradas de color azul y suficientes baldosas cuadradas de color rojo. Todas las baldosas tienen el mismo tamaño. Ella construye un rectángulo con baldosas rojas y lo encierra con baldosas azules a su alrededor. ¿Cuál es el máximo de baldosas rojas que ella puede usar?[81]

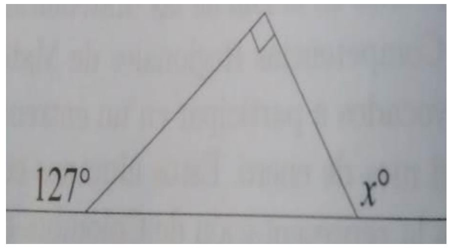
IV. PQRS es un trapecio en el cual PQ = 2 unidades y RS = 3 unidades. ¿Qué fracción del área del trapecio corresponde al área sombreada?[82]

V. Un cuadrado con lados de longitud 8 se corta por la mitad, creando dos rectángulos congruentes. ¿Cuáles son las dimensiones de uno de los rectángulos?[83]




VI. En el diagrama, ¿cuál es el valor de x?

79 Universidad Antonio Nariño. (2010). Problemas y soluciones de matemáticas. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Nivel intermedio.
80 Universidad Antonio Nariño. (2010). Problemas y soluciones de matemáticas. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Nivel intermedio.
81 Universidad Antonio Nariño. (2010). Problemas y soluciones de matemáticas. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Nivel intermedio.
82 Universidad Antonio Nariño. (2010). Problemas y soluciones de matemáticas. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Nivel intermedio.
83 Universidad Antonio Nariño. (2010). Problemas y soluciones de matemáticas. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Nivel intermedio.

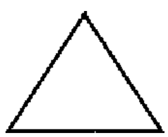


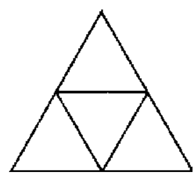

VII. Hallar las dimensiones del rectángulo cuyo perímetro sea 22 cm y que tenga la mayor área posible.[84]

VIII. Sea ABC un triángulo con AB = 100 y AC = 156. Sea M el punto medio del lado AB. Se traza por M la perpendicular al lado AC, que corta al lado AC en K. Calcular el lado BC si AK = 14.

IX. Un ranchero tiene 300 m de malla para cercar dos corrales rectangulares iguales que comparten un lado de la cerca. Determinar las dimensiones de los corrales para que el área cercada sea máxima.

X. En una tarde de domingo, Manuel y yo encontramos una caja de palillos y nos pusimos a jugar con ellos. Manuel cogió tres palillos e hizo un triángulo.





Entonces yo tomé 6 palillos y formé un segundo nivel. Continuamos del mismo modo hasta que tuvimos una figura con 7 niveles. ¿Cuántos palillos utilizamos?[85]

**Conclusiones del Capítulo 3**

El diseño de las seis actividades y la feria geométrica, dirigidas a estudiantes de grado noveno, contemplan el uso de las desigualdades geométricas sustentadas en la teoría de resolución de problemas, el uso de instrumentos tradicionales y el pensamiento visual, herramientas que se relacionan entre sí de manera directa.

En las actividades se hace notar la relación entre las construcciones geométricas, pensamiento visual y resolución de problemas. Según Polya (1992), la regla y el compás constituyen una herramienta heurística que permite al estudiante familiarizarse con las figuras geométricas, así como instruirlo en la resolución de problemas. En este mismo sentido Polya, en su segunda fase de resolución de problemas, contempla hacer una figura de análisis, o sea la representación gráfica de la situación.

[84]Malaspina, U. (2013). El rincón de los problemas: variación de un problema isoperimétrico, conjeturas y problemas. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (36), 123-130. Recuperado de https://bit.ly/2V4nto1
[85] Ministerio de Educación de Perú. (2011). Blog del Área de Formación Inicial Docente: resolución de problemas.

Este aspecto favorece la visualización e incide en el pensamiento visual, pues le permite comprender la situación problema e interiorizarla.

La clase de geometría enfocada en la resolución de problemas favorece la motivación por el aprendizaje robusto de la geometría.

# CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se resumen y analizan los resultados obtenidos, los cuales fueron evidenciados durante la aplicación de las actividades. Este proceso se realiza teniendo en cuenta los siguientes aspectos: desarrollo de las actividades, motivación, logros y dificultades.

## 4.1 Valoración de los resultados obtenidos en la práctica escolar de la investigación

A continuación, se hace un análisis desde el punto de vista cualitativo, considerando los aspectos antes valorados.

### 4.1.1. Actividad 1. Criterio de construcción de un triángulo

La actividad se desarrolla de manera individual, dado que se pretende identificar el impacto personal frente a este tipo de actividades, de cada una de las 18 estudiantes (ver Figura 19), que conforman la muestra. Al inicio de la actividad se hace referencia al uso de la regla y el compás desde la antigüedad, en la que se hizo una breve reseña histórica, en la cual se menciona a Euclides por sus aportes significativos y trascendentes en geometría, consignados en su obra "*Los Elementos*".

Luego, las estudiantes reciben la guía y cada una de ellas la analiza de manera general, con lo cual se generan interrogantes, pues no comprenden cómo dar solución a los problemas dado que no observan valores numéricos para desarrollar las preguntas planteadas allí y otras se mostraron muy interesadas por hacer uso del compás.

Figura 19. Inicio de las actividades.

El problema 1 consta de cuatro incisos (*a*, *b*, *c*, *d*). A continuación, se describe lo observado en cada uno de ellos:

En el inciso *a*, las estudiantes debían construir un triángulo según las condiciones dadas: el 72 % de las estudiantes no presentaron mayores dificultades, pues construyeron el triángulo e identificaron sus lados. En las construcciones se destaca el proceso realizado por algunas de las estudiantes, por ser diferente al de la mayoría.

Por otra parte, el 28 % restante de las estudiantes realizaron diversos intentos, pero no obtuvieron éxito en sus construcciones, pues trasladan las distancias a y b, una a continuación de la otra, pero no conciben cómo formar el triángulo. También es de resaltar que otras estudiantes trasladan primero el segmento de longitud a y luego el segmento b, pero obtienen una circunferencia inscrita en la circunferencia de radio a, por lo cual no hay intersecciones, con lo que se le dificulta identificar el triángulo solicitado, aunque la traslación es apropiada.

Además es necesario precisar que en este proceso las estudiantes no trazan la recta de apoyo para la traslación de los segmentos, lo cual dificulta la identificación y genera imprecisiones en las medidas, pues poseen escasas habilidades en el trabajo con los instrumentos tradicionales (regla, escuadra y compás).

En el inciso *b,* a pesar de que la construcción del triángulo fue adecuada para la mayoría de las estudiantes, al solicitarles analizar y generalizar sobre la figura construida, el 78 % presenta dificultades. Es de notar que algunas realizaron casos particulares para establecer la respuesta, pero no alcanzan una apropiada generalización. Varias estudiantes plantearon abiertamente expresiones que no fueron justificadas, como: "… muchos, se pueden hacer 100"[86], tan solo el 22 % argumenta aspectos como "… se pueden hacer demasiados puntos sobre la circunferencia de manera casi infinita; el radio b se puede girar y todos miden b"[87], entre otros.

En el inciso *c*, se observa que algunas no siguieron las indicaciones planteadas, pues trasladan el segmento de longitud b a partir del vértice no indicado. Es necesario aclarar que el resultado es el mismo, pues este proceder no tiene incidencia sobre la respuesta. El 55 % de las estudiantes hace adecuado uso de la regla para determinar las medidas de los lados del triángulo, determina su perímetro y alcanzan la generalización. Por otra parte, el 45 % restante no tiene claridad sobre cómo determinar el perímetro, no expresan las unidades de longitud y no se acercan a la generalización a pesar de realizar casos particulares sobre la figura de análisis.

En el inciso *d*, el 55 % de las estudiantes identifica el lugar geométrico como una circunferencia, que se obtiene al contemplar todas las posiciones del vértice c. El 45 % de las estudiantes no alcanza un buen nivel de generalización, por lo cual no identifican apropiadamente el lugar geométrico; entre sus afirmaciones están: "… triángulo, hexágono"[88], o no responden a esta pregunta.

El problema 2 consta de tres incisos (*a*, *b*, *c*). En el inciso *a*, se solicita la construcción de triángulos cuyo perímetro sea igual a 15 cm y sus lados valores enteros. En el proceso de resolución se pueden apreciar dos tendencias: por un lado, el 88,8 % de las estudiantes no hizo uso del compás (el problema no lo indicaba), pues usan la regla como instrumento para medir y construir el triángulo indicado. También se observa cómo los triángulos que se construyen con la regla no evidencian una solución correcta del problema, ya que no reflejan las medidas estipuladas (ver Figura 20); por otro lado, tan solo el 11,1 % de las estudiantes contempló el uso de compás parcialmente (ver Figura 21).



[86] Opiniones de las estudiantes.
[87] Opiniones de las estudiantes.
[88] Opiniones de las estudiantes.

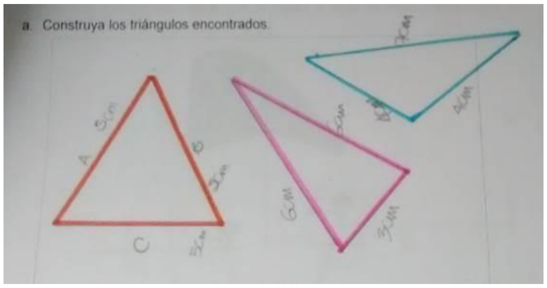



Figura 20. Triángulos construidos con regla.

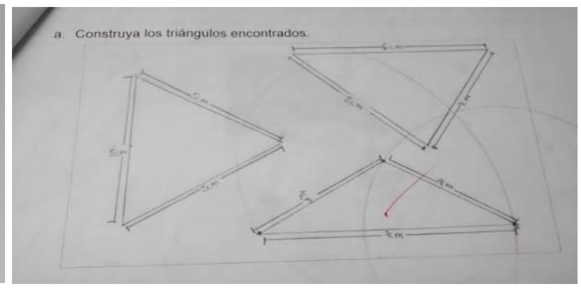



Figura 21. Triángulos construidos con compás.

El inciso *b* sugiere precisar cuántos triángulos es posible construir con estas condiciones, ante lo cual ninguna de las estudiantes logró generalizar esta situación: la mayoría designa un número y no profundiza en sus respuestas; el 83,3 % no dio respuesta a esta pregunta.

La búsqueda de la solución del inciso *c* genera desconcierto y dudas en las estudiantes, pues el triángulo solicitado no se forma. Para muchas esto indica que algo estaban haciendo incorrecto, por lo cual repitieron varias veces sus construcciones, que en la mayoría de ocasiones tuvo lugar con el uso de la regla. El 27.7 % de las estudiantes ofrecen argumentos semejantes a los de la Figura 22, en la cual se precisa el análisis realizado por las estudiantes.

Por otra parte, el 11.1 % de las estudiantes relacionan la no construcción del triángulo con la condición de que las circunferencias se deben interceptar, como se observa en la Figura 23. El 11.2 % no ofrece una respuesta a esta pregunta y el 50 % no justifica expresiones como "… no se puede construir".[89]



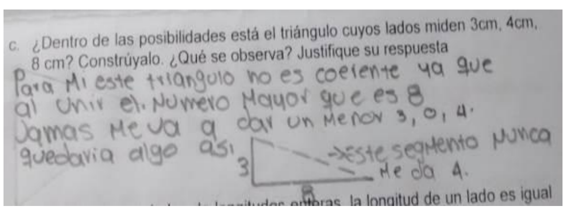



Figura 22. Evidencia 1 de justificación.

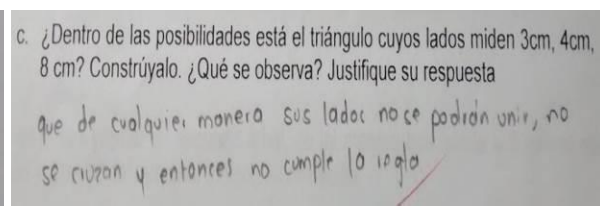



Figura 23. Evidencia 2 de justificación.

El problema 3 representa un reto para la mayoría de las estudiantes. Algunas leyeron varias veces el problema, pero no consiguieron apropiarse de él, dado que no les fue posible identificar la incógnita. Tan solo el 27.7 %, realiza figura de análisis, plantea casos particulares y estima una respuesta. Ninguna de las repuestas fue apropiada, ya que la condición de ser el triángulo de mayor perímetro no está sustentada.

El problema 4 consta de dos incisos (*a*, *b*). En este problema las estudiantes manifiestan cierto interés por su resolución. El 77.7 % comprenden el enunciado del problema e identifican los datos suministrados, a pesar de ello tan solo el 50 % identifica el procedimiento adecuado y usa el compás para trasladar las medidas o trazar la mediatriz (ver Figura 24) y ofrecen una respuesta acorde al contexto del problema, dado que al trazar la mediatriz se obtienen dos puntos, y deben descartar uno de ellos. Algunas estudiantes intentaron dar solución haciendo uso de la regla, pero luego de varios intentos no lograron situar el punto solicitado, pues al trazar las distancias estas no determinan un punto en común.

[89] Opiniones de las estudiantes.

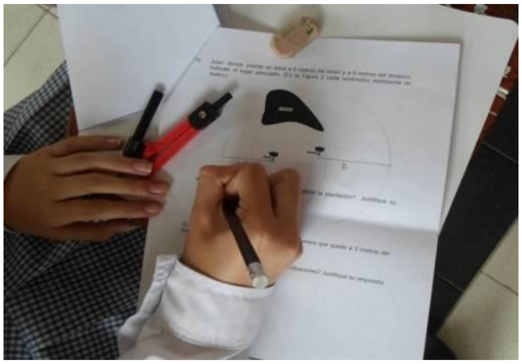


Figura 24. Resolución inciso *a*.

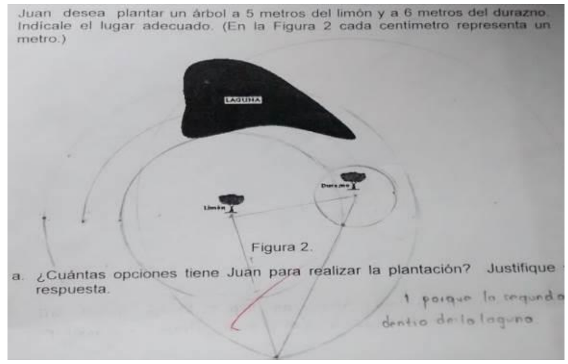



Figura 25. Resolución inciso *b*.

En el inciso *b* se debía realizar un proceso similar, en el cual se observa nuevamente que las estudiantes relacionan la posibilidad de formar un triángulo si las circunferencias se intersectan (ver Figura 25). El 50 % de las estudiantes relaciona la situación con el numeral anterior y la resuelve en el mismo sentido: el 27.7 % no dio respuesta a esta pregunta por cuestiones de tiempo.

**Motivación por el aprendizaje**. La introducción de la actividad es realizada por la docente, quien valora la importancia de los instrumentos como la regla y el compás, también indica que la regla se utiliza para trazar rectas y hace un análisis histórico del uso de estos instrumentos, aspectos que sientan las bases para la motivación de la actividad. Dadas las indicaciones, las estudiantes estuvieron a la expectativa de cómo utilizar estos instrumentos para comprobar por qué habían sido útiles en la antigüedad. Esta actividad superó las expectativas iniciales, el ambiente de trabajo fue agradable, se observó integración y cooperación. También surgieron cuestionamientos importantes durante la actividad, relacionados con la aplicabilidad de lo que están aprendiendo. La participación fue activa, aspecto que muestra el interés en resolver la actividad.

**Logros**. En el desarrollo de la actividad se evidencia:

- Aumento del interés y la curiosidad por el aprendizaje de la geometría, al mostrarles su importancia y aplicabilidad.
- Las estudiantes consideran figuras de análisis, como herramienta de apoyo para una mejor compresión.
- Se crea un escenario propicio para la familiaridad y el desarrollo de habilidades con los instrumentos tradicionales.
- El sentido crítico y argumentativo se despertó en las estudiantes y permitió que expresaran libremente sus ideas sin temor a incurrir en errores.

**Dificultades**. Esta actividad constituyó un desafío para las estudiantes tanto por el uso de los instrumentos como por la metodología. En su implementación se constataron las siguientes dificultades:

- Es limitada la habilidad en el manejo de los instrumentos tradicionales.
- El tiempo planeado para el desarrollo de la actividad tuvo que ser duplicado pese a la dificultad de la mayoría con respecto al uso adecuado de los instrumentos.
- El desarrollo de la actividad tardó más de lo previsto inicialmente, pues esta es la primera vez que las estudiantes se enfrentan a actividades de este tipo.

- La habilidad argumentativa e interpretativa de las estudiantes es limitada, en algunos casos por temor a equivocarse.
- La capacidad de análisis sobre las figuras construidas es mínima.
- No establecen comparaciones (=, >, <) entre figuras y longitudes.

#### 4.1.2. Actividad 2. Relación ángulo-lado

Esta actividad se desarrolló en grupos de trabajo de dos y tres estudiantes. Se entrega la guía, compuesta por tres problemas por resolver. En el desarrollo de esta actividad participan 17 estudiantes. Tras la primera experiencia de la actividad número 1, en la cual a través de la experimentación se dedujo la desigualdad triangular, algunas estudiantes se cuestionaban "¿… con qué iremos a trabajar en esta guía?"[90], aspecto que motivó su desarrollo. A continuación, se describe de manera general lo observado durante la actividad:

El problema 1 consta de 4 incisos (*a*, *b*, *c*, *d*). El inciso *a* fue desarrollado sin mayor dificultad por las estudiantes (87.5 %) y se destaca el traslado apropiado de los segmentos y ángulo dados (ver Figura 26). En este problema las estudiantes trazan rectas de apoyo para el traslado de los segmentos, nombran ángulos y lados del triángulo, con la regularidad de tomar el segmento de mayor longitud como base del triángulo solicitado. Por otra parte, para algunas de las estudiantes no era conocido cómo trasladar un ángulo, no identifican con claridad cómo trasladar los lados y usan notación imprecisa para denotar ángulos y lados. Algunos de los triángulos construidos no cumplían con las condiciones solicitadas.



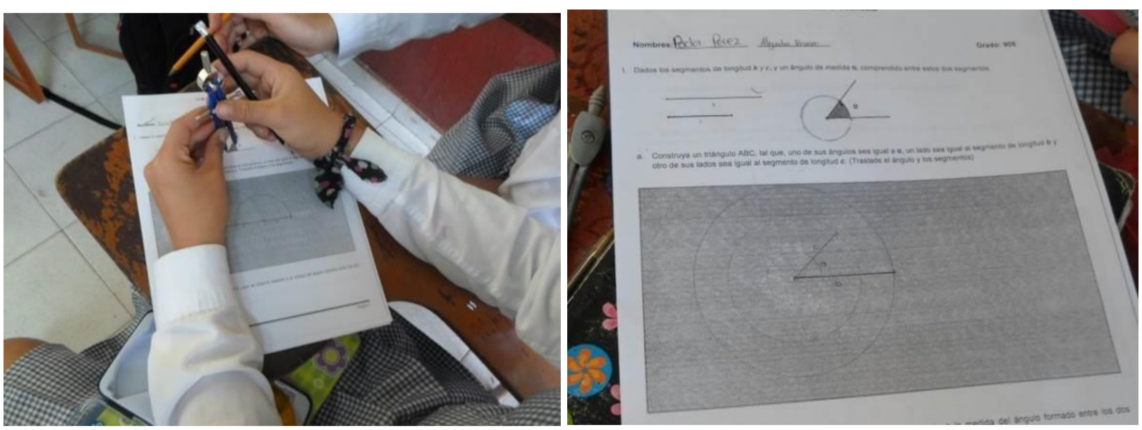


Figura 26. Uso del compás para traslado de ángulos.

En el inciso *b*, el 75 % de las estudiantes interpretan la situación planteada, pues realizan figura de análisis, logran visualizar lo que sucede de manera general al rotar el segmento y describen y argumentan sus observaciones. Por otra parte, el 25 % de las estudiantes identifican lo que sucede, pero no argumentan sus razonamientos, al expresar "… cambia o el ángulo aumenta"[91], entre otras cuestiones. Los incisos *c* y *d*, a primera vista no son interpretados por las estudiantes, dada la no familiaridad con la notación utilizada para el ángulo. También tienen dificultades para interpretar de dónde obtener los

[90] Opiniones de las estudiantes.
[91] Opiniones de las estudiantes.

datos para diligenciar la tabla, pues es en este momento que la docente para guiar a los estudiantes hacia la búsqueda de la solución, se vale de recursos heurísticos, tales como establecer las diferencias y similitudes con el problema anterior, dibujar el segmento mayor y analizar lo sucedido a la medida del ángulo.

Una vez superados los inconvenientes, el 50 % de las estudiantes usan la regla para determinar la longitud de los segmentos apropiadamente. También tienen en cuenta que la medida de los ángulos interiores del triángulo debe ser igual a 180° y argumentan el motivo por el cual en la tabla algunos valores permanecen constantes para los diferentes triángulos (ver Figura 27).

Por otra parte, el 50 % de las estudiantes tiene dificultades con el uso del transportador, pues al determinar la medida de los ángulos lo ubican inapropiadamente (ver Figura 28), lo cual genera medidas incorrectas. En este proceso las estudiantes no tienen en cuenta la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, no analizan los datos registrados en la tabla ni perciben la relación entre la medida del ángulo y la medida de los lados del triángulo.

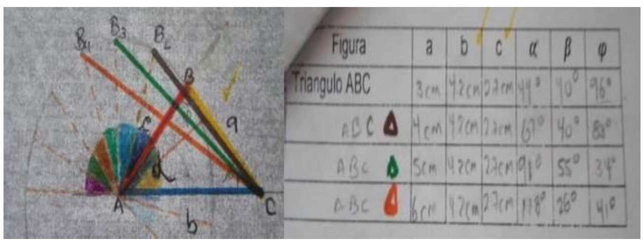



Figura 27. Uso adecuado de instrumentos.

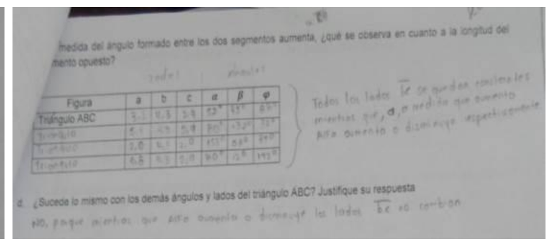


Figura 28. Uso no adecuado de instrumentos.

El problema 2 consta de cuatro incisos (*a*, *b*, *c*, *d*). En el inciso *a*, se les pide la traslación de dos ángulos para formar un triángulo. Las estudiantes identifican rápidamente los pasos por seguir dado que tienen presente la solución de un ejercicio similar en la guía 1, por lo cual el trasladar uno de los ángulos no representa dificultad. Pero al trasladar el segundo ángulo, es de aclarar que, aunque identifican e intuyen a dónde deben llegar, no relacionan una posición para trasladar el ángulo, de tal forma que cumpla con la condición. Una de las dificultades identificada en las estudiantes es que conciben las diferentes posiciones de un mismo triángulo como un triángulo distinto, lo que genera respuestas inapropiadas para este inciso.

El 75 % de las estudiantes negó la posibilidad de construcción de más triángulos, afirmando que: "… al trasladar los dos ángulos el otro ya queda determinado, y por la suma de ángulos interiores, no es posible modificar los ángulos"[92].

Los incisos *b*, *c* y *d* se relacionan entre sí y tienen como objetivo conducir a la generalización e identificación de la propiedad. Para ellos se sugiere analizar qué les sucede a los lados del triángulo, si las medidas de sus ángulos son modificadas. El 87.7 % de las estudiantes identifican ágilmente lo que sucede a los ángulos y lados opuestos, y ofrecen una descripción. El inciso *d* sugiere la búsqueda de una conjetura para las observaciones realizadas, pero no todas logran generar su observación para los demás lados y ángulos del triángulo.

El problema 3 consta de cuatro incisos (*a*, *b*, *c*, *d*). Los incisos *a* y *b* están relacionados y la estrategia por utilizar es una adecuada visualización, pues se sugiere la ubicación de un punto equidistante

[92] Opiniones de las estudiantes.

de dos puntos dados, ante ello el 87.5 % de las estudiantes hacen uso del compás para hallar el punto **P** solicitado y de manera casi inmediata reconocen la mediatriz como una posible solución (ver Figura 29). Por otra parte, el 12.5 % de las estudiantes usa la regla como instrumento para medir y hallar el punto **P** solicitado, a través del método de ensayo error; ante esta situación la docente cuestiona al respecto si la regla no tiene la función de determinar medidas (para esta clase) y pregunta ¿cómo lo resolvería? Este interrogante lleva a las estudiantes a pensar en el compás como una opción.

Otra situación dada fue la interpretación de “a la orilla del río”, pues algunos grupos ubicaron el punto **P** pasando el río, como se muestra en la Figura 30. A fin de hacer evidente el error, la docente sugiere cambiar los roles y analizar la siguiente pregunta: ¿Si usted es la gerente de la empresa purificadora, qué ubicación de las dos opciones encontradas sería la más conveniente, por costos y comodidad? Lo cual llevó a tomar la decisión acertada.

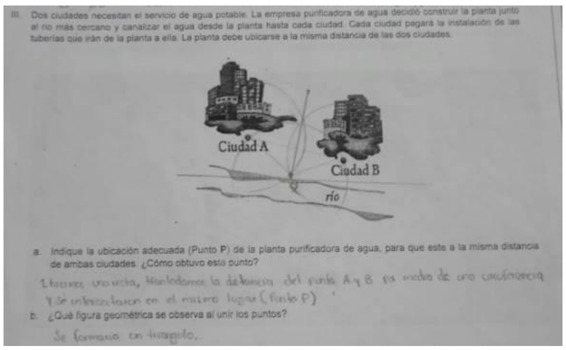



Figura 29. Solución a través de la mediatriz.

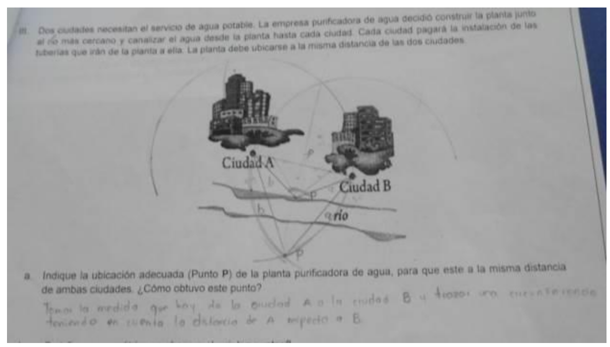



Figura 30. Inconsistencia en la solución.

En los incisos *c* y *d*, el 87.5 % de las estudiantes identifican y representan las situaciones solicitadas, analizan y describen adecuadamente lo que le sucede al ángulo, a medida que las distancias varían. El 12.5 % presenta dificultades dado que no identifican el ángulo sobre el cual hay que realizar cambios y confunden ángulo con lados, por lo cual sus descripciones no son correctas.

Una vez terminada la guía, cada grupo socializó los resultados obtenidos. Durante esta actividad la participación fue activa, se aclaran dudas y se precisa con base en las deducciones de las estudiantes la propiedad, la cual era objeto de búsqueda. Se elogia y felicita a las estudiantes que presentaron ideas o soluciones novedosas. También se realiza una entrevista para medir el impacto de la actividad.

**Motivación por el aprendizaje**. Las estudiantes manifiestan curiosidad y al mismo tiempo preocupación por las situaciones que se les presentan en la guía. Al socializar el trabajo desarrollado en la actividad, mostraron gran interés por dar a conocer sus resultados y compartían de manera desinteresada sus observaciones y conocimientos adquiridos, venciendo así la predisposición inicial.

**Logros**. Mediante la observación y el análisis de las soluciones por parte de las estudiantes, se hace evidente que:

- La capacidad de observación, comparación, análisis y descripción mejora de forma notoria.
- Se fortalece la actitud de seguridad en sí mismas.
- El 75 % de las estudiantes, aproximadamente, estuvo desarrollando la guía de manera independiente, y obtuvo un buen desempeño.

- El 87,5 % de las estudiantes desarrollan la actividad con esmero y dedicación, lo cual se hace evidente en las guías entregadas (orden y diseño).
- Uso de figuras de apoyo para representar situaciones solicitadas y habilidades de visualización, aun sin figura de análisis.
- Mejor manejo de los instrumentos y satisfacción con la metodología utilizada.

**Dificultades**. En el transcurso de la actividad se presentaron las siguientes contrariedades:

- El 50 % de las estudiantes brindan solución a los problemas propuestos, pero no analizan sus respuestas ni detectan posibles errores.
- Carecen de habilidades de planeación frente a la resolución de la situación planteada.
- No tienen como costumbre leer varias veces el problema (dos veces y abandonan).
- Tienen un uso inadecuado de instrumentos como el transportador y la regla.
- Identifican rotación con formación de triángulos, lo cual no es correcto para ángulos mayores de 180°.

### 4.1.3. Actividad 3. ¿Desigualdades en el teorema de Pitágoras?

La actividad fue desarrollada por 18 estudiantes, el tiempo empleado fue de 4 horas, se entregó la guía impresa a los grupos de trabajo (dos estudiantes), la cual la componen cuatro situaciones problema. La actividad se lleva a cabo en el aula, a excepción del problema 1, el cual se trabaja en el patio de la institución, a fin de hacer cómodo y agradable el ambiente de trabajo. Una vez las estudiantes culminaron el problema 2, el cual perseguía la deducción del teorema de Pitágoras, la docente interviene para concertar lo observado y trabajado por las estudiantes.

La docente realiza una breve reseña histórica de Pitágoras y se enuncia su teorema, y ofrece algunas demostraciones visuales del teorema de Pitágoras (Chou Pei, Euclides, Bhascara, Garfield), las cuales fueron analizadas por las estudiantes, y dos de ellas trabajadas por la docente en el tablero. Una vez precisado el teorema, se continúa con el desarrollo de la guía y se culmina con la socialización de los problemas 2 y 4, y una entrevista a un grupo de trabajo.

El problema 1 consta de dos incisos (*a*, *b*). El inciso *a* informa, a modo de relato a las estudiantes, sobre las particularidades del triángulo rectángulo Isis, lo cual llamó su atención. El 75 % comprende la situación y construye adecuadamente el triángulo de Isis, realiza varios intentos y analiza en cada uno de ellos el cumplimiento de las condiciones dadas (ver Figura 31). En este proceso algunas de las estudiantes usan como estrategia reconocer el ángulo recto y a partir de allí intentan ajustar la medida de los lados según lo solicitado (números enteros consecutivos).

Por otra parte, al 25 % de las estudiantes, aunque llegan a la construcción del triángulo, les toma más tiempo, dado que no idean una estrategia de solución para garantizar que los nudos estén a la misma distancia. También otras plantean triángulos cuyos lados no son números enteros consecutivos.

Figura 31. Momento de la búsqueda de la solución del problema 1.

En el inciso *b*, las estudiantes deben determinar la longitud de los lados y ángulos del triángulo construido. En cuanto a la medida de los lados, se observan dos tendencias: una es "… la distancia entre cada nudo es… entonces mide"[93]. La otra tendencia está dada por la distancia entre los nudos como una unidad y expresan que "… los lados miden 3, 4 y 5"[94].

Algunas (12.5 %) de las estudiantes no hacen uso apropiado del transportador o al construir el triángulo en la hoja, no tienen en cuenta la proporción entre sus lados, lo cual genera medidas inapropiadas para los ángulos del triángulo Isis.

El problema 2 consta de ocho incisos (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*). Para el desarrollo de la actividad, las estudiantes reciben tres *puzzles* (dos cuadrados y un trapecio), los cuales son pieza clave para dar respuesta a los diferentes incisos. Los incisos *a* y *b* ponen de manifiesto dificultades conceptuales de las estudiantes entre área y perímetro, dado que la concepción que tienen relaciona una fórmula con su definición. El 50 % de las estudiantes identifican las dos maneras de determinar el área para las figuras dadas y justifican ampliamente sus respuestas.

Por otra parte, algunas solo identifican una manera (fórmulas) para determinar el área de las Figuras 1 y 2, otras determinan expresiones, pero no las simplifican, dado que no hay claridad del manejo algebraico para las expresiones.

El inciso *c* sugiere generalizar lo observado tras la determinación y comparación de las áreas de las figuras del inciso anterior, para lo cual el 50 % de las estudiantes usan las fichas del *puzzle* para representar la situación y comprender la pregunta. Las estudiantes en este proceso perciben que "… las dos figuras están conformadas por triángulos Isis de medidas a y b"[95]. Al determinar el área se obtiene la misma expresión a pesar de que interiormente son diferentes. Algunas no observaron ningún tipo de particularidad, pues no lograron determinar la expresión adecuada para el área, lo cual no hizo visible la relación existente; otras no dieron respuesta a esta pregunta.

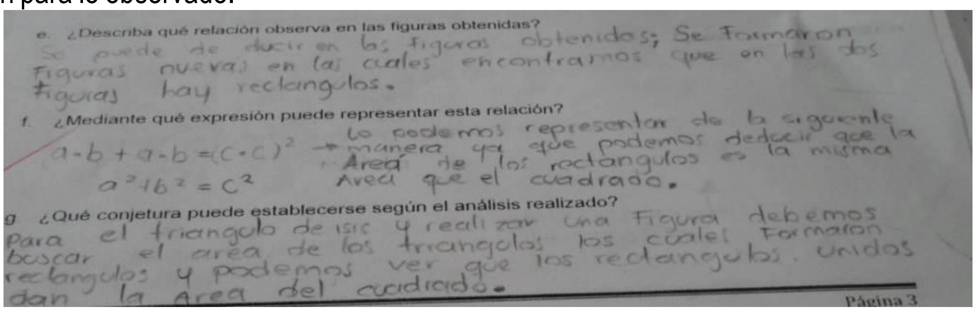
El inciso *d* fue de gran motivación, dado que las estudiantes debían hacer uso activo de los *puzzles* para determinar las respuestas. El 75 % de las estudiantes comprende el problema, pero les toma bastante tiempo interpretar y llegar a construir la representación solicitada, pues la expresión "… cercar el triángulo Isis con las fichas que componen el puzzle"[96], da lugar a variadas representaciones.

---

[93] Opiniones de las estudiantes.
[94] Opiniones de las estudiantes.
[95] Opiniones de las estudiantes.
[96] Opiniones de las estudiantes.

La representación adecuada será aquella cuyas figuras que componen el *puzzle* se ubiquen única y exactamente sobre los lados del triángulo Isis. Con lo cual, el 87.5 % de las estudiantes logra el objetivo propuesto en este inciso.

Los incisos *e*, *f*, *g* y *h* se dirigen hacia la deducción del teorema de Pitágoras. A través de lo observado, el 37.5 % de las estudiantes realizan una visualización ágil y acertada de las situaciones y logran expresar lo observado, como se muestra en la Figura 32. Por otra parte, al 50 % de las estudiantes les cuesta más trabajo identificar la relación existente, dado que sus análisis son realizados sobre la longitud de los lados del triángulo y no sobre áreas formadas sobre sus lados. También se precisa que el 12.5 % de las estudiantes construye las situaciones, pero no brinda una expresión para lo observado.


e. ¿Describa qué relación observa en las figuras obtenidas?

Se puede de ducir en las figuras obtenidos; Se Formaron Figuras nuevas en las cuales encontramos que en las dos figuras hay rectangulos.

f. ¿Mediante qué expresión puede representar esta relación?

$a \cdot b + a \cdot b = (c \cdot c)^2$ → Lo podemos representar de la siguiente manera ya que podemos deducir que la Area de los rectangulos es la misma Area que el cuadrado.

$a^2 + b^2 = c^2$

g. ¿Qué conjetura puede establecerse según el análisis realizado?

Para el triangulo de isis y realizar una Figura debemos buscar el area de los triangulos los cuales Formaron rectangulos y podemos ver que los rectangulos. unidos dan la Area del cuadrado.

Página 3

Figura 32. Argumentos de solución del problema 2.

Posterior al análisis realizado, en el cual interviene la docente en la deducción del teorema de Pitágoras, para lo cual emplea los recursos heurísticos (principios, reglas y estrategias), las estudiantes resuelven los problemas 3 y 4, orientados hacia la deducción de las desigualdades existentes en el mismo teorema.

El 87.5 % de las estudiantes identifica, analiza y describe, casi de inmediato, lo que sucede frente a lo planteado en estos problemas; algunas hacen uso de las figuras del *puzzle* para representar la situación y afirman que "… faltarían más fichas o sobrarían fichas"[97]. En este proceso, a pesar de identificar lo que sucede, tan solo el 75 % ofrece una expresión y conjetura acertadas, y algunas expresan la solución en términos de lo trabajado en la guía 2.

Se dio conclusión a la actividad con la socialización de los problemas 3 y 4, en la cual las estudiantes comentaron y justificaron sus soluciones.

**Motivación por el aprendizaje**. Esta actividad evidencia la importancia de los recursos manipulables en la enseñanza de la geometría, pues durante toda la actividad la motivación estuvo presente en las estudiantes por su utilización, dado que concretamente podían plantear las situaciones que se les solicitaban y percibir una solución más cercana a la realidad.

**Logros**. Durante esta actividad se pudieron constatar los siguientes aspectos positivos:

- Motivación por el aprendizaje e interés por conocer datos y justificaciones históricas.
- Las habilidades visuales se fortalecieron en las estudiantes.
- El análisis y la argumentación se desarrollaron notoriamente en el 75 % de las estudiantes.

[97] Opiniones de las estudiantes.

- Mayor confianza y seguridad en sus planteamientos.
- Interés por participar en responder a las preguntas de sus compañeras.
- El 50 % de las estudiantes comprende los enunciados de los problemas y concibe alternativas de solución.
- Las guías entregadas ponen en evidencia el orden y la reflexión de las estudiantes en cada uno de los problemas.
- Las estudiantes establecen diferencias y comparan, usando signos para ello (>, <, =).

**Dificultades**

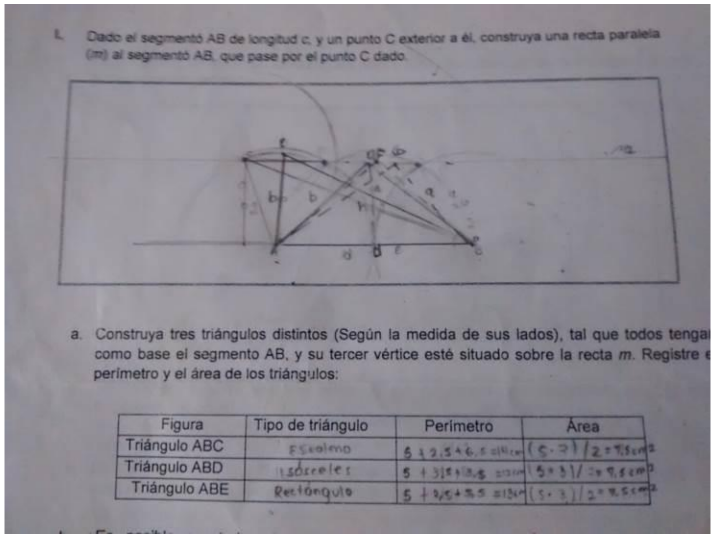
- La ejecución del plan de solución para los problemas aún no es del dominio de la mayoría de las estudiantes.
- El 75 % de las estudiantes carecen de visión retrospectiva.
- El enunciado del problema en el inciso *d* representa gran dificultad para su comprensión, dado que la forma como está redactado permite diversas interpretaciones, por lo cual debe delimitarse para no desviar la atención.
- El 50 % de las estudiantes intuyen lo que sucede, pero no logran expresar por escrito sus pensamientos.

### 4.1.4. Actividad 4. Identificar relaciones entre área y perímetro del triángulo

La guía de trabajo de esta actividad consta de tres problemas, se desarrolla de manera individual y participan 15 estudiantes. A continuación, se describe lo observado durante el desarrollo de la actividad.

El problema 1 consta de cuatro incisos (*a*, *b*, *c*, *d*). El inciso *a* sugiere construir triángulos en condiciones específicas, y luego determinar su área y perímetro. Este problema no genera mayor dificultad para las estudiantes, dado que en guías anteriores se realizaron problemas similares. El 93.3 % de las estudiantes construye adecuadamente los triángulos solicitados. En este proceso cabe destacar que no se solicita el uso del compás para la construcción de los triángulos, pero el 66.6 % de las estudiantes lo considera pertinente, tanto para construir la recta paralela, como para el triángulo isósceles.

Por otra parte, el 73.3 % construye tres triángulos distintos e identifica el perímetro y el área de cada uno de ellos, nombra sus vértices y lados, como se observa en la Figura 33. Algunas estudiantes (26.7 %) obtienen valores diferentes para el área de los tres triángulos, dado que no identifican adecuadamente la altura de los triángulos o realizan triángulos iguales desatendiendo las indicaciones.



1. Dado el segmentó AB de longitud c, y un punto C exterior a él, construya una recta paralela (m) al segmentó AB, que pase por el punto C dado.

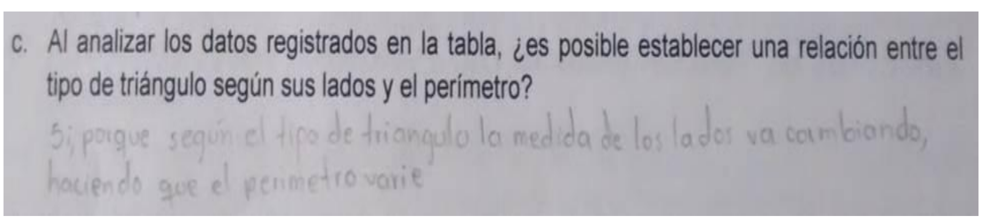
a. Construya tres triángulos distintos (Según la medida de sus lados), tal que todos tenga[n] como base el segmento AB, y su tercer vértice esté situado sobre la recta *m*. Registre [el] perímetro y el área de los triángulos:

| Figura | Tipo de triángulo | Perímetro | Área |
|---|---|---|---|
| Triángulo ABC | Escaleno | 5 + 2,5 + 6,5 = 14 cm | (5·3)/2 = 7,5 cm² |
| Triángulo ABD | Isósceles | [illegible] | (5·3)/2 = 7,5 cm² |
| Triángulo ABE | Rectángulo | [illegible] | (5·3)/2 = 7,5 cm² |

Figura 33. Respuesta al inciso *a* del problema 1.

El inciso *b* indaga sobre la posibilidad de construcción de más triángulos con las mismas características, para lo cual se pudo constatar dos tipos de respuesta. En este proceso una de las respuestas se dirige a la no posibilidad de hacer un triángulo equilátero, lo cual implica que es posible realizar todos los demás, y otra plantea la traslación del punto *c* sobre la recta *m*, como cada una de las posibilidades que se tienen para formar un triángulo.

En el inciso *c* se sugiere describir la relación que se observa entre el tipo de triángulo y el perímetro, para lo cual el 53.3 % de las estudiantes identifican que todos los triángulos formados tienen la misma base (segmento AB) y plantean la rotación del segmento AC, pero no concretan una relación específica. Algunas estudiantes expresan la relación directa entre la longitud de los lados del triángulo y el perímetro (ver Figura 34), pero no establecen comparaciones entre sus lados y el tipo de triángulo formado.



c. Al analizar los datos registrados en la tabla, ¿es posible establecer una relación entre el tipo de triángulo según sus lados y el perímetro?

Si, porque según el tipo de triangulo la medida de los lados va cambiando, haciendo que el perimetro varie

Figura 34. Respuesta al inciso *c*, problema 1.

Los incisos *d* y *e* se dirigen hacia la generalización de lo observado en los incisos anteriores. En el inciso *d*, el 80 % de las estudiantes identifica el triángulo isósceles como el de menor perímetro y los argumentos aportados son: “… la distancia del punto sobre la recta m a cada uno de los vértices (A, B) o tener dos lados iguales, y estar situado sobre la mediatriz del segmento AB)”.[98]

Algunas afirman que “… el isósceles tiene menor perímetro”[99], pero no justifican la respuesta o no ofrecen respuesta a esta pregunta.

[98] Opiniones de las estudiantes.
[99] Opiniones de las estudiantes.

En el inciso *e* las estudiantes no alcanzan el nivel de análisis solicitado, pues el 46.6 % de ellas no da respuesta a esta pregunta. El 13.4 % realiza planteamientos adecuados, pero no alcanza la generalización. El 40 % comprende, visualiza y describe acertadamente.

El problema 2 consta de cuatro incisos (*a*, *b*, *c*, *d*). En el inciso *a* se les solicita observar y analizar la posibilidad de construir más triángulos con la característica de tener el mismo perímetro, el 66.6 % de las estudiantes comprende, describe, analiza, relaciona saberes previos, usa la regla y el compás y representa la situación adecuadamente (ver Figura 35). Otras, por su parte, proporcionan respuesta a esta pregunta, pero no tienen en cuenta la posibilidad de construcción del triángulo que plantean.

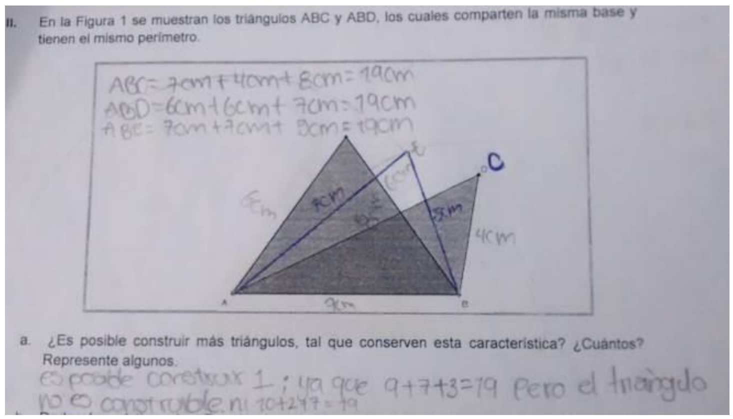



Figura 35. Respuesta destacada del inciso *a*, del problema 2.

En el inciso *b* las estudiantes presentan dificultad, pues no comprenden la situación planteada, para lo cual la docente interviene y utiliza algunas reglas heurísticas (recuerda conocimiento relacionado con lo dado y lo buscado), lo cual propicia recordar algunas de las actividades anteriores, en las cuales se desarrollan aspectos similares. Algunas relacionan la ubicación del punto c, con la mediatriz del segmento AB, pero no concretan una posición definida dentro de esta recta.

Los incisos *c* y *d* se dirigen a la generalización y conjetura de lo observado, para lo cual el 53.3 % de las estudiantes determina las áreas de los triángulos, compara, analiza y se acerca a las conjeturas o deducciones. Algunas expresan dentro de su solución que "… el isósceles tiene menor área"[100], pero no justifican su afirmación o no dan respuesta a este inciso, lo que representa un 33.3 % de las estudiantes.

El problema 3 presenta cierta dificultad para las estudiantes, dadas las instrucciones que debían seguir para obtener la construcción. El 53.3 % de las estudiantes comprende los pasos de la construcción y la realiza sobre el vértice A indicado (ver Figura 36). El 46.7 % presenta dificultades con el uso de la regla y el compás, por lo cual la precisión se ve afectada y por ende los resultados obtenidos no facilitan el análisis o la comparación.

[100] Opiniones de las estudiantes.

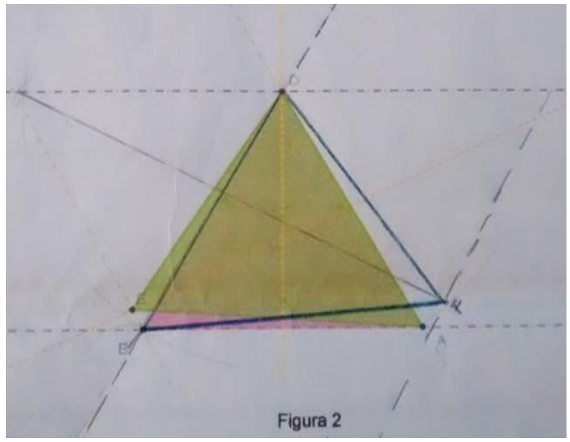
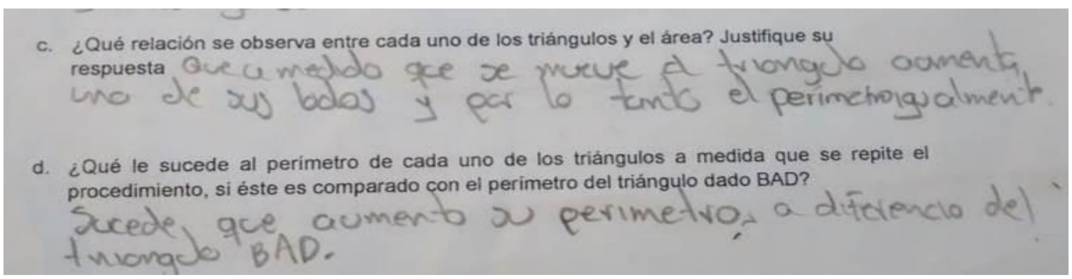



Figura 36. Solución del inciso *a*, del problema 3.

Los incisos *b*, *c* y *d* fueron abordados por las estudiantes, pero el 80 % de las soluciones no son adecuadas. La principal causa es el uso inapropiado de los instrumentos, lo cual genera una figura de análisis equivocada. Otro aspecto es que las estudiantes no identifican relación entre las figuras obtenidas. El 20 % restante ofrece aproximaciones producto de comparar el área y el perímetro del triángulo obtenidos (ver Figura 37), pero no llega a la conjetura solicitada.


c. ¿Qué relación se observa entre cada uno de los triángulos y el área? Justifique su respuesta Que a medida que se mueve el triangulo aumenta uno de sus lados y por lo tanto el perimetro igualmente.

d. ¿Qué le sucede al perímetro de cada uno de los triángulos a medida que se repite el procedimiento, si éste es comparado con el perímetro del triángulo dado BAD?
Sucede que aumenta su perimetro, a diferencia del triangulo BAD.

Figura 37. Respuesta a los incisos *c* y *d*, del problema 3.

Finalmente, se realiza la socialización de esta actividad, en la cual se logró concretar de manera grupal la desigualdad isoperimétrica objeto de esta guía. Además, se destacan las respuestas interesantes de las estudiantes y se aclaran las dudas que se presentaron en las estudiantes.

**Motivación por el aprendizaje**. Para las estudiantes, el problema 1 de esta guía fue interesante y motivador por el uso de los instrumentos para la construcción y por la posibilidad de establecer comparaciones entre triángulos diferentes, pero de igual área y menor perímetro.

**Logros**. Durante la actividad se pueden resaltar los siguientes:

- El 66.6 % de las estudiantes contempla el uso de la regla y el compás para resolución de los problemas.
- Se fortalece la habilidad de análisis y comparación de las estudiantes.
- Las estudiantes tienen en cuenta en el desarrollo de los problemas, aspectos abordados en guías anteriores.
- El 50 % de las estudiantes logra identificar parcialmente el objetivo que perseguía la actividad.

**Dificultades**. En el desarrollo de esta guía, las estudiantes estuvieron inseguras en el planteamiento de la solución.

### 4.1.5. Actividad 5. Identificar relaciones entre área y perímetro del rectángulo

Esta actividad se lleva a cabo de manera grupal, se entrega la guía de trabajo a las estudiantes y se detallan de manera general las condiciones planteadas. Además, se les da a conocer a las estudiantes situaciones históricas, que involucran maximizar o minimizar área, perímetro o volumen de las figuras (los tres problemas griegos), destacando la importancia concedida a la resolución de estas situaciones y aclarando las limitaciones que para estos casos tuvo el uso del compás. Participan 16 estudiantes en el desarrollo de esta guía.

La guía de trabajo está constituida por tres problemas. A continuación, se describe lo observado durante el desarrollo de cada uno de ellos:

El problema 1 consta de dos incisos (*a* y *b*). En el inciso *a* las estudiantes deben construir un rectángulo con base en un cuadrado dado y determinar su perímetro y área. Tan solo el 12.5 % hizo uso del compás en busca de la solución, pero no la hallaron. El 87.5 % de las estudiantes usa la retícula para representar la situación y acierta en la construcción, el análisis y la comparación de las dos figuras obtenidas, como se muestra en la Figura 38.

Para el 12.5 % de las estudiantes este inciso representa cierta dificultad, pues no son hábiles en el uso de la retícula; aunque construyen el rectángulo solicitado, no tienen en cuenta la distancia entre los puntos como una unidad, sino que consideran cada uno de los puntos como una unidad, lo cual no es adecuado. Además, al comparar y describir lo que sucede a sus áreas, algunas expresan que "… sus áreas varían o disminuyen y aumentan"[101], pero no ofrecen un análisis detallado.

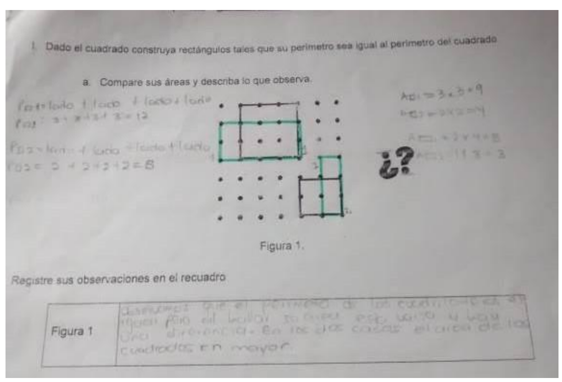



Figura 38. Desarrollo del inciso *a*, del problema 1.

El inciso *b* representa cierta dificultad para las estudiantes, pues se les solicita construir cuadrados a partir de rectángulos dados. El método de solución empleado por algunos de los grupos de trabajo es el de ensayo y error; en este proceso se identifica que, al representar las opciones en la retícula, la longitud del lado del cuadrado debe estar entre 2 y 3 unidades. La razón dada por algunas de las estudiantes es que "… no alcanza hasta el punto tres, y si se pasa de tres su área sería mayor"[102].

[101] Opiniones de las estudiantes.
[102] Opiniones de las estudiantes.

El 50 % logra determinar la longitud del lado del cuadrado y plantea el uso del teorema de Pitágoras como una estrategia de solución, o por medio del tanteo inteligente determinan que la longitud del lado cuadrado está entre 2 y 3. El 50 % restante de las estudiantes identifica estas dos tendencias de solución, pero no interpreta ni identifica una solución. Algunas representan el cuadrado solicitado, mas su construcción no es sustentada, pues no identifican cómo obtener la longitud del lado del cuadrado.

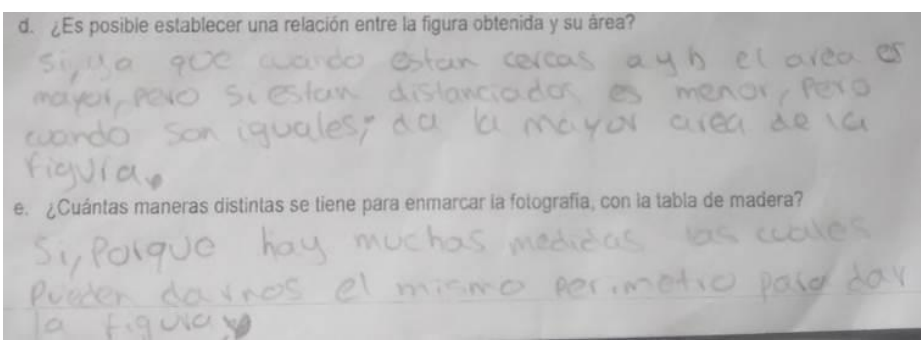
El problema 2 consta de ocho incisos. Ante la situación planteada en este problema, las estudiantes muestran gran motivación por su solución. Los incisos *a*, *b* y *c* se relacionan entre sí, ya que sugieren determinar las dimensiones de una fotografía para que su área sea la máxima posible. En el inciso *a*, el 87.5 % de las estudiantes casi que de inmediato plantea diversos rectángulos con variación en la medida de sus lados y el 37.5 % de ellas contempla el cuadrado de lado 25 cm, como una de las opciones de solución. Para este inciso, las estudiantes en general no logran determinar exactamente qué valores pueden tomar *a* y *b*, que era lo solicitado.

El inciso *b* es desarrollado por el 100 % de las estudiantes de manera adecuada, y algunas hacen uso de la retícula, pues trabajan a escala los ejemplos por ellas planteados y determinan el área. Para establecer el área de los cuadriláteros se observan dos métodos: uno de ellos es contando las unidades cuadradas que encierra la figura sobre la retícula, y otro haciendo uso de la expresión para determinar el área del rectángulo.

En el inciso *c*, las estudiantes tardaron bastante en identificar, analizar la información obtenida y describir lo que sucede con el área de los diferentes rectángulos. El 62.5 % ofrece un análisis interesante y acertado de la situación. El 37.5 % de las estudiantes perciben lo que sucede con el área, pero no comprenden el porqué de lo que observaban, por lo cual ofrecen respuestas superficiales.



En los incisos *d*, *e*, *f*, *g* y *h* se sugiere analizar, describir y conjeturar lo observado en los incisos anteriores. En los incisos *d* y *e*, el 50 % de las estudiantes establece una posible relación para lo observado, con expresiones similares a las que se registran en la Figura 39. En este proceso establecen comparaciones entre las dimensiones del rectángulo (a mayor y b menor), pero no se observa el caso a = b. El 37.5 % de las estudiantes presenta la dificultad descrita, para lo que la docente sugiere considerar este caso, ante lo cual algunas de ellas objetan que esta situación "… no puede ser una solución dado que la forma debe ser un rectángulo, no un cuadrado"[103].


d. ¿Es posible establecer una relación entre la figura obtenida y su área?

Si, ya que cuando estan cercas a y b el area es mayor, pero si estan distanciados es menor, pero cuando son iguales, da la mayor area de la figura.

e. ¿Cuántas maneras distintas se tiene para enmarcar la fotografía, con la tabla de madera?

Si, porque hay muchas medidas las cuales pueden darnos el mismo perimetro para dar la figura

Figura 39. Argumento de los incisos *d* y *e* por parte de las estudiantes.

[103] Opiniones de las estudiantes.

Para los incisos *f* y *g*, el 75 % de las estudiantes plantea acertadamente que la fotografía debe ser cortada en forma cuadrada, de 25 cm de longitud. Algunas proponen como solución un rectángulo de área de 600 $cm^2$, el cual está registrado en sus tablas y tiene mayor área, sin analizar el caso particular del cuadrado. El 50 % de las estudiantes alcanza una expresión o conjetura para lo observado.

En general para este problema, el 62.5 % de las estudiantes comprende e identifica la relación entre el área y las figuras obtenidas, pero no identifica cómo lograr que sea la máxima o no están seguras de que su respuesta es la correcta.

El problema 3 tiene cinco incisos (*a*, *b*, *c*, *d*, y *e*). El desarrollo de este problema se vio afectado por cuestiones de tiempo, dado que las estudiantes invirtieron la mayor parte de él en la solución del problema 2; así, el 37.5 % de las estudiantes no alcanzó a abordar este problema.

En el inciso *a*, se les solicita la construcción de un tercer cuadrilátero sobre un esquema dado. La solución de esta situación genera dificultad para las estudiantes (62.5 %), pues algunas no comprendían cómo realizar las indicaciones dadas para la construcción de este. Otras en sus descripciones previas a la construcción del cuadrilátero, ya intuían qué figura se forma, por lo cual se les facilita la construcción, dado que ya en su mente había una figura de referencia hacia donde debían dirigir su construcción.

El inciso *b* sugiere describir lo que se observa si esta situación construida se realiza varias veces, para lo cual el 50 % de las estudiantes detalla la situación de manera acertada, mediante expresiones como la presentada en la Figura 40. Algunas, aunque intentan realizar la construcción, en el momento de visualizar la figura no conciben mentalmente que sucediera, si el proceso se realiza varias veces.

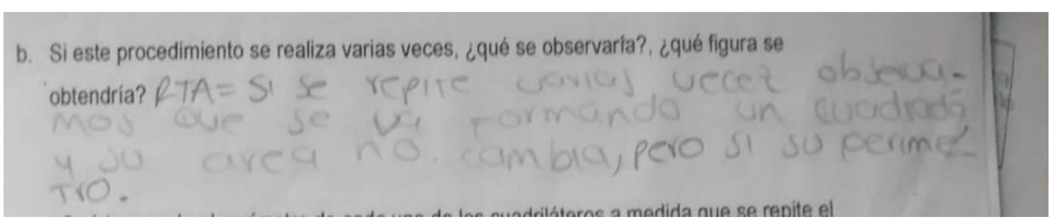

b. Si este procedimiento se realiza varias veces, ¿qué se observaría?, ¿qué figura se obtendría? RTA= Si se repite varias vecez observa-mos que se va formando un cuadrado y su area no. cambia, pero si su perime-tro.

Figura 40. Argumento presentado como solución del inciso *b*, del problema 3.

En los incisos *c* y *d*, el 50 % de las estudiantes identifica y compara lo que le sucede al perímetro de cada uno de los cuadriláteros construidos, usa la regla para determinar la longitud de cada uno de los lados de los cuadriláteros y realiza figuras de análisis. Algunas determinan el perímetro, pero ofrecen respuestas que se limitan a expresiones como "… el perímetro aumenta o disminuye"[104], las cuales no evidencian un análisis profundo.

En el inciso *e*, las estudiantes debían expresar una generalización, según lo observado y realizado en los incisos anteriores. El 37.5 % de las estudiantes alcanza expresiones como las que se observan en la Figura 41, las cuales hacen evidente que se comprende el problema y se identifica la propiedad objeto de la guía.

[104] Opiniones de las estudiantes.

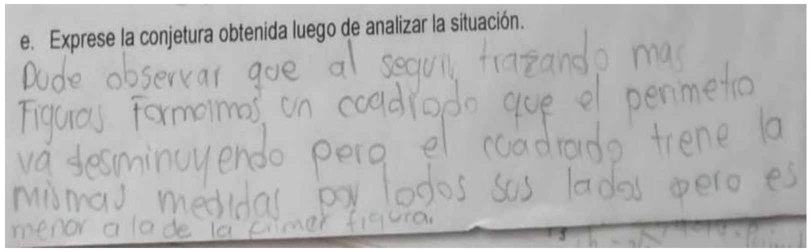



Figura 41. Conjetura planteada en el inciso *e*, del problema 3.

Finalmente, se realiza la socialización de esta actividad, de manera grupal y se aclaran las dudas que presentan las estudiantes.

**Motivación por el aprendizaje**. Para las estudiantes, el desarrollo de esta actividad generó incertidumbre, pero a partir del desarrollo del problema 1 se aclararon aspectos que motivaron la búsqueda de una solución para el problema 2. La retícula hizo parte de la motivación, dado que les permite representar de forma visual las situaciones planteadas en busca de identificar la relación entre el rectángulo y el cuadrado, así como establecer relaciones entre sus áreas y perímetros (desigualdad isoperimétrica para cuadriláteros).

**Logros**. Durante el desarrollo de esta actividad, se pueden resaltar los siguientes aspectos positivos obtenidos:

- Se pudo identificar relaciones entre el cuadrado y el rectángulo y reconocer el cuadrado como un caso especial de un rectángulo.
- El 50 % de las estudiantes establecen relaciones importantes entre el área y el perímetro del cuadrado y el rectángulo.
- La habilidad con los instrumentos tradicionales se fortalece.
- En el 37.5 % de las estudiantes se hace evidente un fortalecimiento de las habilidades visuales.
- El trabajo con la retícula facilitó la visualización y búsqueda de soluciones.

**Dificultades**. En el transcurso de la actividad se presentaron las siguientes adversidades:

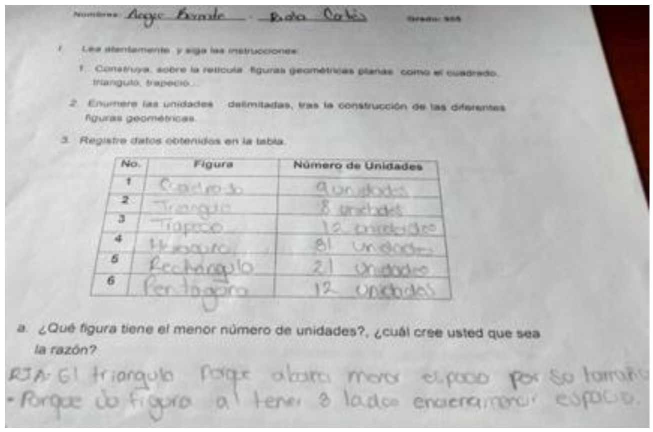
- Las estudiantes carecen de preconceptos para el desarrollo de esta temática, como los de construcción de raíces cuadradas con el uso del compás.
- El 37.5 % de las estudiantes no completó totalmente el desarrollo de la guía.
- Es limitada la capacidad de análisis, lo cual se evidencia en las respuestas ofrecidas.
- El tiempo para el desarrollo de la guía no fue suficiente para que todas culminaran la actividad.

### 4.1.6. Actividad 6. Descubriendo la figura plana con mayor área en condiciones dadas

En esta actividad participan 14 estudiantes, el trabajo es organizado de manera grupal (dos estudiantes) y se entrega el material manipulable (bocetos, retícula, resaltador y tira de lana), la guía y se dan instrucciones generales previas a su desarrollo. La guía de trabajo consta de tres problemas. A continuación se describe lo observado durante el desarrollo de la actividad:

El problema 1 consta de cinco incisos (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*). En el inciso *a*, se les solicita la construcción de figuras planas. Esta situación no representa dificultad para las estudiantes. Se observa motivación por la construcción de las figuras y el trabajo grupal. Otro aspecto abordado en este inciso, luego de la construcción de las figuras, es enumerar las unidades que cada una de las figuras encierra, en las cuales identifican cuál es la de menor unidad, para lo cual la docente interviene y genera interrogantes que invitan hacia la generalización, dado que algunos grupos solo consideran casos particulares.

El 85.7 % de las estudiantes comprende y determina adecuadamente la resolución del inciso *a*; el 78.5 % de ellas analiza y aporta soluciones como las que se observa en la Figura 42, en la cual ofrecen una justificación adecuada a su respuesta. Algunas no identifican con claridad el motivo por el cual la figura posee menos unidades, pues afirman que "… el triángulo tiene menos unidades"[105], pero no justifican su respuesta. El 14.2 % no alcanza la solución esperada, ya que plantea el cuadrado como la figura con menos unidades.


1. Lea atentamente y siga las instrucciones:
   1. Construya, sobre la retícula figuras geométricas planas como el cuadrado, triangulo, trapecio...
   2. Enumere las unidades delimitadas, tras la construcción de las diferentes figuras geométricas.
   3. Registre datos obtenidos en la tabla.

| No. | Figura | Número de Unidades |
|---|---|---|
| 1 | Cuadrado | 9 unidades |
| 2 | Triangulo | 8 unidades |
| 3 | Trapecio | 12 unidades |
| 4 | Hexagono | 81 unidades |
| 5 | Rectangulo | 21 unidades |
| 6 | Pentagono | 12 unidades |

a. ¿Qué figura tiene el menor número de unidades?, ¿cuál cree usted que sea la razón?

Figura 42. Respuesta a del inciso *a*, del problema 1.

En el inciso *b*, algunas estudiantes no relacionan la forma de la figura con la cantidad de unidades que encierra, pero ofrecen aspectos que permiten observar un buen análisis de la situación (ver Figura 43). El 64.2 % plantea expresiones análogas a la de la Figura 43, la cual hace evidente que comprenden, analizan y describen la situación apropiadamente.

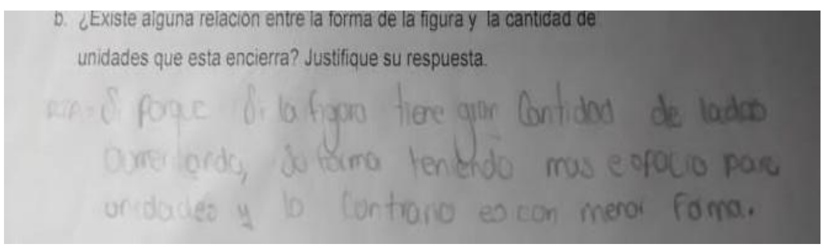

b. ¿Existe alguna relación entre la forma de la figura y la cantidad de unidades que esta encierra? Justifique su respuesta.

Figura 43. Respuesta b del inciso *b*.

Los incisos *c* y *d* se relacionan entre sí, pues sugieren establecer una correlación entre número de lados, longitud de los lados y el área de la figura. El 78.5 % de las estudiantes analizan los datos registrados en la tabla, comparan y realizan figuras de análisis sobre la retícula. Durante el proceso cabe resaltar que el 57.1 % no contempla el caso de la circunferencia como una figura de análisis, por lo cual la docente les sugiere comprobar si lo que plantean para el número de lados de las figuras construidas es aplicable a la circunferencia. Luego de analizar la situación propuesta por la docente, las estudiantes logran describir una posible solución. Algunas sugieren soluciones no acertadas o no justifican sus afirmaciones.

[105] Opiniones de las estudiantes.

En el inciso *e*, las estudiantes identifican en su mayoría figuras como cuadriláteros, hexágonos y diferentes tipos de triángulos; además, usan los tres puntos suspensivos indicando la diversidad de figuras posibles o plantean que "… se puede formar cualquier figura"[106]. Algunas solo expresan una posibilidad, dado que enuncian la construcción de una sola figura.

El problema 2 consta de cuatro incisos. La solución de este problema captó el interés de las estudiantes y abarca gran parte del tiempo empleado para la actividad, dado que en la búsqueda de la mejor estrategia realizan variados intentos. El inciso *a* sugiere plantear la mejor estrategia para abarcar la mayor área posible. En un primer momento la situación genera desconcierto en las estudiantes, pues no creen posible lograrlo, por lo que solo visualizan una solución para este problema: "… cortar el cuero en forma de rectángulo"[107].

Por otra parte, la docente recuerda las condiciones planteadas en el problema, lo cual invita a las estudiantes a pensar en otra opción, que garantice la obtención de más unidades. Dos de los grupos realizan inicialmente un proceso interesante: uno de ellos sitúa sobre la retícula el boceto del cuero, lo demarca sobre ella y luego enumera las unidades allí contenidas. El otro grupo sitúa el boceto sobre la retícula y construye una circunferencia que contiene la mayor parte del cuero dentro de ella, argumentando que de esta manera se logra hacer uso de todo el cuero.

Luego de variados intentos y planteamientos, un grupo de estudiantes decide hacer uso de las tijeras, lo cual es observado por los demás grupos e invita a analizar esta posibilidad. El 71.4 % de las estudiantes logra establecer una estrategia que les proporciona un área máxima, pasando por la construcción de hexágonos y octágonos hasta llegar a la circunferencia, la cual cumple con las condiciones solicitadas. Algunas estudiantes (28.6 %) recortan las tirillas, pero ofrecen como respuestas el rectángulo, sin analizar más opciones.

El problema 3 tiene cuatro incisos. En el inciso *a*, se les solicita representar la situación planteada, para lo cual las estudiantes de manera inmediata usan el compás para realizar la representación. El 85.4 % de las estudiantes comprende la situación y la representa inicialmente en la retícula, usa la tirilla de lana o el compás. Varias estudiantes no aciertan en la representación del esquema gráfico, dado que fallan en la interpretación y comprensión del problema, pues al trazar la cuerda de la cual está atada la cabra, consideran la región dentro de la jaula como una posibilidad, por lo cual la docente sugiere volver a leer el problema, y acompaña este proceso.

El inciso *b* fue resuelto por el 85.7 % de las estudiantes de manera apropiada. Demarcan la región e identifican todas las posibilidades que tiene la cabra para pastar. El proceso llevado a cabo es construir una circunferencia de radio de 6 unidades, la cual contiene en su interior gran parte de la jaula (ver Figura 44). Algunas estudiantes consideran la región en la cual se halla la jaula como una posibilidad para pastar; se invitó a contextualizar el problema a la vida real, lo cual ayudó a que identificaran su error.

[106] Opiniones de las estudiantes.
[107] Opiniones de las estudiantes.

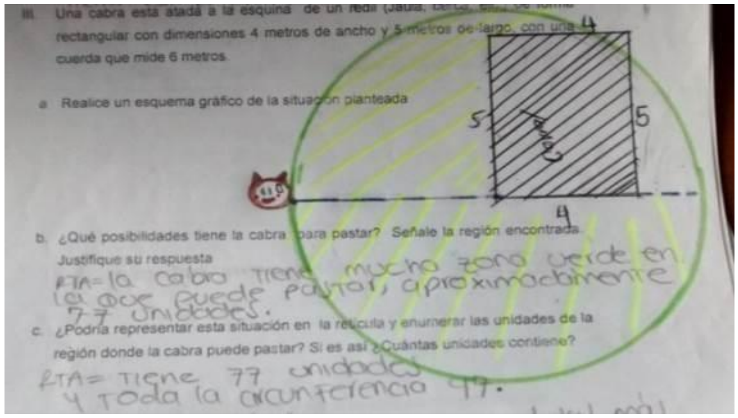



Figura 44. Respuesta de una estudiante.

Los incisos *c* y *d* fueron solucionados indirectamente en los incisos anteriores, dado que cuestionan el uso de la retícula y el compás, como medios por tener en cuenta para la resolución de la situación. El 85.7 % de las estudiantes representa la situación en la retícula y enumera las unidades delimitadas; el 50 % de ellas, al dar su respuesta, considera que no todas las unidades están totalmente contenidas, por lo cual usan la expresión "aproximadamente".

La docente ante las aproximaciones ofrecidas por las estudiantes, solicita identificar un método, el cual ofrezca un valor exacto para la región a pastar por la cabra. Algunas estudiantes analizan el esquema dibujado y expresan que es posible determinar el área de la circunferencia y restar de esta la del rectángulo, aspecto que no garantiza un valor exacto, pues uno de los vértices del rectángulo no se encuentra dentro de la circunferencia. Tan solo el 28.5 % de las estudiantes plantea determinar el área de la circunferencia y la de los sectores circulares formados, para agruparlos y obtener la región solicitada.

En cuanto al uso del compás, algunas estudiantes expresan que "… sirve para reunir los diferentes puntos donde la cabra puede pastar, para dar una medida exacta o establecer el límite hasta donde la cabra puede pastar"[108]. Algunas estudiantes encontraron dificultad al describir la utilidad del compás.

Al finalizar el problema 3, se inicia la socialización por parte de los grupos de trabajo, se designan los tres grupos para explicar la forma en que abordaron los distintos problemas y los procesos llevados a cabo para hallar la solución. Durante esta actividad las mismas estudiantes se hacían correcciones de las dificultades que se presentaron.

**Motivación por el aprendizaje**. Durante todo el desarrollo de la actividad el ambiente es agradable y el trabajo grupal es adecuado. Las estudiantes manifiestan lo interesante que resultó el problema 2, lo cual se evidencia en el tiempo invertido y las diferentes alternativas de resolución planteadas. Es de destacar que a pesar de no hallar fácilmente la resolución del problema 2, las estudiantes persistieron en la búsqueda de la estrategia.

**Logros**. En el desarrollo de la actividad se pudo constatar que:

[108] Opiniones de las estudiantes.

- Hubo participación activa, pues se despierta la curiosidad en las estudiantes, quienes mostraron entusiasmo al estar en la actividad.
- El uso de material manipulativo contribuye en la obtención de resultados, sin que necesariamente se tuviera que acudir a fórmulas o rigurosas reglas.
- La visualización y formación de imágenes mentales se favorecen a través del uso de la retícula, dado que les permiten a las estudiantes aportar generalizaciones para los problemas planteados.
- Se fortalece la seguridad en sí mismas y la capacidad para describir lo observado.
- El 85.7 % de las estudiantes logra identificar entre las figuras planas de igual perímetro, a la circunferencia como la figura plana que encierra mayor área.

**Dificultades**. Algunas estudiantes no asistieron a la actividad (dos grupos), puesto que el horario en que se realizo era extra al de la clase.

### 4.1.7. Actividad 7. Feria de geometría

En esta actividad participaron 16 estudiantes, para la cual se dispuso de cuatro horas para su realización. A continuación, se describe la metodología usada y los diferentes momentos de su desarrollo.

La docente selecciona diez problemas no rutinarios que involucran el uso de desigualdades geométricas y conceptos previos, desarrollados en su mayoría en las guías anteriores. Se decora el aula de clase, con frases alusivas a la geometría y a la resolución de problemas. Las estudiantes son distribuidas por parejas, en ocho mesas de trabajo y a cada una de las mesas se le asigna un problema por resolver.

Esta actividad tiene dos momentos. En el primero de ellos la docente les sugiere a las estudiantes del grupo control la resolución de un problema no rutinario. En este proceso para la búsqueda de la resolución del problema, la docente les indica que deben tener en cuenta las fases de Polya (1965). También aclara lo que implica cada una de ellas y les comunica que disponen de 45 minutos (máximo) para la resolución. Durante este proceso, la docente guía hacia la resolución a las estudiantes y ultima a continuación detalles de la actividad por realizar.

Una vez las estudiantes reciben los problemas asignados, se sienten abrumadas por no vislumbrar una solución rápida, ante lo que se les solicita escribir en sus propias palabras lo que entienden del problema. Este ejercicio permite identificar las fallas en la comprensión del problema, y al mismo tiempo que las estudiantes interioricen la situación planteada, lo que conduce directamente a la segunda fase: pensar cómo solucionarlo. En este proceso primero las estudiantes no vislumbran las diferentes vías de solución, pero a medida que la docente incentiva su pensamiento por medio de interrogantes, les surgen buenas ideas.

Algunos grupos ejecutan la estrategia que piensan conduce a la resolución, en concordancia con la fase tres y por último verifican que las condiciones de problema estén consignadas en la respuesta obtenida. En este proceso el 50 % de las estudiantes trabajó en la resolución del problema de manera independiente obteniendo acercamientos importantes hacia la solución, el otro 50 % requirió de atención y guía especial. Cabe destacar que es la primera vez que las estudiantes se enfrentan a problemas de este nivel.

Finalmente, todos los grupos quedan preparados para la socialización de sus saberes, en la feria geométrica.

En un segundo momento, una vez cumplido el tiempo establecido, la docente indica a las estudiantes que a continuación debe escogerse para cada mesa de trabajo, una secretaria y una líder; la secretaria registra lo expresado por las estudiantes que visitan su mesa, la líder indica el problema por resolver y orienta a las estudiantes hacia la respuesta, de ser necesario.

Una vez llegan las estudiantes visitantes de la feria, se organiza la entrada por parejas y se les asigna una mesa de trabajo. Cada grupo visitante tiene 20 minutos para desarrollar el problema planteado.

La experiencia de las líderes y la secretaria fue interesante y desafiante al mismo tiempo, porque en algunos grupos el problema no era tan inmediato y, a través de preguntas, tratando de imitar a la docente, guiaron a las estudiantes hacia la búsqueda de la solución del problema.

Por parte de las estudiantes visitantes se observa que el 78.1 % participan activamente, a pesar de que tuvieron que utilizar varias veces el método de ensayo y error para la búsqueda de la solución. Les resultó motivador ver a sus compañeras como orientadoras. La mayor motivación se logró cuando obtenían, pues se reflejaba en ellas satisfacción e interés por resolver los problemas propuestos en otras mesas de trabajo (ver Figura 45).

Figura 45. Momentos de la resolución de los problemas en las mesas de trabajo.

**Motivación por el aprendizaje**. Para el grupo de control esta actividad fue significativa, pues el interactuar libremente, orientar a sus compañeras y expresar sus saberes con mayor autoridad, propicia en ellas interés y motivación por el aprendizaje de la geometría. El proceso de transmitir sus experiencias y actuaciones les permite sentirse capaces y seguras para responder cuanto sea exigido.

**Logros**. En esta actividad se pudieron constatar los siguientes, alcanzados por las estudiantes:

- Satisfacción del grupo control por la experiencia vivida como docente. Algunas manifiestan interés, a futuro, por ser docente de matemáticas.
- Las estudiantes del grupo de control aprenden de los errores cometidos en el momento de preparación, lo cual les permite buscar estrategias que les brindan a sus compañeras, de ser necesario.

- Las estudiantes visitantes mostraron disposición e interés ante los problemas presentados.
- En la búsqueda de la resolución de los problemas se considera el uso de la regla, el compás y la retícula para representar las situaciones planteadas.
- La feria de geometría permite el intercambio de saberes, la competencia y la adquisición de habilidades de comunicación, las cuales son necesarias para el desarrollo personal y su aprendizaje de la geometría.

**Dificultades.** En el desarrollo de esta actividad se observaron las siguientes falencias:

- El tiempo para la realización de la feria se redujo, dado que ese día tuvo lugar una actividad institucional.
- El 30 % de las estudiantes visitantes identificaron posibles soluciones, pero no alcanzaron la resolución del problema planteado.

### 4.2. Resultados de la encuesta de satisfacción

La primera pregunta relaciona la motivación por el aprendizaje de la geometría, para lo cual el 100 % de las estudiantes considera que en este sentido las actividades desarrolladas contribuyeron y motivaron su aprendizaje.

La segunda pregunta se dirige a determinar el impacto de las diferentes actividades diseñadas, para lo cual el 94 % de las estudiantes manifiestan que este tipo de actividades deberían ser aplicadas con frecuencia en la clase de geometría para logar su aprendizaje. Al concluir las actividades, a través de una entrevista también se mide el impacto. Al respecto, es de destacar que una estudiante afirma que "…nunca había visto esa forma de aprender geometría, pues para mí la geometría era algo aburrido y difícil, pero con estas actividades cambié de idea"[109].

El 81 % de las estudiantes piensa que los problemas constituyeron un reto. Para algunas estudiantes, aunque los problemas planteados fueron de mayor dificultad, no los califican como un reto.

Además, durante el desarrollo de las actividades hubo un ambiente de aprendizaje hacia la matemática, en especial hacia la geometría para la mayoría de las estudiantes (81 %), pero el 9 % restante, tras no haber obtenido el objetivo propuesto en las actividades, manifestó no haber vivido un ambiente de aprendizaje. Los problemas reto fueron desarrollados de forma autónoma y natural por el 75 % de las estudiantes, pues es de aclarar que es la primera vez que se exponen a problemas de este nivel; a pesar de ello, la curiosidad y la seguridad adquiridas mediante el desarrollo de las actividades realizadas con anterioridad, les permite avanzar en la búsqueda de una posible solución. El otro 25 % de las estudiantes, aunque tienen interés frente a la resolución de los problemas, no vislumbran una solución correcta, pues carecen de la aplicabilidad de los conceptos previos, por lo cual requieren un nivel superior de ayuda, para despertar la curiosidad y dirigirles hacia la resolución del problema.

La pregunta 6 se enfoca a determinar el impacto que tuvo el uso de la regla y el compás en el desarrollo de las actividades. El 94 % de las estudiantes manifiesta que el uso de estos instrumentos las motivó y contribuyó en el aprendizaje de las temáticas abordadas en las guías.

En cuanto a las situaciones históricas presentadas, el 88 % de las estudiantes las consideró

[109] Opiniones de las estudiantes.

como llamativas e interesantes, pues las invita a pensar de manera creativa. Además, indican que "… les permite conocer el origen y la solución de algunos problemas matemáticos y les resulta motivador ver cómo pensaban antes… "[110], y tan solo dos estudiantes (12 %) opina lo contrario.

El uso de materiales didácticos (hilos, *puzzles*, retícula, figuras, moldes) durante las actividades facilitó el desarrollo de estas.

El 94 % de las estudiantes está de acuerdo con el uso de materiales manipulativos durante la clase de geometría, pues fue especial hacer uso de variadas herramientas (algunas desconocidas hasta ese momento) para el desarrollo de las actividades.

Las preguntas abiertas se dirigían a determinar específicamente lo aprendido por las estudiantes durante el desarrollo de las actividades y a expresar su concepto general sobre estas, en las cuales se destacan sus criterios y preferencias en el avance de algunas actividades. Por otra parte, el 88 % manifestó aprender geometría e incorporar a sus conocimientos: el teorema de Pitágoras y sus variantes, la formas de determinar área de distintas figuras, habilidades de comparación e identificación de desigualdades geométricas y uso de instrumentos como la retícula, el compás y la regla, entre otras. También manifiestan el descubrimiento de cosas y un cambio en su manera de ver la clase de geometría.

Las estudiantes destacan que, en su concepto, a diferencia de las demás guías, la 1 y 7 les parecieron interesantes, pero poco dinámicas, pues en ellas no se contemplaba el uso de materiales manipulables.

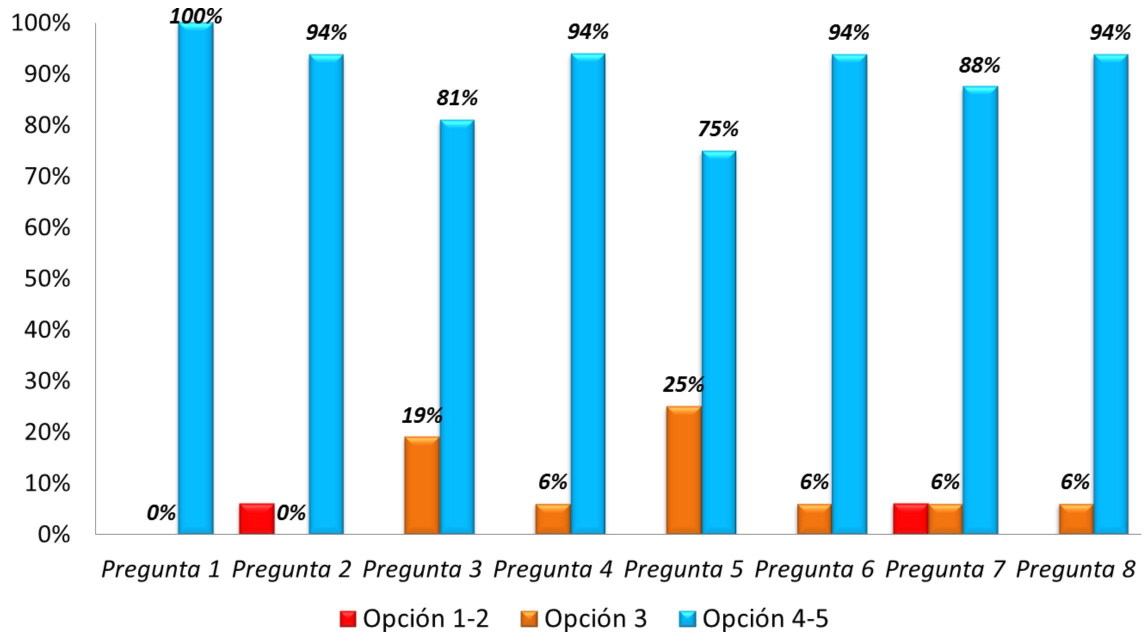
El trabajar con el compás les pareció divertido e innovador ya que algunos nunca lo habían utilizado. Cabe destacar que para algunas estudiantes el trabajo con los instrumentos no se les facilitó, lo cual limitó su avance y apreciación sobre la actividad.

En general manifiestan que actividades como la 3, 4 y 6 fueron de su preferencia, pues en todas se contó con materiales didácticos. Además, las situaciones históricas allí planteadas, como la construcción del triángulo de Isis y el problema de Dido, concentraron toda su atención y cultivaron su interés hacia su resolución.

En cuanto a la actividad final, la mayoría expresa lo interesante que fue la feria de geometría, por lo retador de sus problemas y la metodología utilizada. Ellas afirman que "…estos problemas les invitan a pensar demasiado y con astucia, y es magnífico encontrar la solución; mi nivel de geometría mejoró notoriamente al compararme con las niñas que visitaron mi mesa de trabajo"[111]. Para algunas, los problemas se constituyeron en muy complejos de resolver.

En la Gráfica 1 se muestran los resultados de cada una de las preguntas.

[110] Opiniones de las estudiantes.
[111] Opiniones de las estudiantes.




Gráfica 1. Datos obtenidos en la encuesta de satisfacción.

## CONCLUSIONES

La investigación dirigida a favorecer el aprendizaje de la geometría, a través de las desigualdades geométricas en estudiantes de grado noveno en la educación básica, permite dar respuesta al objetivo. En los resultados se destacan algunos elementos que resultan esenciales, los cuales pueden resumirse así:

- En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, en particular sobre las desigualdades geométricas, a través de la resolución de problemas y construcciones geométricas, basado en la historia de la matemática como recurso didáctico, en el grado noveno, se destacan investigadores como: Villani (2001), Sgreccia y Massa (2009), Arici y Aslan (2013), De Guzmán (1992), Fauvel y Maanen (2000), Clark (2012), Gazit (2013), Guacaneme (2010), Pérez (2011) y Llinás (2014), entre otros.
- Los autores que se destacan en el estado del arte, proponen modelos didácticos, estrategias, alternativas y sistemas de actividades dirigidas a favorecer el aprendizaje de la geometría en los estudiantes de la educación básica. La mayoría de estos autores en sus trabajos enfatizan en: la visualización, el razonamiento geométrico, en el uso de los materiales didácticos, las construcciones con regla y compás, la utilización de los SGD y las potencialidades de la historia de la matemática en el aula de clase. Se debe resaltar que es escaso el tratamiento en literatura revisada en Colombia sobre las desigualdades geométricas para favorecer el aprendizaje de la geometría.
- La teoría de la resolución de problemas, en la cual se tiene en cuenta la estrategia de resolución propuesta por Polya (1965), es una estrategia efectiva, acertada y motivadora para desarrollar en las estudiantes las habilidades necesarias para el aprendizaje de la geometría.

- En el trabajo con las desigualdades geométricas, el pensamiento visual es un medio para la construcción robusta del conocimiento, pues propicia el descubrimiento del contenido geométrico y el desarrollo de habilidades geométricas en las estudiantes.

- La historia de la matemática como recurso didáctico en el aula de clase constituye una estrategia adecuada para captar la atención, motivar el aprendizaje y brindar una imagen atractiva de la geometría a las estudiantes.

- En las actividades propuestas, la interrelación que se da entre las construcciones geométricas, la resolución de problemas, el pensamiento visual y la historia de la matemática como recurso didáctico con las desigualdades geométricas, genera un proceso de enseñanza-aprendizaje robusto de la geometría en los estudiantes de grado noveno en la educación básica.

- Al iniciar la implementación de las actividades se observa que las estudiantes tienen limitaciones en sus razonamientos. Algunas estudiantes no logran expresar sus descubrimientos obtenidos tras la resolución de un problema o una construcción geométrica, pues no estaban acostumbradas a desarrollar este tipo de actividades, por lo cual inicialmente sus razonamientos no conducían a la resolución del problema ni a la conjetura deseada.

- Tras la implementación de las actividades en la práctica escolar, se constatan los siguientes resultados:

  - Las estudiantes desarrollan habilidades de observación, argumentación y análisis. También en lo personal las estudiantes adquieren seguridad en sí mismas.

  - En cada una de las actividades, el desempeño de las estudiantes respecto al uso de la regla y el compás fue notorio. El trabajo con la regla y el compás contribuye al desarrollo de estrategias en la resolución de problemas y habilidades visuales.

  - Les motiva conocer aspectos históricos del desarrollo de la geometría. Algunas estudiantes profundizaron al realizar búsquedas independientes sobre el tema trabajado.

  - El uso de materiales manipulativos incentiva en las estudiantes la motivación y la curiosidad, al mismo tiempo que facilita la comprensión y búsqueda de la solución.

  - La habilidad de visualización se favorece con el uso de los instrumentos tradicionales y materiales manipulativos. El 72.2 % de las estudiantes que participaron de forma activa en el desarrollo de las actividades planteadas logró alcanzar los objetivos propuestos.

  - El 27.8 % alcanzó el objetivo de manera parcial, dado que persisten dificultades relacionadas con los preconceptos.

  - Se desarrolla el pensamiento visual a través de la resolución de los problemas planteados, en especial en las guías 3 y 6; este aspecto se hizo notar en cada una de sus expresiones y respuestas.

## RECOMENDACIONES

La implementación de las actividades sobre desigualdades geométricas, sustentada en las construcciones geométricas, la resolución de problemas, la historia como recurso didáctico y el pensamiento visual requiere considerar y poner en práctica las siguientes sugerencias:

- Continuar investigando sobre las desigualdades geométricas y proponer nuevos problemas retadores para el trabajo en el aula con los estudiantes de grado noveno de la educación básica.
- Establecer, de acuerdo con los resultados obtenidos tras la implementación de las actividades diseñadas, aspectos por mejorar y ajustar en cada una de estas actividades, para que en posteriores implementaciones se obtengan superiores resultados.
- Motivar a las estudiantes para el estudio de la geometría, específicamente hacia el proceso de resolución de problemas geométricos que propicien la comparación de figuras y el desarrollo del pensamiento visual.
- Implementar metodologías participativas que inviten al estudiante a pensar, comparar y analizar, permite obtener mejores resultados en el aprendizaje de la geometría.
- Trabajar en las clases de geometría con la regla y el compás para propiciar el desarrollo de habilidades en el trabajo con los instrumentos y de la resolución de problemas geométricos, son cuestiones básicas para lograr un aprendizaje robusto de la geometría.

## BIBLIOGRAFÍA

Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). *Caracterización de las actividades de geometría que proponen los textos de matemática*. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Abrate, R. y Pochulu, M. (2008). *Diseño y resolución de problemas para la clase de geometría*. Villa María, provincia de Córdoba, Argentina. Editado por la Universidad Nacional de Villa María.

Adolphus, T. (2011). Problems of teaching and learning of geometry in secondary schools in Rivers State, Nigeria. Department of Science and Technical Education. *International Journal of Emerging Sciences*, (1), 143-152.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. España: Síntesis S. A.

Alsina, C. y Nelsen, R. (2009). *When less is more: visualizing basic inequalities*. The Mathematical Association of America. United States of America.

Álvarez, T. (2010). *La visualización de conceptos matemáticos y el aprendizaje del electromagnetismo*. Recuperado de http://www.lajpe.org/jan10/21_Teresa_Alvarez.pdf

Arenas, M. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Arici, S. y Aslan, F. (2013). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), February. DOI: 10.1007/s10763-013-9487-8

Ballester, S. y otros. (1992). *Metodología de la enseñanza de la matemática*. Tomo I-II. La Habana: Pueblo y Educación.

Barbin, E. (2000). *The historical dimension: from teacher to learner*. History in mathematics education. The ICMI Study.

Belisario, A. y González, F. (2012). Historia de la matemática, educación matemática e investigación en educación matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (31), 161-182. Venezuela. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/31/archivo_16_de_volumen_31.pdf

Bell, E. (1985). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Berinde, V. (2004). *A geometric construction using ruler and compass*. *Exploring, investigating and* *discovering in mathematics*, pp. 27-33. Birkhäuser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7889-0_3

Biglan, A., Hops, H., Sherman, L., Friedman, L. S., Arthur, J. y Osteen, V. (1985). Problem-solving interactions of depressed women and their husbands. *Behavior Therapy, 16*(5), 431-451. https://doi.org/10.1016/S0005-7894(85)80023-X

Bransford, J. y Stein, B. (1988). *Solución ideal de problemas.* Barcelona: Labor.

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* Proyecto TEDI. La Habana: Pueblo y Educación.

Cantoral, R., Rodríguez, F. y Montiel, G. (2008). *Visualization in iterative processes*. Proceeding 11th International Congress in Mathematical Education, Monterrey.

Clark, K. (2012). *Voices from the field: incorporating history of mathematics in secondary and post-secondary classrooms*. Cerme7. The Florida State University.

Cruz, M. (2002). *Estrategia metacognitiva en la formulación de problemas para la enseñanza de la matemática.* Tesis en opción al grado científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico de Holguín "José de la Luz y Caballero".

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas.* Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

De Guzmán, M. (1992). Tendencias actuales de la enseñanza de la matemática. *Studia Paedagogica*. Revista de Ciencias de la Educación, (21), 19-26.

De Guzmán, M. (1993). *Tendencias innovadoras en educación matemática.* Argentina: Edipubli.

De Guzmán, M. (2001). *La actividad subconsciente en la resolución de problemas*. Red Científica. Recuperado de http://www.redcientifica.com/doc/doc200112010001.html

Díaz, A. (s. f.). *¿Qué es el pensamiento visual?* Recuperado de http://www.motivacionymas.com/que-es-el-pensamiento-visual/

Díaz, M. y Dircio, L. (2010). *El grado de visualización. Un indicador del desarrollo del pensamiento visual*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME). Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4556/1/D%C3%ADazElgradoALME2010.pdf

Di Domenicantonio, R., Costa, V. y Vacchino, M. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (27), 75-87. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/27/union_027_010.pdf

Falk, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2001). Olimpiadas de matemáticas: retos, logros (y frustraciones). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, VIII*(1), 21.

Falk, M. (2006). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Problemas y soluciones*. Nivel Intermedio. 2002. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Falk, M. (2007). *Aspectos del pensamiento geométrico escolar y sus divergencias con el pensamiento algebraico*. Recuperado de http://es.scribd.com/doc/261596641/5-Falk-pdf#scribd

Fauvel, J. y Maanem, J. (2002). *History in mathematics education*. The ICMI Study United States of America. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Fernández, S., Aubanell, A., Laserna, D. B., Dedò, M. y De la Fuente, C. (2010). *Escuela de educación matemática "Miguel de Guzmán": enseñar divulgando*. Ministerio de Educación.

Fioriti, G. (2006). *Didácticas específicas. Reflexiones y aportes para la enseñanza*. Buenos Aires: Miño y Dávila editores - UNSAM.

Formación Inicial Docente. *Resolución de problemas*. Recuperado de http://www2.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial/wp-descargas/educacionprimaria/didactica_mat/04_resolucion_de_problemas.pdf

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). The students' perspective of geometry teaching and learning in high school. *Revista Electrónica Educare, XIV*(2), 125-142. Recuperado de http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/906

Garret, R. (1995). *Resolver problemas en la enseñanza de las ciencias. Alambique, 5*. Monografía. La resolución de problemas. N.° 5. Año II. Julio, Barcelona. pp. 6-15.

Gazit, A. (2013). ¿Qué saben los profesores de matemáticas y futuros profesores acerca de la historia de las matemáticas? *Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología, 44*(4), 501-512.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. Great Britain: Oxford University Press.

González, E. y Valderrama, A. (2009). *Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, primer nivel.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Guacaneme, É. A. (2010). ¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor? Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología EDUCyT. *Revista EDUCyT*, *2*, junio-diciembre. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10437/1/Guacaneme2010Qu%C3%A9.pdf

Guacaneme, É. A. (2011). *La historia de las matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Gulfo, J. y Amaya, T. (2009). El origami, una estrategia para la enseñanza de la geometría. En Lestón, P. (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 895-901). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Gutiérrez, L. (2002). *Didáctica de la matemática para la formación docente*. Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica. Volumen 22, Primera edición, Cartago, Costa Rica. Recuperado de http://sitios.educando.edu.do/biblioteca/components/com_booklibrary/ebooks/volumen22.pdf

Gutiérrez, L. (2013). *¿Qué es visual thinking y cómo puedes usarlo?* Recuperado de https://extremservicejam.wordpress.com/2013/02/18/que-es-visual-thinking-y-como-puede-ayudarte/

Hernández, V. y Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Jaime, F. (1994). *Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para Primaria 1990-1994.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Jaime, F. y David, M. (1999). *5 años de Olimpiadas de Matemáticas para Primaria 1995-1999. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Jaime, F. y Pérez, J. (2004). *Problemas y soluciones. Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para Primaria 2000-2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Jones, K., Fujita, T. y Kunimune, S. (2012). *Promoting productive reasoning in the teaching of geometry in lower secondary school: towards a future research agenda*. 12th International Congress on Mathematical Education.

Kazarinoff, N. (1961). *Geometry inequalities*. United States of America: University of Michigan.

Kilpatrick, J. (1992). *Historia de la investigación en educación matemática*. Nueva York: Macmillan.

Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Simposio Internacional de Educación Matemática*. Recuperado de http://ued.uniandes.edu.co. Bogotá.

Костовскийі, А. Н. (1984). *Геометрические построения с помощью компаса*. Moscú: Mir.

Koyuncu, I., Akyuz, D. y Cakiroglu E. (2014). Investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4). Recuperado de http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-014-9510-8

Krulik, S. y Rudnick, J. (1980). *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Labarrere, F. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana: Pueblo y Educación.

Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer based environment. En Burton, L. y Jaworski, B. (Eds.), *Technology in mathematics teaching - A bridge between teaching and learning*, (pp.35-68).

Laborde, C. (1995). *Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics?* Recuperado de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.139.8182&rep=rep1&type=pdf

Lebesgue, H. (1930). *La Mesure des Grandeurs.* (*La medida de las magnitudes*).

Lesh, R. y Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 763-804).

Lingefjärd, T. (2011). Rebirth of Euclidean Geometry? *Learning model focused on modeling and simulation for learning and instruction*, Volumen 6, pp. 205-215.

Llinás, R. (2014). Entrevista para la revista Semana. Recuperado de http://www.semana.com/educacion/articulo/rodolfo-llinas-colombia

Llivina, M. (1999). *Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos*. Tesis de doctorado en Ciencias Pedagógicas. La Habana, Cuba.

López, S., Noriega, H. y Ospino, A. (2007). *El efecto del programa de formación de docentes "Enseñando a pensar" en el conocimiento del contenido pedagógico y la práctica en la enseñanza de la geometría a través de la resolución de problemas.* Disertación doctoral, tesis de maestría no publicada. Fundación Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.

Malaspina, U. (2001). Problemas de optimización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*, 932. Perú.

Mammana, C. y Villani, V. (1998). *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*. Discussion document for an ICMI study. pp 159-192. (Edit). Kluwer Academic Publishers.

Publicada con permiso del autor en http://fractus.uson.mx/CMS@Fractus/weblinks.php?cat_id=1yweblink_id=54

Martínez, A. (1989). *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona: Paidós.

Micelli, M. y Crespo, C. (2011). *Las figuras de análisis en el aula de matemática*. pp. 719-737. México. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4866/1/MicelliLasfigurasALME2011.pdf.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Colombia: MEN.

Morales, C. y Majé, R. (2011). *Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros*. Tesis de maestría en Ciencias de la Educación, Universidad de la Amazonia, Florencia, Caquetá, Colombia. Recuperado de https://bit.ly/39RLQcw

National Consilium Teacher of Mathematic (NCTM). (1992, 2000, 2007). *Estándares curriculares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática.

Niss, M. (2004). *ICME-10 2004. Proceedings*. IMFUFA, Department of Science, Systems and Models. Roskilde University, Denmark. Recuperado de http://higeom.math.msu.su/~asmish/Lichnaja-2010/Version2010-11- 20/Trudy/Publications/2004/icme_completebook.pdf

Pan, A. (2000). *Construcciones regla y compás. Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. pp. 36-46.

Pandiscio, E. (2002). Alternative geometric constructions: promoting mathematical reasoning. *The Mathematics Teacher, 95*(1), 32-36.

Pérez, A. (2007). *¡Malditos sean la regla y el compás! Historias de matemáticas alternativas*. XIII JAEM. Granada, España. Recuperado de http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/XIIIJAEM/malditos%20sean%20regla%20y%20comp%E1s.pdf

Pérez, D. (2011). *Diseño, aplicación y evaluación de un sistema de actividades para la construcción de significado del concepto de área, en una comunidad de práctica para sexto grado*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Pérez, F. (2004). *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para Primaria 2000-2004.* Bogotá: Universidad Antonio Nariño.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2012). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde* *distintos enfoques teóricos.* Buenos Aires.

Poincaré, H. (1913). *Dernières pensées*. p. 27. París: Flammarion.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving.* 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Ciudad de México: Trillas.

Poon, K. y Wong, H. (2011). Problem solving through optimization problem in geometry. *Teaching Mathematics and its Applications: an international journal of the IMA, 30*(2), 53-61, https://doi.org/10.1093/teamat/hrr006

Pou, C. (2002). *El programa educativo "Mira" del laboratorio de las artes: un instrumento para la escuela primaria*. (Texto sin publicar, investigación financiada por la Fundació La Caixa).

Prasolov, V. (s. f.). *Problems in plane and solid geometry, v.1 plane geometry*. Recuperado de http://e.math.hr/afine/planegeo.pdf

Presmeg, N. (1999). Las posibilidades y peligros del pensamiento basado en imágenes en la resolución de problemas matemáticos. *Suma,* revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, (32), 17-22.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. pp. 205-235.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* España: Comares.

Reed, S. K. (2013). *Thinking visually.* Psychology Press.

Resolución de problemas. (s. f.). Documento electrónico. Recuperado de http:www.minedu.gob.pe/digesutp/formacioninicial.

Restle, F. y Davis, J. (1962). Success and speed of problem solving by individuals and groups. *Psychological Review, 69*(6), 520-536.

Rizo, C. (1987). Sobre la historia de la enseñanza de la geometría en los niveles medio y elemental en Cuba. *Revista Varona,* (18). La Habana, Cuba.

Roam, D. (2008). *The back of the napkin: solving problems and selling ideas.* New York: Penguin Group. p. 55.

Rojas, O. (2009). *Modelo didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio con un enfoque desarrollador en el preuniversitario*. Tesis de doctorado en Ciencias Pedagógicas, Universidad de Ciencias Pedagógicas "José de la Luz y Caballero", Holguín, Cuba.

Sánchez, C. (2012). *La historia como recurso didáctico: el caso de Los Elementos de Euclides*. XX

Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones realizado en la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Sánchez, C. (2013). *¿Cómo contextualizar y dejar pensar la matemática?* CEMACYC, República Dominicana. Universidad de La Habana, Cuba. ICMI.

Santa, Z., Jaramillo, C. y De Carvalho, M. (2015). Doblado de papel como medio para la producción de conocimiento geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (46), 154-168. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/706/1233

Santaló, L. (1985). *Enseñanza de la geometría en el ciclo secundario (estudiantes de 12 a 16 años de edad)*. Universidad de Buenos Aires. pp. 11-23.

Santos, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problems solving*. Nueva York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). A brief and biased history of problem solving. En F. R. Curcio (ed.), *Teaching and learning: a problem solving focus,* (pp. 27-46). NCTM.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. H. Schoenfeld (ed.), *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2009). Categorías para el análisis didáctico de prácticas de enseñanza de geometría a alumnos de 12 a 15 años. En Lestón, P. (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 187-196). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2011). The teaching of geometry as seen by teachers of secondary schools and teacher trainers. *International Journal of Contributions to Mathematics Teaching,* pp. 41-55.

Sierra, M. (2009). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. *Colección Digital Eudoxus*, *1*(5).

Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 5*(1), 79-101.

Sriraman, B. y English, L. (2010). *Theories of mathematics education.* New York: Springer.

Suárez, A. (2014). *Tipología de errores en la solución de problemas geométricos a partir de los problemas de olimpiadas*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá.

Tafur, A. (2015). *Construcción del concepto de las transformaciones en el plano a través de problemas no rutinarios en los estudiantes de grado séptimo*. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño, Bogotá.

Tatar, E., Kağizmanli, T. y Akkaya, A. (2014). The effect of a dynamic software on the success of analytical analysis of the circle and prospective mathematics teachers opinions. *Necatibey Faculty of Education, Electronic Journal of Science y Mathematics Education*, (8).

Urbaneja, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (45), 17-28.

Villani, V. (2001). *Perspectivas para la enseñanza de la geometría del siglo XXI*. Documento de discusión para un estudio ICMI. Documento en soporte magnético.

Villani, V. (2001). *Por qué un estudio en geometría*. Documento de discusión para un estudio ICMI. Departamento de Matemática. Universidad de Pisa, Italia.

Villarroel, S. y Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en geometría en primer año de secundaria. *Revista Números*, *78*, noviembre, 73-94. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros

Vinicio, V. (2001). *Camino a seguir. Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. pp. 20-29.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1990). Visualization in teaching and learning. *Mathematics, MAA Notes*, (19). USA: Mathematical Association of America.

**Encuesta de satisfacción a estudiantes**

## Encuesta final a estudiantes

Apreciada estudiante, agradezco su participación activa en las diferentes actividades propuestas.

A continuación solicito su colaboración para responder a las siguientes preguntas. La escala de valoración es de 1 a 5, siendo cinco (5) la mayor calificación y uno (1) la menor calificación. Marque su respuesta con una cruz (X).

1. ¿Considera que las actividades desarrolladas motivan el aprendizaje de geometría?

   1 2 3 4 5

2. ¿Cree que su desempeño en el área de las matemáticas mejoraría si estas actividades se repitieran con frecuencia?

   1 2 3 4 5

3. ¿Los problemas propuestos en las actividades constituyeron un reto para usted?

   1 2 3 4 5

4. ¿Considera que se vivió durante el desarrollo de las actividades un ambiente de aprendizaje hacia la matemática?

   1 2 3 4 5

5. ¿Se sintió motivado a desarrollar los problemas retos de forma natural y autónoma?

   1 2 3 4 5

6. ¿Las construcciones regla y compás motivaron su aprendizaje?

   1 2 3 4 5

7. ¿Considera que las situaciones históricas compartidas en clase fueron interesantes?

   1 2 3 4 5

8. ¿El uso de materiales didácticos (hilos, *puzzles*, retícula, figuras, moldes…) durante las actividades le facilita el desarrollo de estas?

   1 2 3 4 5

9. ¿Aprendió geometría luego de participar en el desarrollo de las diferentes actividades? ¿Por qué?

- Relacione a continuación lo aprendido en estas clases de geometría:

Observaciones generales:

**Encuesta a docentes del área de matemáticas**

**Encuesta a docentes del IEM Teodoro Aya Villaveces**

Objetivo: establecer un punto de partida para el estudio de investigación titulado "Resolución de problemas sobre desigualdades geométricas en el grado noveno".

Marque su respuesta con una cruz (X), según las siguientes convenciones: 1 si está totalmente en desacuerdo, 2 en desacuerdo, 3 medianamente de acuerdo y 4 si está totalmente de acuerdo.

1. Incluir la historia de las matemáticas como contexto para el desarrollo de la clase de geometría favorece la compresión de la matemática.

   1 2 3 4

2. ¿El uso de la regla y el compás en las clases de geometría es indispensable?

   1 2 3 4

3. ¿La regla y el compás permiten la identificación de conceptos geométricos?

   1 2 3 4

4. ¿Las construcciones regla y compás y las desigualdades geométricas motivan el aprendizaje en los estudiantes?

   1 2 3 4

5. ¿La visualización a través de las construcciones geométricas mejora el aprendizaje de la geometría y el desarrollo del pensamiento visual?

   1 2 3 4

Observaciones:

Editorial UCundinamarca

UdeC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA