UDEC UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA | 50 Años

GENERACIÓN SIGLO 21

ESTUDIO DE LA FUNCIÓN DESDE EL MOVIMIENTO

Editorial UCundinamarca | UDEC UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

Barreto Moreno, M. L.

El estudio de la función desde el movimiento.

Fusagasugá: Editorial de la Universidad de Cundinamarca. 2020.

96 p.

ISBN: 978-958-52515-6-4

ISBN: 978-958-52515-6-4
Primera Edición, 2020
Dirección de Investigación
Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas
Universidad de Cundinamarca
https://www.ucundinamarca.edu.co//
investigación@ucundinamarca.edu.co
Dg 18 No. 20-29 Fusagasugá

Editorial de la Universidad de Cundinamarca
editorial@ucundinamarca.edu.co
Autor: Martha Lidia Barreto Moreno.
Corrección de estilo: Yesid Castiblanco Barreto.
Diseño editorial: Fec Suministros y Servicios sas
Revisión editorial: Rosemberg del Carpio.

El presente libro ha sido fruto de la labor investigativa del Grupo de Investigación e Innovación en Modelación Matemática y Computacional – GIIMMYC.

En cuanto a la información consignada en el presente documento, fue revisada y evaluada por pares evaluadores externos doble ciego con el fin de garantizar una valoración crítica e imparcial sobre la calidad de los manuscritos; por lo cual los autores fueron informados sobre las recomendaciones dadas por los pares para realizar los respectivos cambios y/o ajustes del caso, para finalmente ser aprobados por el Comité Editorial de la Universidad de Cundinamarca.

El desarrollo y el resultado final representado en el presente libro fue posible gracias a:

Dr. Adriano Muñoz Barrera
Rector

Dra. María Eulalia Buenahora Ochoa
Vicerrectora Académica

Dr. José Zacarías Mayorga Sánchez
Director de Investigación Universitaria

Mtra. Aura Esther Álvarez Lara
Decana de la Facultad de Educación

EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN DESDE EL MOVIMIENTO

Martha Lidia Barreto Moreno[1]

1

[1] Magíster en Educación con énfasis en docencia universitaria. Docente investigadora de la Universidad de Cundinamarca. Líder del Grupo de Investigación e Innovación en Modelación Matemática y Computacional (GIIMMYC). marthaba@ucundinamarca.edu.co

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La actividad educativa exige un trabajo reflexivo constante y dinámico, que permita hacer de ella un proceso de continua investigación, en el cual la acción del docente se vea motivada por las situaciones que constantemente se presentan en el aula y que son objeto de estudio.

En educación se encuentran a diario situaciones que exigen la acción efectiva del docente para ayudar a sus estudiantes en los procesos de aprendizaje, lo que pone de frente un horizonte en el cual se puede cimentar una investigación que esté orientada por algunas técnicas provenientes de campos diferentes al educativo, como es el empresarial, para orientar y evaluar las acciones docentes.

La exploración sobre los procesos formativos relacionados con el concepto de función en los primeros semestres de programas de pregrado para la formación de docentes de matemáticas y de física de la Universidad de Cundinamarca, hace aproximadamente 20 años[1], impulsaron la necesidad de diseñar un proceso que permitiera aprovechar la epistemología y la prospectiva en la planificación y el desarrollo de actividades para fortalecer el ejercicio de la docencia, el cual se socializa en este documento.

Es claro que la actividad educativa requiere de la reflexión continua sobre aspectos tales como: el área del conocimiento que se está enseñando, la manera como se transmite la información, el grupo de personas a quienes va dirigida y la finalidad del proceso de enseñanza que se está ejecutando; de manera que se tenga completo conocimiento de las exigencias, los compromisos y retos que implican todas las actividades que se desarrollen.

La necesidad de implementar estrategias orientadas al desarrollo de habilidades para comprender e integrar los conceptos de matemática y física de manera articulada y efectiva, motivaron hacia la realización de un estudio detallado y secuencial a partir de la forma como los estudiantes abordaban aspectos como el análisis de gráficas, por ejemplo. Esto suscitó la pregunta: *¿Cómo relacionar la enseñanza de la matemática y la física, en el estudio de la función desde el movimiento de modo que permita la construcción del concepto de derivada?*

Uno de los referentes clave lo constituyó el artículo titulado *Variables críticas en educación matemática,* en el cual se destaca como un tópico muy interesante de investigar *"la relación entre la enseñanza de la matemática y la enseñanza de las ciencias físicas"* (Sadosky, 1980). Sadosky sostiene además que *"hay muchos matemáticos y científicos de otras especialidades que creen que debe presentarse la enseñanza de la matemática*

[1] Reconocido con el premio Nacional en Educación "Francisca Radke" versión 1999.

y la de las ciencias físicas de manera conjunta, pero hay poca información al respecto”.

En este orden de ideas, al abordar el *Estudio de la función desde el movimiento* reviste especial importancia la observación sobre el proceso de análisis de gráficas que realizaron los estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemática y Física de la Universidad de Cundinamarca, y que permitió en esa oportunidad hacer seguimiento al manejo por parte del estudiante de las funciones y sus representaciones, al analizar los datos provenientes de las prácticas del laboratorio de física.

Los resultados obtenidos al realizar las observaciones en las interacciones con los estudiantes, contribuyeron con la detección de los aspectos críticos del proceso de conceptualización que obstaculizaban el abordaje de temas posteriores, como es en el caso del estudio de la derivada.

Por otra parte, es preciso recordar la siguiente afirmación de Philip E. B. Jourdain en *La naturaleza de la matemática*:

> *Al mismo tiempo que los métodos, álgebra y geometría analítica, y cálculo infinitesimal se desarrollaron a partir de la aplicación de la matemática a la ciencia de la naturaleza, se desarrollaron también las nuevas concepciones que influyeron en la forma que tomó la matemática durante los siglos XVII, XVIII y XIX. Los conceptos de variable y función pasaron a primer plano, se introdujeron por la concepción del movimiento y fecundaron la matemática a pesar de las dudas de los pocos lógicos que había en las filas de los matemáticos [...]* (Jourdain, 1994).

Dada la importancia de implementar procesos de conceptualización que lleven al estudiante hacia la construcción del conocimiento sin desconocer su desarrollo histórico, detectando a la vez los problemas que se les presenten al docente y al estudiante, y que son considerados como variables críticas, desde el punto de vista prospectivo, este estudio se ha constituido en instrumento de apoyo para la evaluación de las acciones formativas, la comprobación de las hipótesis de trabajo y la construcción de una visión futura en la formación de docentes.

Se propuso como objetivo general, generar procesos educativos que permitan abordar problemas de la educación matemática mediante el análisis prospectivo, a partir de la relación entre la matemática, la física y la epistemología.

Entre los objetivos específicos propuestos, se destacan: 1). Analizar la evolución del concepto de función con una visión histórico-epistemológica sobre el movimiento, desde la cultura griega hasta abordar el concepto de derivada de Newton y Leibniz. 2). Aplicar técnicas de la prospectiva, en el diseño de actividades para el estudio de la función desde el movimiento, que permitan hacer de la experiencia docente un campo de investigación formativa en torno a problemas de Educación matemática.

3). Identificar los aspectos característicos surgidos del diseño de actividades para la comprobación de las hipótesis de trabajo, analizando su viabilidad y evaluando la probabilidad de aparición de acciones futuras.

El método implementado durante el proceso fue de tipo descriptivo con la integración de los elementos provenientes de la prospectiva, en cuanto al manejo de técnicas como el análisis estructural, el juego de actores y la matriz de impacto cruzado.

La adaptación de estas técnicas al trabajo de aula contribuyó a la identificación de las disfunciones en los procesos de conceptualización de la función; a partir de la categorización de las variables críticas, se sistematizó el problema, se realizó el planteamiento de la hipótesis de trabajo y se diseñaron acciones que, aplicadas progresivamente, facilitaron la evaluación de su funcionalidad en el proceso.

La ejecución de las acciones permitió identificar las fallas en la evolución del proceso de enseñanza, así como la formulación de los proyectos y la percepción de anhelos y temores en torno a la labor docente, sobre temas específicos de la educación matemática.

Con el transcurrir del tiempo, los proyectos planteados para enfrentar las disfunciones se convirtieron en necesidades ejecutables a corto, mediano y largo plazo, así como anhelos se volvieron potencialidades, realizables a largo plazo, lo que permitió diseñar escenarios de trabajo futuros, que aún se implementan.

Capítulo 1.

De los problemas científicos a los programas de investigación: perspectiva epistemológica en el estudio de la función desde el movimiento

En aras de articular procesos de la matemática y la física hacia el desarrollo del pensamiento funcional y variacional en la formación de docentes a partir del estudio de la función desde el movimiento, se adopta la posición de S. Toulmin, como se cita en Laudan (1979), respecto a la importancia de conformar un esquema conceptual que cumpla la función de determinar "los patrones teóricos, las preguntas significativas y las interpretaciones legítimas" que surgen durante el proceso investigativo.

Problema científico

Siguiendo a Larry Laudan en su obra *El progresos y sus problemas,* es necesario "reconocer a la ciencia como un sistema de resolver problemas que ofrece ventajas para su comprensión y análisis" (Laudan, 1979). También se requiere identificar lo que ha sido denominado problema científico, el cual es considerado como punto central del pensamiento científico; y asumir las teorías, como su resultado final. En este orden de ideas el autor concluye que "si los problemas constituyen las preguntas de la ciencia, las teorías constituyen las respuestas".

Desde la perspectiva epistemológica de Larry Laudan, existen dos tipos diferentes de problemas para cuya solución se elaboran teorías científicas (Laudan, 1979). Al primero de ellos le ha denominado problema empírico, y se clasifica en:

- Problemas resueltos: corresponde a aquellos que han sido satisfactoriamente resueltos por una teoría.
- Problemas anómalos: aquellos que una teoría concreta no ha resuelto, pero que han sido resueltos por una o más teorías alternativas.
- Problemas no resueltos: en este grupo se ubican aquellos que aún no han sido adecuadamente resueltos por alguna teoría.

Como una de las características distintivas del progreso científico es la transformación de problemas empíricos anómalos y no resueltos, en problemas resueltos, suele surgir según Laudan, para el caso de cada una de las teorías, la siguiente pregunta: "¿cuántos problemas han sido resueltos y cuántas anomalías se les enfrentan?" (Laudan, 1979). Esta pregunta desde el punto de vista epistemológico se ha convertido en herramienta clave para la evaluación comparativa de las teorías científicas.

Un segundo tipo de actividad de resolución de problemas corresponde a los denominados problemas conceptuales.

Laudan destaca que un problema conceptual es un problema presentado por alguna teoría, y no tiene existencia independiente de las teorías que lo muestran, ni siquiera esa limitada autonomía que a veces poseen los problemas empíricos.

Otro aspecto por considerar hace referencia a que las teorías están inevitablemente involucradas en la solución de los problemas, pues el objetivo de la teorización es proporcionar soluciones coherentes y adecuadas a los problemas empíricos que estimulan la investigación. Para Laudan las teorías son diseñadas para evitar (o resolver) los diversos problemas conceptuales y anómalos que generan sus predecesoras. Si se considera así a la investigación y si se observan las teorías desde esta perspectiva, resulta claro que la *"corroboración empírica cognoscitiva central para una teoría, incluye la valoración de su adecuación como solución a determinados problemas empíricos y conceptuales"* (Laudan, 1979).

Se requiere clarificar qué son y cómo funcionan las teorías, para ello es esencial considerar dos grandes aspectos referentes para su análisis:

En primer lugar, la evaluación de teorías es algo comparativo. Lo crucial en cualquier valoración cognoscitiva de una teoría es: ¿cómo le va con respecto a sus competidoras? Las medidas absolutas de las credenciales empíricas o conceptuales de una teoría no tienen relevancia; lo decisivo es el juicio acerca de cómo se sostiene frente a sus contendientes conocidos (Laudan, 1979).

En segundo lugar, Laudan afirma que dentro de la clase de lo que normalmente se llaman "teorías científicas" es preciso distinguir entre dos tipos de redes proposicionales puesto que, en la bibliografía corriente sobre la inferencia científica, así como en la práctica científica común, el término "teoría" se refiere al menos a dos tipos muy diferentes de cosas.

De una parte Larry Laudan considera que se utiliza a menudo el término "teoría" para denotar un conjunto muy específico de doctrinas relacionadas (normalmente llamadas "hipótesis" o "axiomas" o "principios") que se pueden utilizar para llevar a cabo predicciones experimentales específicas y para proporcionar explicaciones detalladas de los fenómenos naturales. Cita como ejemplos de este tipo de teorías: la teoría del electromagnetismo de Maxwell, la teoría de la estructura atómica de Bohr-Kramers-Slater y la teoría del efecto fotoeléctrico de Einstein (Laudan, 1979).

Desde esta posición epistemológica, argumenta que el término "teoría" se utiliza también para referirse a conjuntos de doctrinas o supuestos mucho más generales, y mucho menos fácilmente corroborables empíricamente (Laudan, 1979). Menciona como ejemplos, la teoría atómica y la teoría cinética de los gases, porque en cada uno de estos casos se hace referencia a un espectro completo de teorías individuales.

Sobre la base de este marco epistemológico, se orientará la siguiente reflexión en este proceso partiendo la siguiente afirmación:

"Observamos que los cuerpos pesados caen hacia la tierra con una regularidad asombrosa".

Esta observación implicó la formulación de preguntas significativas para el pensamiento griego, relacionadas con su interpretación de la naturaleza y asociadas a uno de los problemas empíricos centrales de la época: la caída de los cuerpos.

Morris Kline sostiene que, preguntarse ¿cómo? y ¿por qué? caen los cuerpos así, contribuyó a la comprensión del por qué los griegos crearon una matemática de gran vitalidad, pues fue el deseo urgente e irreprimible de comprender el mundo físico, de resolver sus problemas empíricos, lo que los impulsó a crear y apreciar la matemática.

Esta era una componente importante de la investigación de la naturaleza y la clave para la comprensión del universo, pues las leyes matemáticas son la esencia de su diseño, y como sostiene Hermann Henkel citado por Kline: "*En la mayoría de las ciencias una generación destruye lo que otra ha construido y lo que una ha establecido otra lo deshace. Solo en matemáticas cada generación añade un piso nuevo a la antigua estructura" (Kline, 1992).*

Siguiendo a Kline, es posible comprender que en la historia de la humanidad se ilustra cómo las civilizaciones que precedieron a la griega o las que eran contemporáneas de ella contemplaban la naturaleza como algo caótico, misterioso y terrorífico (Kline,1992) y que por tanto, el paso decisivo para eliminar el misterio, el misticismo y la arbitrariedad de los trabajos sobre la naturaleza, y reducir la apariencia de caos a un modelo comprensible y ordenado, fue la aplicación de la matemática en el proceso de observación y abordaje de problemas empíricos.

El primer grupo importante que presentó una filosofía racional y matemática de la naturaleza fue el de los pitagóricos. El pensamiento religioso de los pitagóricos era místico, pero su filosofía natural era racional. Estaban sorprendidos por el hecho de que fenómenos que eran de muy diferente forma desde el punto de vista cualitativo, presentaban propiedades matemáticas idénticas, las cuales debían ser la esencia de tales fenómenos basados en el número y en las relaciones numéricas, pues el número era su primer principio para la explicación de la naturaleza, era la materia y la forma del universo y la causa de todo fenómeno (Kline, 1972).

Los filósofos situados cronológicamente entre los pitagóricos y Platón estudiaron igualmente la naturaleza de la realidad, pero no involucraron en ella la matemática de una manera directa. Los argumentos y puntos de vista de hombres como Parménides (siglo V a. C.), Zenón (siglo V a. C.), Empédocles (c. 484-c. 424 a. C.), Leucipo (c. 440 a. C.) y Demócrito (c.460-c. 370 a. C.) fueron cualitativos, igual que los de sus predecesores jonios (Kline, 1972).

Estos filósofos hicieron grandes afirmaciones acerca de la realidad, que eran, en el mejor de los casos, escasamente sugeridas por la observación. Sin embargo, todos afirmaban que la naturaleza es inteligible y que la realidad puede comprenderse a través del pensamiento. Cada uno de ellos era un eslabón de la cadena que conducía a la investigación matemática de la naturaleza.

Según Kline (1972), para los atomistas Leucipo y Demócrito igual que los pitagóricos, la realidad que subyace en la constantemente cambiante diversidad del mundo físico se podía expresar en términos matemáticos y, los acontecimientos de este mundo estaban de forma estricta determinados por leyes matemáticas.

Para Platón, el primero de los pitagóricos después de Pitágoras, la realidad e inteligibilidad del mundo físico se pueden abarcar solamente a través de las matemáticas. Para él, no había ninguna duda de que el mundo estaba matemáticamente trazado, ya que *"Dios geometriza eternamente"* (Vives, 2006). Desde esta perspectiva, el mundo percibido por los sentidos es confuso y engañoso, y en cualquier caso imperfecto y perecedero.

En consecuencia, el conocimiento físico no es importante, ya que los objetos materiales cambian y decaen; así, el estudio directo de la naturaleza y las investigaciones estrictamente físicas son inútiles. No obstante, el mundo físico es una copia imperfecta del mundo ideal, el único que deben estudiar matemáticos y filósofos. Las leyes matemáticas, eternas e inmutables, son la esencia de la realidad.

Platón fue más allá que Pitágoras al desear no solamente comprender la naturaleza a través de la matemática, sino sustituir la propia naturaleza por ella. Creía que alguna ojeada al mundo físico podría suministrar algunas verdades básicas, a partir de las cuales la razón podría seguir adelante sin ayuda. Desde esa perspectiva no existiría la naturaleza, sino la matemática que sustituiría las investigaciones físicas como lo hace en la geometría.

El pensamiento de Platón adolece de estudiar los problemas empíricos, pues para él el conocimiento verdadero es el intelectual, con el que conocemos las ideas. Se puede pensar que los problemas de Platón tenían una naturaleza conceptual. Para verificar esta suposición es necesario introducir lo expuesto por Laudan (1979) sobre las siguientes características de los problemas conceptuales:

- Surgen cuando una teoría muestra ciertas inconsistencias internas, o cuando sus categorías básicas de análisis son vagas y están poco claras (problemas conceptuales internos).

- Aparecen cuando la teoría (T) está en conflicto con otra teoría o doctrina (T'), que los partidarios de T creen que está racionalmente bien fundada (problemas conceptuales externos).

En este orden de ideas, si a partir del pensamiento de Platón se produjeron problemas conceptuales es preciso tener en cuenta a su discípulo Aristóteles, quien, al mismo tiempo que tomaba varias ideas de su maestro, tenía una idea completamente distinta del estudio del mundo real y de la relación entre las matemáticas y la realidad.

Aristóteles criticó la visión del mundo de Platón y su reducción de la ciencia a las matemáticas. Fue un físico y creía en las cosas materiales como sustancia primera y origen de la realidad. La física y la ciencia en general deben estudiar el mundo físico para obtener verdades; el verdadero conocimiento se obtiene a partir de la experiencia sensorial por medio de la intuición y la abstracción. Entonces, la razón debe aplicarse a los conocimientos así obtenidos.

De acuerdo con lo anterior, se concluye que en el pensamiento de Platón se encuentran problemas conceptuales externos, puesto que la existencia de una “tensión” con otra teoría constituye un problema conceptual y, como se puede apreciar, Aristóteles tenía una idea completamente distinta del estudio del mundo real y de la relación entre las matemáticas y la realidad.

Aristóteles cita en su física el problema de la caída como un problema central para cualquier teoría de la mecánica terrestre. Él mismo intentó entender por qué los cuerpos caen y por qué se aceleran en su caída. La física aristotélica daba a estos problemas soluciones que fueron tomadas en serio durante más de dos milenios (Hewitt, 1995).

Para Aristóteles, la materia que vemos y tocamos está compuesta de cuatro elementos básicos: tierra, agua, fuego y aire. Las cualidades de un objeto determinado dependen de las proporciones de los elementos que entran en él; y con esto quedan determinadas la solidez, la dureza, el grosor y otras propiedades.

Los cuatro elementos tienen otras características. La tierra y el agua tienen gravedad; el aire y el fuego, ligereza. La gravedad motiva que un elemento tienda a situarse en el centro de la Tierra; la ligereza da lugar a que busque el cielo. Así, si se conocen las proporciones de los elementos que forman parte de un cuerpo dado, se puede conocer también su movimiento (Aróstegui, 1970).

Las ciencias físicas eran fundamentales para el estudio de la naturaleza y las matemáticas ayudaban a describir propiedades formales tales como la forma y la cantidad. Proporcionaban también explicaciones de hechos observados en fenómenos materiales. De esta manera, la geometría daba las razones de hechos que se producían en óptica y astronomía, y la aritmética las proporciones que producirían la armonía (Kline, 1972).

Pero la matemática era definitivamente una abstracción del mundo real, ya que los objetos matemáticos no son independientes o anteriores a la experiencia. Existen en la mente humana como una clase de ideas intermedias entre los objetos sensibles y su esencia. Puesto que se han abstraído del mundo físico, son aplicables a él, pero no tienen ninguna realidad aparte de las cosas visibles y tangibles. La matemática sola no puede proporcionar nunca una definición adecuada de la sustancia.

Diferencias cualitativas, como los distintos colores, no pueden ser reducidas a diferencias geométricas. En consecuencia, en el estudio de las causas, la matemática puede dar, en el mejor de los casos, algún conocimiento de la causa formal, esto es, una descripción.

Puede describir lo que ocurre en el mundo físico, puede establecer correlaciones entre variaciones concomitantes, pero no puede decir nada acerca de las causas finales y efectivas del movimiento o el cambio.

Es importante recordar cómo en la Antigüedad la ciencia había de considerar las causas del cambio. Según el pensamiento aristotélico había cuatro tipos de causas:

* La primera era la causa material o inmanente; para una estatua de bronce, el bronce es la causa inmanente.
* La segunda era la causa formal; para una estatua era el diseño o la forma. La causa formal de la armonía es la relación de 2 a 1 en la octava.
* La tercera causa era la causa eficiente, el agente o el actor; el artista y su cincel son las causas efectivas para la estatua.
* La cuarta era la causa final o el propósito para el que servía el fenómeno; las estatuas sirven para el goce del pueblo, para ofrecer belleza. La causa final era la más importante de las cuatro porque daba la razón última de acontecimientos o fenómenos. Cada cosa tenía una causa final.

Así pues, Aristóteles distinguía formalmente entre matemática y física, y asignaba un papel menor a la matemática, difiriendo así de las ideas de su maestro Platón. No estuvo interesado en la predicción, pues para los filósofos griegos que forjaron y moldearon el mundo intelectual, el énfasis de su pensamiento estaba orientado hacia el estudio de la naturaleza para la comprensión y apreciación de su realidad subyacente.

Por otra parte, desde los tiempos de los pitagóricos prácticamente todos aseguraban que la naturaleza estaba diseñada de forma matemática. Durante el periodo clásico, la teoría del diseño matemático de la naturaleza quedó establecida y la investigación de las leyes matemáticas, institucionalizada (Kline, 1972).

A pesar de que esta teoría no motivaba toda la matemática creada después, una vez establecida fue aceptada y seguida concienzudamente por la mayoría de los grandes matemáticos. Para Kline, durante el tiempo en que imperó esta doctrina, que fue hasta finales del siglo XIX, la investigación del diseño matemático se identificó con la búsqueda de la verdad.

Tradición de investigación

El punto de vista epistemológico de Laudan (1979) sobre la importancia de los problemas científicos y de las teorías, es esencial para introducir las tradiciones de investigación, como componentes esenciales para la estructuración del esquema conceptual que se está configurando. En primer lugar, es conveniente tener en cuenta lo planteado por Laudan respecto a las tradiciones de investigación:

1. Toda tradición de investigación tiene un cierto número de teorías específicas que la ejemplifican y la constituyen parcialmente; algunas de estas teorías serán

contemporáneas, otras serán sucesoras temporales de teorías anteriores.

2. Toda tradición de investigación evidencia determinados compromisos metafísicos y metodológicos que, como conjunto, individualizan la tradición de investigación y la distinguen de otras.

3. Cada tradición de investigación (a diferencia de las teorías específicas) discurre a través de un cierto número de formulaciones diferentes, pormenorizadas (y a menudo mutuamente contradictorias), y tiene generalmente una larga historia, que se extiende a lo largo de un considerable tiempo. (Por el contrario, las teorías tienen una vida corta).

Respecto a lo anterior, es necesario considerar que el pensamiento aristotélico a lo largo de los 2000 años de influencia ha enmarcado toda una tradición de investigación que merece ser considerada para la comprensión de los conceptos aquí abordados.

Puesto que la tradición de investigación aristotélica proporciona un conjunto de directrices para el desarrollo de las teorías específicas, se tendrá en cuenta la función de dichas teorías en el seno de la tradición de investigación al explicar los problemas empíricos y conceptuales del dominio, “reduciéndolos” a la ontología de dicha tradición (Laudan, 1979).

Con el fin de dar coherencia al estudio de la función desde el movimiento, es preciso mencionar que, si bien todos los tipos de problemas se plantean dentro de un determinado contexto de indagación y se definen en parte por dicho contexto, nuestras presuposiciones teóricas acerca del orden natural nos dicen qué esperar y qué parece peculiar o “problemático” o preguntable.

Larry Laudan afirma que las situaciones que plantean problemas en el seno de un contexto de indagación no lo harán también necesariamente en otros. Por lo tanto, el que algo sea considerado como un problema empírico o conceptual dependerá, por otra parte, de las teorías de que dispongamos.

Por ejemplo, al preguntar “¿con qué velocidad caen los cuerpos cerca de la Tierra?” se supone que hay objetos relacionados con nuestras concepciones de los cuerpos y de la Tierra que se mueven uno hacia otro según una regla regular. Este supuesto está, desde luego, cargado de teoría, pero a pesar de ello afirmamos que se refiere al mundo físico.

Esta situación se ejemplifica también desde los filósofos griegos, quienes creían que la mente era el agente más poderoso para abarcar la naturaleza y adoptaron principios básicos que se referían a la mente. Así, la creencia de que el movimiento circular era el básico, defendida por Aristóteles sobre la base de que el círculo es completo mientras que una figura lineal, debido a que está limitada por varias curvas (segmentos lineales), es incompleta y por tanto de importancia secundaria, recurría a la mente basándose en principios estéticos.

Que los cuerpos celestes se moverían solo con velocidad constante o uniforme fue un concepto que agradaba a la mente, seguramente porque era más sencillo que el movimiento no uniforme.

Aristóteles daba importancia a las abstracciones solamente en la medida en que podían servir de ayuda para comprender el mundo observable, decía que debemos comenzar a partir de principios que son conocidos y manifiestos a la mente y proceder entonces a analizar las cosas que se encuentran en la naturaleza. Vamos, dice, de lo universal a lo particular, del hombre a los hombres, exactamente como los niños llaman padre a todos los hombres y entonces aprenden a distinguir.

Así pues, incluso las abstracciones que vienen de objetos concretos presuponen algunos principios generales que emanan de la mente. Esta doctrina, el poder de la mente para producir primeros principios, fue rechazada en el siglo XVII (Kline, 1972).

Es necesario encontrar en aquella tradición de investigación en la cual se puedan ubicar las primeras manifestaciones de una teoría del movimiento, y es precisamente en la cultura griega en la que se inició la ciencia de la mecánica, pues, en su física Aristóteles incluye una teoría del movimiento que es el punto culminante de la mecánica griega.

Según Aristóteles, hay dos tipos de movimiento: el natural y el violento o creado por el hombre (Smoot, 1994). En primer lugar, los movimientos naturales se producen cuando un cuerpo busca su lugar natural. En sus movimientos naturales, los cuerpos terrestres describen trayectorias rectas hacia arriba o hacia abajo. Si un objeto terrestre no estuviera en su lugar natural, lo buscaría con la mayor rapidez posible. En segundo lugar, los movimientos violentos, es decir, los provocados por el hombre, están compuestos de partes circulares y de partes rectilíneas.

La cosmología occidental comienza con los griegos y en su época apareció la visión del cosmos de Aristóteles. Quizás una razón por la que el trabajo de Aristóteles tuviera, entonces y después, tan tremendo atractivo se debe a su enorme amplitud, pues considerando que los griegos fueron los primeros teóricos, el filósofo formuló un concepto de la estructura del universo y una teoría del movimiento, inseparables y naturalmente relacionadas e interdependientes. Juntas constituían una visión completa que durante mucho tiempo pareció, si no demasiado gloriosa para objetar, sí imposible de ignorar (Smoot, 1994).

Para Aristóteles, el centro de la Tierra era el centro mismo del universo. El movimiento circular era la perfección, y la caída de los cuerpos por sí mismos representaba el movimiento natural. Para él, cualquier movimiento de una piedra que no fuera rectilíneo hacia abajo no era natural y requería la presencia de alguna fuerza externa.

En la cosmología aristotélica el movimiento en los cielos era circular, mientras que en la Tierra cuando las cosas se movían lo hacían en línea recta. El estado natural de la materia era el reposo (Smoot, 1994). En cuanto al concepto de tiempo, Heráclito decía que el tiempo fluía como la corriente de un río, de tal manera que nadie podía bañarse dos veces en la misma agua, y posteriormente Aristóteles lo definió como la medida del movimiento según un antes y un después (*numerus secundum prius et posterius*).

Durante el periodo medieval en Europa, a medida que la Iglesia extendía su influencia, iba favoreciendo e imponiendo una determinada cultura. El bajo nivel que se presentaba en las matemáticas se debía a la ausencia de interés por el mundo físico. Las preocupaciones importantes eran espirituales.

En este sentido Morris Kline describe a la civilización romana como no productiva en matemáticas porque estaba demasiado preocupada por la obtención de resultados prácticos e inmediatamente aplicables.

La revisión documental ha conducido a considerar que aparentemente, las matemáticas no pueden florecer ni en una civilización demasiado ligada a la Tierra, ni demasiado ligada al cielo. Por consiguiente, donde se han desarrollado con más éxito ha sido en una atmósfera intelectual libre, que combine un interés por los problemas que presenta el mundo físico, con un deseo de pensar sobre ideas sugeridas por esos problemas en una forma abstracta, que no promete ningún resultado práctico o inmediato (Kline, 1972).

Pasaron aproximadamente 18 siglos, antes de que alguien comprendiera que el movimiento constante era el estado natural de las cosas; que un cuerpo en movimiento se moverá siempre por sí mismo, a menos que alguna cosa lo retarde o pare (Hecht, 1987).

Durante el siglo XIV, los eruditos pensaron que el movimiento era una cualidad variable de la materia, como el rojo de una manzana o la dulzura de una ciruela. Sus objetivos fueron teológicos y metafísicos, no prácticos. Nadie parecía tener particular interés en medir estas cualidades. La lógica era el principal instrumento del conocimiento.

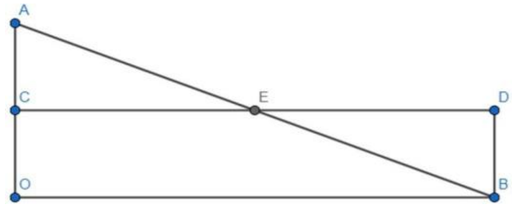
La concepción intuitiva del movimiento es muy diferente a la de la Edad Media. Tenemos una sensación inmediata del desarrollo de los hechos, una estructura después de otra. La superposición de imágenes múltiples proporciona una única perspectiva; el movimiento a través del ojo de la cámara. Y, desde luego, tenemos velocímetros, controles de la rapidez, límites de rapidez, etc. (Hecht, 1987). Esto implica la necesidad de identificar en la historia los momentos significativos que generaron la evolución de dichas concepciones.

Por ejemplo, en (Kline, 1972) se afirma que una de las contribuciones de Nicolás de Oresme (c. 1323-1382) fue el estudio del cambio. Recordemos que Aristóteles distinguía nítidamente entre cualidad y cantidad. La intensidad del calor era una cualidad, y para cambiar la intensidad, una sustancia, una especie de calor, debe perderse y otra añadirse. En este sentido, Oresme afirmaba que no había tipos diferentes de calor sino más o menos cantidad del mismo tipo, así, varios escolásticos del siglo XIV en Oxford y París, comenzaron a pensar sobre el cambio y la velocidad del cambio de forma cuantitativa.

Estos autores estudiaron el movimiento uniforme (movimiento con velocidad constante), movimiento diforme (movimiento con velocidad variable) y movimiento uniformemente diforme (movimiento con aceleración constante). Para estudiar el cambio y la velocidad del cambio, Oresme siguió la tradición griega afirmando que las cantidades medibles distintas de números podían representarse mediante puntos, líneas y superficies (Kline, 1972).

Para representar el cambio de la velocidad con el tiempo, Oresme representa el tiempo a lo largo de una línea horizontal, que llama la longitud, y las velocidades en distintos instantes de tiempo mediante líneas verticales, que llamó latitudes. Para representar una velocidad que decrece uniformemente desde el valor OA en O a cero en B, dibuja una figura triangular.

Figura 1. Representación del decrecimiento de velocidad.



Fuente: Kline, M. (1972).

También apunta que el rectángulo OBDC, determinado por E, el punto medio de AB, tiene la misma área que el triángulo OAB y representa un movimiento uniforme a lo largo del mismo intervalo de tiempo. Oresme asociaba el cambio físico con toda la figura geométrica. El área completa representaba la variación en cuestión; no había referencia a valores numéricos.

Kline (1972) afirma que Oresme contribuyó a la formación del concepto de función, a la representación funcional de las leyes físicas y a la clasificación de las funciones. Se le ha acreditado también la creación de la geometría de coordenadas y la representación gráfica de funciones. En realidad, la latitud de las formas es una idea poco clara, como mucho un tipo de gráfico. Aunque la representación de Oresme de la intensidad con el nombre de latitudes *formarum* fue una técnica importante en el objetivo escolástico de estudiar el cambio físico y fue aplicada en algunos intentos de revisar la teoría de Aristóteles sobre el movimiento, su influencia sobre el pensamiento posterior fue pequeña. Galileo utilizó esta figura, y con bastante más claridad y acierto.

Como la teoría de Aristóteles había adquirido cierto ascendiente, fue su teoría la que constituyó el punto de partida para las investigaciones sobre el movimiento. Los científicos medievales intentaron resolverlas dentro del marco de referencia aristotélico; esto muestra su vinculación con la tradición de investigación aristotélica.

La escuela parisina de Buridan y Oresme consideró no solo el movimiento uniforme sino también el diforme y el uniformemente diforme, y demostró para su propia satisfacción que la velocidad efectiva en el Movimiento Uniformemente Diforme (M.U.A.) era la media de las velocidades inicial y final (Kline, 1972).

Quizá lo más significativo acerca de los esfuerzos realizados en el desarrollo de la mecánica en los siglos XIII y XIV fue el intento de introducir consideraciones cuantitativas y reemplazar razonamientos cualitativos por cuantitativos.

Esto muestra la importancia de tener en cuenta que todo científico, antes y ahora, se adhiere a ciertos puntos de vista acerca de cómo se debería ejercer la ciencia, y de lo que cuenta como explicación adecuada del uso de controles experimentales, etc. Estas normas, a las que un científico se atiene en su evaluación de teorías, han sido quizá la fuente más importante de la mayor parte de las controversias en la historia de la ciencia y del surgimiento de muchos de los problemas conceptuales más graves con los que los científicos se las han tenido que ver (Laudan, 1979).

En el Renacimiento el clamor por la reforma de la ciencia, resalta el hecho de cómo en los siglos anteriores de su existencia, las matemáticas iban a obtener sus principales inspiraciones y temas de las ciencias físicas. Sin embargo, para que la ciencia floreciera era esencial que los europeos rompieran con la adherencia servil a la autoridad. Ya bastante se habían dado cuenta de que el método de la ciencia debía ser cambiado; iniciaron una verdadera ruptura con el escolasticismo y con la aceptación sin crítica del conocimiento griego.

La importancia de los comienzos de la ciencia moderna, está en el hecho de que preparó el camino para los principales desarrollos en matemática. El efecto a largo plazo fue que la matemática moderna, guiada por la doctrina platónica de que es la esencia de la realidad, creció casi enteramente a partir de los problemas de la ciencia (Kline, 1972). Con la nueva línea directriz para estudiar la naturaleza y obtener leyes que englobaran observaciones y hechos experimentales, las matemáticas rompieron con la filosofía y se unieron a las ciencias físicas. Las consecuencias para las matemáticas fueron una explosión de actividad y de creación original que fue la más prolífica en su historia.

Paradigma científico

De *La estructura de las revoluciones científicas* (Kuhn, 1992) se toma otro referente clave para la conformación de este esquema conceptual dirigido al estudio de la función desde el movimiento; en él, Kuhn propone un modelo de progreso científico cuyo elemento primario es el "paradigma". Para empezar, son "modos de mirar el mundo"; ideas o sospechas, amplias y cuasimetafísicas, acerca de cómo se debería explicar los fenómenos de un dominio. Incluidas bajo el paraguas de cualquier paradigma bien desarrollado, habrá cierto número de teorías específicas, cada una de las cuales presupone uno o más elementos del paradigma.

Para tomar un caso que ejemplifique la idea de paradigma, tomemos la medición; esta es una de las varias nociones que la ciencia moderna ha tomado del sentido común. Sin embargo, la medición no aparece como parte de sentido común hasta que no se alcanza un estadio de civilización relativamente alto; por otra parte, la concepción de medición propia del sentido común ha cambiado a lo largo de la historia y se ha desarrollado enormemente (Hewitt, 1995).

La medición puede definirse en general como la atribución de números a propiedades, para representarlas. Sin embargo, no todas las propiedades pueden representarse mediante números, sino solo algunas. Además, hay propiedades medibles y propiedades no medibles.

Considerando como propiedades medibles de un cuerpo aquellas que cambian por la combinación de cuerpos semejantes, las propiedades no medibles son las que no cambian al realizar la operación.

Por otra parte, decimos que la medición es la representación de propiedades por "números". Entendemos que es la representación de propiedades que no son números por los símbolos que corrientemente usamos para representar números. Además, esos símbolos tienen un nombre específico: se llaman "cifras" (Kline, 1972).

Es necesario tener en cuenta que las propiedades medibles de un objeto tienen que parecerse de algún modo particular a la propiedad de ser número, puesto que pueden representarse adecuadamente por los mismos símbolos; tienen que tener alguna cualidad común con los números. ¿Cuál es esta cualidad?

Según Campbell (1994)**,** para que una propiedad sea medible debe ser tal que:

1. Dos objetos que respecto de esa propiedad sean lo mismo que un tercer objeto, sean lo mismo el uno que el otro.

2. Por la adición sucesiva de objetos podamos construir una serie normal, un miembro de la cual sea lo mismo, respecto de la propiedad, que cualquier otro objeto que deseemos medir.

3. Iguales añadidos a iguales produzcan sumas iguales.

Para conseguir que una propiedad sea medible tenemos que hallar algún método para decidir acerca de la igualdad y de la adición de objetos, de modo que se cumplan esas reglas.

Es preciso pertenecer a un paradigma que considere la medición como se ha caracterizado anteriormente para poder hablar de leyes de la medición. Pero surge por lo menos el siguiente interrogante: ¿Cuál es la naturaleza de esas leyes o reglas?

Pues bien, son leyes establecidas por experimentos determinados. El hecho de que las reglas se cumplen puede y debe ser determinado por experimentos, del mismo modo que se determina el hecho de que una ley cualquiera es verdadera.

Para Hewitt, el proceso de descubrimiento de que una propiedad es medible y el de establecer el procedimiento para medirla, se basan en la investigación experimental. Cada vez que se inaugura una nueva rama de la física (la física es la ciencia que estudia esos procesos de medición), el primer paso es siempre hallar algún proceso para medir las nuevas propiedades en estudio, y hasta que no se resuelve este problema no puede conseguirse ningún gran progreso en la nueva rama. Su solución exige el descubrimiento de nuevas leyes (Hewitt, 1995).

Ya antes de que apareciera la historia propiamente dicha se habían descubierto leyes que hacían medibles algunas de las propiedades utilizadas por la ciencia moderna. La historia empieza prácticamente con los griegos, pero antes de su época se había hallado que las propiedades de peso, longitud, volumen y área son medibles; el descubrimiento de las leyes necesarias para ello tuvo probablemente lugar en el gran período de las civilizaciones babilónica y egipcia. Los griegos, sobre todo en la persona de Arquímedes, hallaron cómo puede medirse la fuerza mediante el establecimiento de las leyes de la palanca y otros sistemas mecánicos (Hull, 1984).

Según Kline desde los tiempos más antiguos se presentaron groseros métodos para medir períodos, pero hasta el siglo XVII no se descubrió un verdadero método que realmente obedeciera a las tres reglas; el método nació gracias a la Ley del péndulo, de Galileo.

Teniendo en cuenta que la medición consiste en la atribución de números (o cifras) a propiedades para representarlas, se había considerado anteriormente un modo de hacer esa atribución y se habían sacado a la luz las leyes que tienen que cumplirse para que sea posible aplicar dicho procedimiento. Este, por otra parte, es el fundamental.

Esta afirmación la ha consolidado la historia; todas las propiedades medidas en la era propiamente precientífica lo fueron (o, por lo menos, eran medibles) por el proceso fundamental; esto puede decirse del peso, la longitud, el volumen, el área y los tiempos. La medición derivada y dependiente es un producto de la investigación científica consciente y propiamente dicha, aunque el descubrimiento se haya perdido, en algunos casos, en la niebla del pasado (Kline, 1972).

Lo anterior ejemplifica el paradigma de la medición, moderna. Veamos ahora cómo evoluciona un concepto y cómo se presentan los cambios en las visiones del mundo, es decir, los cambios de paradigma.

La propiedad que se va a tomar como ejemplo es un caso de medición dependiente y por tanto derivada, es la rapidez.

Hecht (1987) sostiene que las artes trabajan para volver a crear una sensación de movimiento y por este medio comprenderlo. Por su parte, la física intenta cuantificar para describir en términos medibles, para asociar números con cantidades y al hacerlo establecer su propia forma de entendimiento. Cuanto más velozmente se mueve un objeto, menos tiempo tardará en recorrer una distancia dada. Existen relojes para medir tiempos y reglas para medir distancias; solo tenemos que relacionar de algún modo esas primitivas ideas intuitivas para cuantificar “la rapidez”.

Se cuenta con el concepto antiguo de rapidez, que Aristóteles, entre otros, especificó como "la distancia recorrida en un tiempo dado". En nuestros días, decimos casi lo mismo, definiendo rapidez como la RAZÓN entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido correspondiente (Hecht, 1987).

$$Rapidez = \frac{Distancia\ recorrida}{Tiempo\ transcurrido}$$

Es importante tener una idea de lo que significa rapidez constante o uniforme. A pesar de las presunciones de prioridad de Galileo, la siguiente definición fue una contribución de la física medieval: la rapidez uniforme corresponde a recorrer distancias iguales en tiempos iguales.

La palabra velocidad es un sinónimo común de rapidez, aunque en física hay una diferencia significativa entre las dos. Así como la rapidez se refiere solo a la magnitud del movimiento, la velocidad especifica tanto la rapidez como la dirección (Hull, 1984).

Hasta pasados cientos de años de la Edad Media no se hizo práctica común representar ecuaciones en forma simbólica (Kline, 1972). Lo que permite afirmar que, si se tiene en cuenta a la simbolización como el último estadio del proceso de conceptualización, los conceptos de velocidad y rapidez aún no se habían consolidado formalmente.

Por tradición, la letra griega delta, △, precediendo a una cantidad significa usualmente el cambio en esa cantidad. Así, si d es la distancia, △d es el cambio en la distancia o longitud recorrida.

Similarmente, si t representa el tiempo, △t quiere decir el cambio en el tiempo, o duración transcurrida. La rapidez media puede expresarse como:

$$\mathrm{Vm} = \frac{\Delta \mathrm{d}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Morris Kline sostiene que una vez tratada con éxito la rapidez media uniforme, intentaron, aunque en vano, definir el concepto de rapidez instantánea. Los eruditos medievales no pudieron definir de forma adecuada la rapidez instantánea debido a que no tenían ninguna concepción del proceso de límite, de la idea de que △d se haría infinitesimalmente pequeño cuando △t fuera infinitesimalmente pequeño, y sin embargo, la razón $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ permanecería finita. No obstante, les gustaba razonar en términos de proporciones y razones, y desde luego, nunca usaban símbolos en vez de frases (Kline, 1972).

Revolución científica

Para Newman, la ciencia moderna fue fundada por hombres que se planteaban más cuestiones de investigación que sus predecesores. La esencia científica de la revolución científica de los siglos XVI y XVII es más bien un cambio en las perspectivas mentales, que un florecimiento de la invención, y Galileo, más que ningún otro pensador particular, fue responsable de este cambio (Newman, 1994).

Para revisar los aspectos característicos de la ciencia moderna que facilitaron el progreso en matemáticas, es conveniente partir de Galileo, no sin antes retomar a Thomas Kuhn, quien en su libro *La estructura de las revoluciones científicas* argumenta que las

> *Revoluciones científicas se inician con un sentimiento creciente, también a menudo restringido a una estrecha subdivisión de la Comunidad Científica, de que un paradigma existente ha dejado de funcionar adecuadamente en la exploración de un aspecto de la naturaleza, hacia el cual el mismo paradigma había previamente mostrado el camino* (Kuhn, 1992).

En este desarrollo, Kuhn afirma que el sentimiento de mal funcionamiento que puede conducir a la crisis es un requisito previo para la revolución.

Las revoluciones científicas solo necesitan parecerles revolucionarias a aquellos cuyos paradigmas sean afectados por ellas. Siguiendo la línea de pensamiento de Kuhn, esto nos conduce a considerar que si bien, desde la Antigüedad más remota, la mayoría de las personas han visto algún objeto pesado balanceándose al extremo de una cuerda o cadena, hasta que finalmente queda en reposo. Para los aristotélicos que creían que un cuerpo pesado se desplazaba por su propia naturaleza de una posición superior a una más baja, hasta llegar a un estado de reposo natural, el cuerpo que se balanceaba simplemente estaba cayendo con dificultad. Sujeto a la cadena solo podía quedar en reposo en su posición más baja, después de un movimiento tortuoso y de un tiempo considerable (Kuhn, 1992).

Para Galileo, por otra parte, al observar el cuerpo que se balanceaba, vio un péndulo, un cuerpo que casi lograba repetir el mismo movimiento, una y otra vez, hasta el infinito. Y después de ver esto, Galileo observó también otras propiedades del péndulo y construyó muchas de las partes más importantes y originales de su nueva dinámica, de acuerdo con esas propiedades.

De las propiedades del péndulo, Galileo dedujo sus únicos argumentos completos y exactos para la independencia del peso y del índice de caída, así como también para la relación entre el peso vertical y la velocidad final de los movimientos descendentes sobre un plano inclinado. Todos esos fenómenos los vio diferentes de cómo habían sido vistos antes.

El cambio de visión parece haber estado involucrado con la explotación por parte de Galileo de posibilidades perceptuales disponibles debido a un cambio del paradigma medieval. Galileo no había recibido una instrucción totalmente aristotélica. Por el contrario, había sido preparado para analizar los movimientos, de acuerdo con la teoría del ímpetu, un paradigma del final de la Edad Media, que sostenía que el movimiento continuo de un cuerpo pesado se debía a un poder interno, implantado en él por el impulsor que inició su movimiento.

Por otra parte, la historia del conocimiento científico destaca a Jean Buridan y Nicolás Oresme, escolásticos del siglo XIV que llevaron la teoría del ímpetu a sus formulaciones más perfectas, ellos son los primeros hombres de quienes se sabe que vieron en los movimientos de oscilación una parte de lo que vio en ellos Galileo. Buridan describe el movimiento de una cuerda que vibra como aquel en el que el ímpetu es implantado primeramente cuando se golpea la cuerda. Más avanzado el siglo, Oresme bosquejó un análisis similar de la piedra que se balancea, en lo que ahora aparece como la primera discusión sobre el péndulo.

De manera clara, su opinión se encuentra muy cerca de la que tuvo Galileo cuando abordó por primera vez el estudio del péndulo (Kline, 1972). Al menos en el caso de Oresme y casi seguro que también en el de Galileo, fue una visión hecha posible por la transición del paradigma aristotélico original al paradigma escolástico del ímpetu para el movimiento (Kuhn, 1992).

Si se analiza desde la perspectiva epistemológica expuesta por Larry Laudan en *El progreso y sus problemas*, hasta que se inventó ese paradigma escolástico no hubo péndulos, sino solamente piedras oscilantes, para que pudiera verlas el científico. Los péndulos comenzaron a existir gracias a algo muy similar al cambio de forma provocado por un paradigma. Aristóteles y Galileo vieron ambos el péndulo, pero difirieron en sus interpretaciones de lo que ambos habían visto. Galileo interpretó las observaciones del péndulo y Aristóteles las de las piedras en caída. Cada una de esas interpretaciones presuponía un paradigma, pues cada uno de ellos pertenecía a una tradición de investigación diferente.

Para aprender algo más sobre cuáles pueden ser las diferencias de experiencia, volvamos por un momento a Aristóteles, Galileo y el péndulo: ¿Qué datos pusieron a su alcance la interpretación de sus diferentes paradigmas y su medioambiente común?

Al respecto, Thomas Kuhn sostiene que "al ver la caída forzada, el aristotélico mediría (o al menos discutiría; el aristotélico raramente medía) el peso de la piedra, la altura vertical a que había sido elevada y el tiempo requerido para que quedara en reposo. Junto con la resistencia del medio, esas fueron las categorías conceptuales tomadas en consideración por la ciencia aristotélica para tratar la caída de un cuerpo. La investigación normal guiada por ellas no hubiera podido producir las leyes que descubrió Galileo. Solo podía —y lo hizo por otro camino— conducir a la serie de crisis de la que surgió la visión de Galileo de la piedra oscilante".

Como resultado de estas crisis y de otros caminos intelectuales, Galileo vio la piedra que se balanceaba de manera totalmente diferente. El trabajo de Arquímedes sobre los cuerpos flotantes hizo que el medio no fuera esencial: la teoría del ímpetu hacía que el movimiento fuera simétrico y duradero; y el neoplatonismo dirigió la atención de Galileo hacia la forma circular del movimiento.

Por consiguiente, Kuhn sostiene que Galileo midió solo el peso, el radio, el desplazamiento angular y el tiempo por oscilación, que eran precisamente los datos que podían interpretarse de tal modo que produjeran sus leyes para el péndulo. En realidad, la interpretación resultó casi innecesaria. Con los paradigmas de Galileo, las regularidades similares a las del péndulo eran casi accesibles a la inspección.

Es así como Kuhn, concluye que las regularidades que para un aristotélico no hubieran podido existir (y que, en efecto, no se encuentran ejemplificadas precisamente en ninguna parte de la naturaleza), fueron para el hombre que vio la piedra oscilante como la vio Galileo, consecuencias de la experiencia inmediata.

De otra parte, Kuhn (1992) supone que puede ser demasiado imaginario el ejemplo anterior, ya que los aristotélicos no registran ninguna discusión sobre piedras oscilantes. De acuerdo con su paradigma, este era un fenómeno extraordinariamente complejo. Pero los aristotélicos discutían el caso más simple: el de las piedras que caían sin impedimentos no comunes, y en ese caso pueden observarse claramente las mismas diferencias de visión. Aristóteles vio un cambio de estado más que un proceso. Para él, por consiguiente, las medidas pertinentes de un movimiento eran la distancia total recorrida y el tiempo total transcurrido, es decir, parámetros que producen el concepto de velocidad media.

Es importante recordar, que la noción que tenía Aristóteles de la velocidad fue dividida por los escolásticos en conceptos que poco después de Galileo se convirtieron en nuestra velocidad media y velocidad instantánea.

Galileo no fue uno de los primeros hombres que sugirió que las piedras caen con un movimiento uniformemente acelerado. Había desarrollado su teoría sobre ese tema junto con muchas de sus consecuencias antes de llevar a cabo sus experimentos sobre un plano inclinado. Este teorema fue otro del conjunto de nuevas regularidades accesibles al genio en el mundo determinado en conjunto por la naturaleza y por los paradigmas, de acuerdo con los cuales habían sido educados Galileo y sus contemporáneos (Kuhn, 1992).

Se ha denominado a Galileo como el primero de los modernos. Su interés primordial fue descubrir más bien cómo actúan las cosas, que por qué lo hacen. No despreciaba la teoría, pero reconocía que esta debe ajustarse a los resultados de la observación, que los esquemas de la naturaleza no se han establecido para que los comprendamos de forma fácil.

Galileo en su obra publicada en 1638, se enfrentó con el problema de la caída de los cuerpos (Jourdain, 1994) e intentó hallar no por qué cae, sino cómo cae, es decir, en qué forma matemática la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependen del tiempo transcurrido en la caída y el espacio recorrido.

Debido a que los cuerpos en caída libre alcanzaban una velocidad fuera de la capacidad de los instrumentos de medidas de que se disponía entonces, Galileo se aproximó al problema de verificación a través de la gravedad. Demostró que un cuerpo que desciende por un plano inclinado de una altura dada, alcanza una velocidad no ligada con el ángulo de la pendiente, y que su velocidad final es la misma que si hubiera caído a través de la misma altura vertical (Kline, 1972).

A su modo aún primitivo, Galileo planteó la pregunta del modo siguiente: “¿Es v proporcional a s? ¿o es proporcional a t?

Al respecto, Hecht plantea que el investigador moderno preguntará: ¿Qué función es el número v, que representa la velocidad, de los números s y t que representan, respectivamente, la distancia recorrida y el tiempo de caída?

Por su parte, Galileo formuló las hipótesis correspondientes y entonces averiguó por prueba empírica efectiva si las hipótesis eran correctas o no. Una de las hipótesis de Galileo era, pues, que la velocidad adquirida en la caída es proporcional al tiempo de caída.

Para averiguar mediante el experimento si esta hipótesis concordaba o no con los hechos observados, resultaba difícil probar por algún medio directo que la velocidad adquirida fuera proporcional al tiempo de caída; en cambio, era más fácil averiguar la ley según la cual la distancia aumenta con el tiempo (Hecht, 1987).

Galileo dedujo con su hipótesis la relación que debía existir entre la distancia y el tiempo. En la comprobación experimental de la relación de s y t, Galileo se encontró con el problema de que el movimiento de los cuerpos en caída libre es demasiado rápido para que pudiera observarlo de manera exacta con los imperfectos medios de que disponía. No había aún relojes mecánicos a principios del siglo XVII; precisamente fueron los conocimientos dinámicos fundados por Galileo los que posibilitaron la construcción de los relojes mecánicos. Galileo consiguió un movimiento menos rápido, de modo que s y t fueran lo suficientemente grandes como para medirlos con un aparato bastante primitivo, en el cual unas bolas rodaban por planos inclinados (Kline, 1972).

De lo anterior, se concluye que al igual que Galileo, hemos partido de nociones que nos son familiares, a través de la práctica, para llegar a efectuar mediciones de carácter derivado, tales como la velocidad. La medición de la velocidad en el caso en que cambia de un instante a otro es, una ilustración de la formación de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial.

Es evidente que la velocidad de un objeto en movimiento puede cambiar; las variaciones de rapidez y de dirección o de dirección solo, son más la regla que la excepción (Hecht, 1987). Pero, ¿cuál es el concepto que caracteriza el movimiento cambiante?

Bien, está claro que tal noción ha incorporado el cambio en la velocidad, pero, por sí mismo, esto no es suficiente. El cambio real en la velocidad tiene a menudo menor interés inmediato que la razón a que cambia. Lo que en realidad se necesita, entonces, es la razón a la que varía la velocidad con la distancia, por ejemplo, o, quizá, con el tiempo.

La idea básica de la razón de cambio de la rapidez con el tiempo, se remonta a la antigua Grecia (Kline, 1972). Mereciendo un nombre legítimo propio, se le denomina aceleración, y se define mediante la relación:

$$Aceleración = \frac{Cambio\ en\ la\ velocidad}{Tiempo\ transcurrido}$$

Este concepto concluye cambios en rapidez, dirección o en ambos. Según esto, escribamos simbólicamente, la aceleración media como:

$$am = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

La velocidad y la aceleración son cualidades del movimiento, pero el rasgo de la velocidad (y la aceleración) que le da toda su importancia la hace al mismo tiempo (como vimos antes, de acuerdo con el trabajo de Galileo) totalmente insusceptible de medición por el proceso fundamental.

Algo que cuestiona a Campbell es, ¿cómo la mediremos? Pues bien, si la medición significa realmente algo, tiene que haber alguna semejanza importante entre la propiedad medida, por un lado, y las cifras escogidas para representarla, por otro. En la medición de tipo fundamental esa semejanza (o la parte más importante de esta) surge del hecho de que la propiedad es susceptible de adición según las mismas reglas de la adición del número, con el cual las cifras están íntimamente relacionadas. Esa semejanza no se da en nuestro presente caso. ¿Qué semejanza queda?

Lo que queda es una semejanza respecto del “orden”. En virtud de su uso para representar números, las cifras se caracterizan por un orden determinado; están convencionalmente dispuestas en una serie de secuencia determinada: “2” sigue a “1” y precede a “3”; “3” sigue a “2”, y precede a “4“, y así sucesivamente (Campbell, 1994).

El orden es, característico de las cifras; pero también característico de las propiedades representadas por cifras del modo que vamos a considerar ahora; este es el rasgo que hace significativa la nueva “medición”. Así, en nuestro ejemplo, los cuerpos experimentan un orden natural de velocidad que es independiente de cualquier medición efectiva. Podemos utilizar las expresiones “más veloz” y “menos veloz” para su aplicación a cuerpos en movimiento, diciendo que el cuerpo A es “menos veloz” que el cuerpo B, y B “menos veloz” que A.

Este tipo de determinación merece ser analizado con la óptica de Gastón Bachelard en cuanto a la identificación de los obstáculos del conocimiento cuantitativo. Bachelard (1982) expresa que *“es preciso cuidarse de caer en el exceso de precisión en el reino de la cantidad, o en el exceso de lo pintoresco en el reino de la cualidad”*, y las apreciaciones referentes al orden pueden presentar anomalías.

Continuando con el enfoque de ciencia de Galileo, este, como Descartes, estaba convencido de que la naturaleza estaba diseñada matemáticamente. Su afirmación de 1610 es famosa:

> *La filosofía [naturaleza] está descrita en ese gran libro que siempre está delante de nuestros ojos —quiero significar universo— pero que no podemos entender si no aprendemos primero el lenguaje, y comprendemos los símbolos, en los que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender ni una palabra de él, sin lo cual se deambula en vano a través de un oscuro laberinto* (Kline, 1972).

Esto hace comprensible porqué, tanto Galileo como Descartes simplificaron mil fenómenos y cualidades para concentrarse en la materia y el movimiento, propiedades que pueden ser descritas matemáticamente. Quizá no es muy sorprendente que en el siglo en el que los problemas de movimiento eran los más prominentes y serios, los científicos encontraran que el movimiento era un fenómeno físico fundamental.

La concentración en la materia y el movimiento fue solo el primer paso en el nuevo enfoque de la naturaleza de Galileo. Su siguiente pensamiento, también expresado por Descartes, fue que cualquier rama de la ciencia puede ser configurada sobre el modelo de las matemáticas.

Lo anterior implica dos pasos esenciales que caracterizan el paradigma dominante. Por una parte, el hecho de que las matemáticas comienzan con axiomas —verdades claras y autoevidentes— y a partir de ellos se pasa a establecer nuevas verdades mediante razonamientos deductivos, por tanto, cualquier rama de la ciencia debe comenzar con axiomas o principios y continuar deductivamente. En segundo lugar, se debe extraer de los axiomas tantas consecuencias como sea posible.

Esta visión se remonta a Aristóteles, quien también buscaba una estructura deductiva para la ciencia, con el modelo matemático en mente, lo cual muestra que, evidentemente, como lo plantea Hermann Hankel citado por Kline (1972): *“En la mayoría de las ciencias una generación destruye lo que otra ha construido y lo que una ha establecido otra lo deshace. Solo en matemáticas cada generación añade un piso nuevo a la antigua estructura.”* Pues, si bien, Galileo y Descartes conservaban características del pensamiento matemático heredadas de Aristóteles, Galileo se separó radicalmente de los griegos, de los científicos medievales e incluso de Descartes en su método para obtener primeros principios, respecto al mundo físico.

Los pregalileanos y Descartes habían creído que la mente proporcionaría los principios básicos; no había más que pensar en cualquier clase de fenómenos y la mente reconocería de inmediato las verdades fundamentales. Este poder de la mente se ponía claramente de manifiesto en las matemáticas.

Galileo decidió que, en física, en contraposición a lo que ocurría en matemáticas, los primeros principios deben proceder de la experiencia y de la experimentación. Algunos pensadores del Renacimiento, y el contemporáneo de Galileo y Francis Bacon, habían llegado a la conclusión de que la experimentación era necesaria; en este aspecto particular de su nuevo método, Galileo no estaba por delante de los demás. Sin embargo, el modernista Descartes no vio la sabiduría de la confianza de Galileo en la experimentación.

Los hechos que provienen de los sentidos, decía Descartes, solo pueden conducir al engaño, pero la razón penetra a través de esos engaños. Desde los principios generales innatos que proporciona la mente podemos deducir fenómenos particulares de la naturaleza y comprenderlos (Laudan, 1979).

Galileo también era consciente de que se podía obtener principios incorrectos mediante la experimentación y que, como consecuencia, las deducciones que se basaran en ellos eran incorrectas. Por ello propuso el empleo de los experimentos para comprobar las conclusiones de sus razonamientos, así como para obtener principios básicos (Kline, 1972).

Galileo era, en realidad, una figura de transición por lo que se refiere a la experimentación. Él, con Isaac Newton cincuenta años más tarde, creía que unos pocos experimentos claves o críticos podrían proporcionar principios fundamentales correctos. Muchos de los llamados experimentos de Galileo eran en realidad experimentos mentales, es decir, confiaba en la experiencia común para imaginar lo que ocurriría si se realizara un experimento. Entonces él obtenía una conclusión con la misma confianza que si hubiera realizado el experimento.

Cuando describe Galileo el movimiento de una bola arrojada desde el mástil de un barco en movimiento, a uno de los personajes en el *Diálogo* (Galilei, 1994), Simplicio le pregunta si había realizado un experimento y Galileo le contesta: “No, y no lo necesito, porque sin ninguna experiencia puedo confirmar que es así, ya que no puede ser de otra manera.” Dice, de hecho, que experimentaba pocas veces, y sobre todo en esos casos, para refutar a quienes no se interesaban por las matemáticas.

Kline sostiene que aunque Newton realizó algunos famosos e ingeniosos experimentos, también dice que los utilizaba para hacer sus resultados físicamente inteligibles y para convencer a la gente.

La verdad del asunto de Galileo, al parecer se confirma por el hecho de que tenía algunas ideas preconcebidas acerca de la naturaleza, lo que le hacía confiar en que unos pocos experimentos bastarían. Creía, por ejemplo, que la naturaleza era sencilla. Por tanto, cuando consideraba cuerpos que caían libremente, los cuales caen con velocidad creciente, suponían que el aumento de la velocidad es el mismo en cada segundo de caída. Esta era la “verdad” más sencilla. Creía también que la naturaleza está diseñada matemáticamente y, por tanto, cualquier ley matemática que pareciera estar de acuerdo con ella, aun sobre la base de una experimentación bastante limitada, le parecía correcta

(Kline, 1972).

Hasta aquí el análisis epistemológico ha conducido a observar que en la ciencia existen paradigmas que caracterizan momentos relevantes de su desarrollo, sin embargo, teniendo en cuenta las ideas de Larry Laudan, los paradigmas de Kuhn, o “matrices disciplinares”, están siempre implícitos, nunca articulados por completo. En consecuencia, es difícil comprender cómo puede dar razón de las muchas controversias teóricas que se han producido en el desarrollo de la ciencia, dado que los científicos pueden solo debatir acerca de supuestos que se han explicitado en cierta medida (Laudan, 1979).

Programa de investigación

Otra perspectiva epistemológica acerca de la evolución de la ciencia procede de los planteamientos de Imre Lakatos (1978), quien ha desarrollado una posición alternativa que denominó programa de investigación.

Los programas de investigación consisten en teorías generales constituidos por tres elementos (Laudan, 1979):

1. Un núcleo sólido (o heurística negativa) de supuestos fundamentales que no pueden ser abandonados o modificados sin el rechazo del programa de investigación.

2. La heurística positiva, que contiene un conjunto parcialmente articulado de indicaciones o pistas sobre cómo cambiar, modificar, sofisticar, nuestras teorías específicas siempre que deseemos mejorarlas.

3. Una serie de teorías, en la que cada teoría resulta de añadir cláusulas auxiliares a la teoría anterior.

Continuando con la reflexión sobre el trabajo de Galileo, desde la perspectiva epistemológica de Lakatos, se puede afirmar que el primer avance matemático que se obtuvo de las investigaciones científicas realizadas de acuerdo con el programa de investigación de Galileo provino del estudio del movimiento, aspecto que absorbió a los científicos y matemáticos del siglo XVII.

Por ejemplo, según la teoría heliocéntrica la Tierra giraba sobre sí misma y efectuaba un movimiento de revolución en torno al Sol. ¿Por qué entonces deberían los objetos permanecer en ella? ¿Por qué los objetos que se tiran deberían caer hacia la Tierra, si esta ya no era el centro del universo?

Además, todos los movimientos terrestres, como el de los proyectiles, parecían producirse como si la Tierra estuviera en reposo, emergiendo también un problema más específico: ¿Cómo diseñar métodos más precisos para medir el tiempo?

Al abordar la reflexión a la luz de la perspectiva de los programas de investigación (Lakatos, 1978), el segundo elemento denominado heurística positiva facilita la interpretación de la evolución del estudio del movimiento y la comprensión del proceso a través del cual obtuvieron las matemáticas un concepto fundamental, que fue central en prácticamente todo el trabajo de los siguientes 200 años: el concepto de función o relación entre variables.

El programa de investigación de Galileo se caracteriza por expresar sus relaciones funcionales en palabras y en el lenguaje de las proporciones. En su trabajo sobre el movimiento establece que los espacios descritos por un cuerpo que cae desde el reposo con un movimiento uniformemente acelerado están, unos con respecto a otros, en la relación de los cuadrados de los tiempos empleados en atravesar esas distancias. En síntesis, Kline afirma que los tiempos de descenso a lo largo de planos inclinados de la misma altura, pero de diferentes pendientes, están unos con respecto a los otros en la relación de las longitudes de esos planos.

Para Morris Kline en su obra *El pensamiento matemático*, el lenguaje muestra claramente que está tratando con variables y funciones; no faltaba más que un paso para escribir estas frases en forma simbólica. Como el simbolismo del álgebra se estaba extendiendo en ese momento, la afirmación de Galileo sobre los espacios descritos por un cuerpo que cae pronto se escribió como:

$$s = kt^2$$

Muchas de las funciones introducidas durante el siglo XVII fueron estudiadas en primer lugar como curvas, antes de que el concepto de función fuera totalmente identificado. Eso ocurrió con las funciones trascendentes elementales como:

$$\log x,\ sen\ x,\ \text{y}\ a^x$$

Se destaca además, la introducción de las antiguas y las nuevas curvas con movimientos. Galileo, que había demostrado que la trayectoria de un proyectil disparado en el aire formando un ángulo con respecto al suelo es una parábola, consideró también la curva como el lugar geométrico de un punto móvil (geometría dinámica).

Kline sostiene que “en Vieta se encuentra un excelente aporte en el proceso evolutivo de dichos conceptos con su contribución en la introducción de un simbolismo algebraico consistente”. Por ejemplo, Galileo descubrió la ley cuadrática de caída libre de los cuerpos, según la cual la caída s de un cuerpo que cae libremente en el vacío es una función cuadrática del tiempo t, transcurrido desde cuando se le soltó. (Kline, 1972), la expresión (1) da cuenta de ello:

$$s = {}^{1}\!/_{2}\ gt^2 \qquad (1)$$

Siendo g una constante que tiene el mismo valor para todo cuerpo en el mismo lugar de la Tierra.

Mediante esta ley, Galileo convirtió una ley natural contenida en el movimiento efectivo de los cuerpos en una función matemática construida *a priori*, y esto es lo que la física intenta conseguir con todo fenómeno (Kline, 1972). Esa ley ha sido trazada por la naturaleza, la cual parece establecer sus planos con una fina sensibilidad para con la sencillez matemática y la armonía. El trabajo de Galileo es un ejemplo de cómo la matematización de los conceptos físicos representaron un gran avance hacia la madurez de la ciencia.

Ahora, se requiere considerar los siguientes rasgos característicos del proceso de modelización matemática:

1. Variables, como t y s de la expresión (1), cuyos valores posibles pertenecen a un campo, que es aquí el de los números reales, y que podemos repasar enteramente porque es un campo nacido de nuestra propia y libre construcción.

2. La representación de esas variables por símbolos.

3. Funciones, proyecciones o representaciones, construidas *a priori* del campo de la variable t sobre el campo de la variable s, en la cual el tiempo es la variable independiente.

Por otra parte, al estudiar una función hay que dejar que la variable independiente recorra todo su campo. Una conjetura acerca de la interdependencia de cantidades de la naturaleza puede examinarse en el pensamiento, incluso antes de someterla a la prueba de la experiencia, por el procedimiento de estudiar si se cumple a través de todo el campo de las variables independientes. A veces algunos casos límites revelan sin más que una conjetura es insostenible (Kline, 1972).

Este tipo de razonamiento confirma la necesidad de vincular el “pensamiento matemático” con los procesos de razonamiento llevados a cabo en la formación de conceptos en las ciencias naturales, que para efectos de este estudio se refieren al campo de la física, y que a través de metodologías de modelización facilitan el abordaje de problemas empíricos y conceptuales, soportados en la comprensión epistemológica de la formación del pensamiento científico.

Concluyendo desde nuestro ejemplo de base, cuando se trabaja con variables, como t y s de la expresión (1), los valores posibles pertenecen a un campo, que es aquí el de los números reales, y se pueden repasar enteramente porque es un campo nacido de nuestra propia y libre construcción, esto facilita la representación de esas variables por símbolos y el empleo de funciones o proyecciones o representaciones, construidas *a priori*, que a través de metodologías de modelización enriquecen la comprensión.

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

Capítulo 2.

De las teorías a las tradiciones de investigación: la epistemología como referente en la conceptualización de la función

Como reflejo de las propiedades generales de los conceptos abordados en el estudio de la función desde el movimiento, el concepto de cambio aparece en la matemática junto a los de magnitud variable y función, y fue esta extensión capital del objeto de la matemática lo que determinó la transición a una nueva etapa: a la matemática de las magnitudes variables.

La ley del movimiento de un cuerpo en una trayectoria dada —por ejemplo, a lo largo de una línea recta— viene definida por el modo en que la distancia recorrida por el cuerpo aumenta con el tiempo.

Así, Galileo (1564-1542) descubrió la ley de la caída de los cuerpos, estableciendo que la distancia recorrida en la caída crece proporcionalmente al cuadrado del tiempo. Este hecho se expresa por la conocida expresión:

$$s = {}^{1}/_{2}\, gt^{2}$$

En general, la ley del movimiento expresa la distancia recorrida en el tiempo t. El tiempo t y la distancia s son, respectivamente, las variables “independiente” y “dependiente”, y el hecho de que a cada instante t le corresponde una distancia definida s, se expresa diciendo que la distancia s es función del tiempo t.

Los conceptos matemáticos de variable y función son generalizaciones abstractas de variables concretas (tales como tiempo, distancia, velocidad, ángulo de rotación y área de una superficie barrida), y de las interdependencias entre ellas (la distancia depende del tiempo, etc.).

Igual que el concepto de número real es la imagen abstracta del valor real de una magnitud arbitraria, así, una variable es la imagen abstracta de una magnitud que varía, lo que supone distintos valores durante el proceso en consideración. Una variable matemática x es “algo” o más exactamente “cualquier cosa”, que puede tomar distintos valores numéricos. Este es el sentido general de variable; en particular podemos entender por ella, el tiempo, la distancia o cualquier otra magnitud variable (Kline, 1972).

Exactamente del mismo modo, una función es la imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra. En la matemática, la afirmación de que “y” es función de “x” únicamente significa que a cada posible valor de “x” le corresponde un valor definido de “y”. Esta correspondencia entre los valores de “y” y los valores de “x” se llama: función.

Además de la relación entre la distancia y el tiempo en la ley de caída de los cuerpos, se encuentran otras situaciones que ejemplifican este tipo de situaciones.

1. La energía de un cuerpo que cae se expresa por su masa y su velocidad, de acuerdo con la expresión:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

Es decir, para un cuerpo dado la energía (E) es función de la velocidad v.

2. La cantidad de calor generada en un conductor en la unidad de tiempo al paso de una corriente eléctrica, se expresa por:

$$Q = \frac{RI^2}{2}$$

Significa que para una resistencia dada R a cada intensidad de corriente I, le corresponde una cantidad definida de calor Q generado en la unidad de tiempo. Esto es, Q es función de I.

Estas expresiones se pueden resumir así:

$$y = \frac{1}{2}\, x^2$$

La expresión general representa el paso de las magnitudes variables concretas s, t, Q, E, v, etc., a las variables generales x e y, y de las relaciones concretas anteriores, a la forma general $y = \frac{1}{2}\, x^2$

En mecánica y electricidad se utilizan expresiones concretas que relacionan magnitudes concretas, mientras que la teoría matemática de las funciones opera con la expresión general, sin asociarla con ninguna magnitud determinada.

El siguiente grado de abstracción en el proceso de conceptualización permite examinar la correspondencia general de y con x, expresada en la forma abstracta:

$$y = f(x)$$

Esta expresión establece que la magnitud y es, de modo general, función de x; esto es, cada valor dado de la x se corresponde de una manera o de otra con un valor definido de la y.

Tradición de investigación cartesiana

En la perspectiva epistemológica de tradiciones de investigación, un importante aporte en este proceso surge de Descartes a partir del establecimiento de las bases de la geometría analítica. Las ideas básicas de Descartes son las siguientes:

En algebra si nos dan la ecuación: $x^2 + y^2 = a^2$ la x y la y se consideran como incógnitas.

Como la ecuación no permite determinarlas, ésta no ofrecía ningún interés especial. Sin embargo, Descartes no consideró x e y como incógnitas por obtener de la ecuación inicial, sino como variables; de este modo la ecuación expresa la interdependencia de dos variables. Tal ecuación puede escribirse en forma general, pasando todos los términos al primer miembro:

$$f(x, y) = 0$$

Afirma Morris Kline que Descartes introdujo también en el plano las coordenadas x, y que ahora llamamos cartesianas. De este modo, a cada par de valores x e y corresponde un punto y, recíprocamente, a cada punto corresponde un par de coordenadas x, y.

Así, la ecuación $f(x, y) = 0$ determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ representa una circunferencia de radio a y centro en el origen.

Fermat y Descartes se hallaban inmersos en el trabajo científico, siendo, por ello, plenamente conscientes de la necesidad de métodos cuantitativos, y la impresión que causó en ambos la potencia del álgebra hizo que se volcaran a la aplicación de esta al estudio de la geometría. La disciplina que crearon fue la llamada geometría de coordenadas o analítica, y su idea central de asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies es una de las vetas más ricas y fructíferas del pensamiento matemático que jamás se haya encontrado (Kline, 1972).

La motivación de Fermat y Descartes se hallaba en las necesidades de la ciencia y en su interés por la metodología caracterizando una tradición de investigación, a la cual llegó por tres vías: 1. la filosofía, 2. el estudio de la naturaleza y 3. el interés por los usos de la ciencia.

Descartes encontró en las matemáticas el método para establecer la verdad en cualquier campo. Estas le atraían porque las pruebas basadas en sus axiomas eran irrefutables y la autoridad no contaba para nada. Las matemáticas proporcionaban el método para llegar a las verdades y para demostrarlas efectivamente, y era evidente que dicho método trascendía a su materia de estudio. Se dedicó a aplicar dicho método a la geometría, emprendiendo la aplicación del álgebra a la geometría.

La geometría analítica resultó ser una herramienta de doble uso para las matemáticas. Por una parte, los conceptos geométricos podían formularse de forma algebraica y los objetivos geométricos podían alcanzarse por medio del álgebra. Recíprocamente, al interpretar de manera geométrica los enunciados algebraicos puede lograrse una visión más intuitiva de su significado, lo cual puede, a su vez, ser fuente de nuevas conclusiones. La inmensa potencia que ha desarrollado la matemática desde el siglo XVII en adelante debe atribuirse, en gran medida, a la geometría analítica (Kline, 1972).

El mérito más importante de la geometría analítica fue dotar a la ciencia del utillaje matemático que siempre había necesitado y que había empezado a exigir abiertamente en el siglo XVII: herramientas cuantitativas. No hay duda de que el mundo físico pide, en una primera etapa, geometría, pues *"tornar geométrica la representación, vale decir, dibujar los fenómenos y ordenar en serie los acontecimientos decisivos de la experiencia, he ahí la primera tarea en la que se funda el espíritu científico"* (Bachelard, 1982).

Sin embargo, esta tarea de geometrización termina siempre por revelarse insuficiente. El papel de la matemática y la física contemporánea sobrepasa pues notablemente la simple descripción geométrica. La ciencia de la realidad busca el por qué matemático.

La geometría analítica posibilitó la expresión de formas y trayectorias en forma algebraica, de la cual se podía extraer información cuantitativa. Hacia 1600, los científicos europeos estaban indudablemente impresionados por la importancia de las matemáticas en el estudio de la naturaleza.

En el siglo XVII, Descartes y Galileo revolucionaron la misma naturaleza de la actividad científica. Seleccionaron los conceptos que debía utilizar la ciencia, redefinieron los objetivos de la actividad científica y alteraron el método de la ciencia. Su reformulación no solo suministró una potencia inesperada y sin precedentes a la ciencia, sino que la ligó indisolublemente a las matemáticas (Kline, 1972).

Descartes proclamó explícitamente que la esencia de la ciencia eran las matemáticas. Dice que: *"Ni admite ni espera ningún principio de la física diferente de los que están en la geometría o en la matemática abstracta, porque así se explican todos los fenómenos de la naturaleza y pueden darse algunas demostraciones de ellos"* (Kline, 1972).

La tradición de investigación cartesiana explicó con más detalles que el mundo debe ser accesible y reducible a las matemáticas. Insistió en que las propiedades más fundamentales y fiables de la materia son forma, extensión y movimiento en el espacio y en el tiempo.

Como la forma es solo extensión, Descartes afirmaba: *"dadme extensión y movimiento y construiré el universo".* El movimiento en sí se producía por la acción de las fuerzas sobre las moléculas. Descartes estaba convencido de que estas fuerzas obedecían a las leyes matemáticas invariables y, puesto que la extensión y el movimiento eran expresables matemáticamente, todos los fenómenos podían ser descritos de la misma forma.

Según Morris Kline, los escritos de Descartes fueron altamente influyentes; su filosofía deductiva y sistemática se extendió en el siglo XVII; esta tradición de investigación impresionó a Newton, en especial por la importancia del movimiento en ella.

Recordemos que

> *Una tradición de investigación es un conjunto de supuestos generales acerca de las entidades y los procesos de un ámbito de estudio, y acerca de los métodos apropiados que deben ser utilizados para investigar los problemas y construir las teorías de ese dominio* (Laudan, 1979).

Por tanto, es relevante tener en cuenta los aportes del cartesianismo como tradición de investigación en el desarrollo del pensamiento científico.

Como toda tradición de investigación está asociada a una serie de teorías específicas, cada una de las cuales está ideada para concretar la ontología de la tradición de investigación e ilustrar, o satisfacer su metodología, y tiene como función proporcionar las herramientas decisivas que se necesitan para resolver problemas, tanto empíricos como conceptuales; su contribución al trabajo científico la lleva hasta a definir parcialmente cuáles son los problemas y qué importancia se les debe asignar.

Se hace necesario recalcar que, en la tradición de investigación cartesiana, la ontología matemática (una ontología que sostenía que todos los cambios físicos son solo cambios de cantidad) estaba estrechamente conectada con la metodología deductiva y axiomática (de inspiración matemática) del cartesianismo (Laudan, 1979).

Aspecto que debe ser considerado cuando se ejecuten acciones que empleen criterios de trabajo orientados por esta tradición.

Para Laudan, la tradición de investigación cartesiana especifica que solo existen la mente y la materia, y que las teorías que hablan de otros tipos de sustancias (o de la mente y la materia “mezcladas”) son inaceptables. Dicha tradición de investigación perfila los distintos modos como estas entidades pueden interactuar. Así, las partículas cartesianas solo pueden interactuar por contacto, no por acción a distancia. Además, como la tradición identificaba la materia con el espacio, prohibía los espacios vacíos.

Es importante destacar la separabilidad de las teorías de las tradiciones de investigación: casi toda la actividad teórica tiene lugar dentro del contexto de una tradición de investigación. Se sabe que dichas tradiciones limitan, inspiran y sirven para justificar las teorías bajo ellas subsumidas; sin querer negar nada de ello, es igualmente importante reconocer que hay circunstancias en que las teorías pueden desgajarse de las tradiciones de investigación que, inicialmente, las inspiraron o justificaron (Laudan, 1979).

Por ejemplo, así como los aristotélicos, en determinados momentos abandonaron la doctrina aristotélica de que el movimiento en el vacío es imposible, en ciertos momentos algunos cartesianos rechazaron la identificación cartesiana de materia y extensión.

Tradición de investigación galileana

La teoría galileana de la caída de los cuerpos ha sido desde 1650 considerada independientemente de la tradición de investigación galileana (Laudan, 1979). Galileo, sin embargo, obtuvo unos pocos principios a partir de la experiencia, y en este trabajo también su enfoque fue una ruptura radical con respecto al de sus predecesores; pensaba que se debe penetrar en lo que es fundamental en los fenómenos y comenzar allí.

En *Dos nuevas ciencias* citado por Newman (1994), Galileo sostiene que no es posible tratar la variedad infinita de pesos, formas y velocidades. Había observado que las velocidades con las que caen objetos disímiles difieren menos en el aire que en el agua. Por lo tanto, cuanto más ligero sea el medio hay menos diferencias entre las velocidades de caída de los cuerpos. *"Habiendo observado esto, vino a mí la conclusión de que en un medio totalmente desprovisto de resistencia todos los cuerpos caerían con la misma velocidad"*. Lo que Galileo estaba haciendo aquí era separar los efectos incidentales o sin importancia en un esfuerzo por llegar al principal.

Por supuesto que los cuerpos reales caen en un medio resistente. ¿Qué podría decir Galileo acerca de esos movimientos? Su respuesta fue:

> Para *manejar este asunto de una forma científica es necesario prescindir de estas dificultades (resistencia del aire, fricción, etc.) y, habiendo descubierto y demostrado los teoremas en el caso en que no hay resistencia, utilizarlos y aplicarlos con las limitaciones que nos muestre la experiencia* (Kline, 1972).

Habiendo prescindido de la resistencia del aire y de la fricción, Galileo buscaba leyes básicas del movimiento en el vacío. Por tanto, no solo contradecía a Aristóteles e incluso a Descartes por pensar en cuerpos moviéndose en un espacio vacío, sino que hacía precisamente lo que hace el matemático al estudiar figuras reales. El matemático prescinde de la estructura molecular, del color y del grosor de las líneas, para llegar a algunas propiedades básicas y concentrarse en ellas.

Así se introdujo Galileo en los factores físicos básicos. A diferencia de los aristotélicos y de los últimos científicos medievales, que se habían anclado en la consideración de cualidades que estimaban fundamentales, y estudiaban la adquisición y pérdida de estas, o debatían su significado, Galileo propuso buscar axiomas cuantitativos.

El conocimiento de la naturaleza que buscaba Galileo era descriptivo. Dice en *Dos nuevas ciencias* que la causa de la aceleración del movimiento de los cuerpos que caen no es una parte necesaria de la investigación (Kline, 1972). Más en general, afirma que investigará y demostrará algunas de las propiedades del movimiento sin considerar cuáles pueden ser sus causas. La búsqueda científica positiva iba a separarse de las cuestiones de motivación última, e iba a abandonarse la especulación sobre las causas físicas.

Según Kline (1972), incluso Descartes había protestado ante la decisión de Galileo de buscar fórmulas descriptivas, al expresar: *"Todo lo que dice Galileo acerca de los cuerpos que caen en el espacio vacío está construido sin cimientos, debería haber determinado primero la naturaleza del peso"*. Además, decía Descartes, Galileo debería reflexionar sobre las razones últimas. Sin embargo, la decisión de Galileo de buscar la descripción fue la idea más profunda y fructífera que se haya podido tener sobre el método científico.

Galileo escogió un conjunto de conceptos enteramente nuevo, el cual, además, era medible, de modo que sus medidas podían relacionarse mediante fórmulas. Algunos de ellos son: distancia, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, masa y peso.

Tradición de investigación newtoniana

Newton durante la segunda mitad el siglo XVII, al sentar las bases del cálculo diferencial e integral, dio un paso significativo en este proceso evolutivo del pensamiento científico. Este fue el comienzo del análisis, puesto que el objeto de este cálculo son las propiedades de las funciones mismas, distinto del objeto de la geometría analítica, que son las figuras geométricas.

Las matemáticas se hicieron importantes en la metodología científica y se aprovecharon tanto de su adopción, que el Programa de Galileo fue aceptado por gigantes como Newton, quien afirmaba que se necesitan los experimentos para obtener leyes básicas. También es claro para él que la función de la ciencia después de haber obtenido algunos principios básicos es deducir nuevos hechos a partir de esos principios. En el prefacio de sus *Principia*, dice:

> *Puesto que los científicos (como nos dice Pappus) valoraban la ciencia de la mecánica como de la mayor importancia en la investigación de las cosas naturales, y los modernos, rechazando las formas substanciales y las cualidades ocultas, se han esforzado por someter los fenómenos de la naturaleza a las leyes de las matemáticas, en este tratado he cultivado las matemáticas hasta donde se relacionan con la filosofía (ciencia)... y, en consecuencia, presento este trabajo como los principios matemáticos de la filosofía porque la auténtica carga de la filosofía parece consistir en esto, a partir de los fenómenos del movimiento, investigar las fuerzas de la naturaleza y, entonces, mediante esas fuerzas mostrar los otros fenómenos..."* Newton citado por Kline (1972).

Los principios matemáticos para Newton y Galileo eran principios cuantitativos. El primero de ellos afirma en los *Principia* que su propósito es descubrir y establecer la forma exacta en la que *"todas las cosas han sido ordenadas en medida, número y peso".*

La ciencia se hizo muy dependiente de las matemáticas, casi subordinada a ellas. Fueron los científicos quienes extendieron el campo y las técnicas de las matemáticas, y la multiplicidad de problemas que suministró la ciencia proporcionó a los matemáticos muchas y más profundas direcciones de trabajo creativo.

Como los problemas científicos son de naturaleza empírica y conceptual, una manifestación de estos últimos se identifica cuando Newton anunció su “sistema del mundo”, recibiendo el aplauso casi universal por su capacidad para resolver muchos problemas cruciales. Lo que preocupaba a muchos de los contemporáneos de Newton (entre los que se encontraban Locke, Berkeley, Huygens y Leibniz) eran algunas ambigüedades y confusiones conceptuales en sus supuestos fundamentales: ¿Qué era el espacio absoluto y por qué se necesitaba de él para hacer física?

Newton en sus *Principia* (1686) citado por Kline (1972) afirma: *“no defino el tiempo, el espacio, la posición y el movimiento, ya que son bien conocidos de todos”.* Y efectivamente estamos familiarizados con el movimiento en todas sus manifestaciones, pero tenemos problemas cuando se nos pide definirlo.

Lo más probable es que formulemos una definición de movimiento. Por ejemplo, la frase puede ser: “un cambio de posición con el tiempo” o alguna equivalente a esta para expresar la idea central. Parece que la capacidad humana para dar cualquier descripción precisa del movimiento depende, esencialmente, de los conceptos separados de espacio y tiempo. Decimos que un objeto está moviéndose si ocupa posiciones diferentes en instantes distintos. Todos crecemos siendo buenos newtonianos, en el sentido de que nuestras ideas intuitivas sobre espacio y tiempo están en total armonía con las de Newton (Kline, 1972).

El espacio para Newton es absoluto, en el sentido de que existe permanente e independientemente de que haya alguna materia en él o moviéndose a través de él. Citando las propias palabras de Newton en los *Principia*: *“El espacio absoluto, en su estado natural, sin relación con nada externo permanece siempre igual e inamovible”.*

El espacio es así una especie de matriz tridimensional estacionaria en la cual pueden existir objetos y por medio de la cual estos pueden moverse sin que se produzca ninguna interacción entre el espacio y el objeto. En el universo cada objeto existe como un punto particular en el espacio y en el tiempo. Un objeto en movimiento experimenta un cambio continuo de su posición con el tiempo. Desde esta perspectiva el espacio está ahí, y nosotros simplemente tenemos la tarea de colocarle marcas. Además, nuestras medidas físicas están de acuerdo con la geometría euclidiana, por lo que el espacio se considera también euclidiano.

En conclusión, el espacio newtoniano es: 1. Homogéneo, teniendo en cuenta que es infinito, continuo, pasivo o de inacción causal, independiente, con relatividad en la posición, de divisibilidad infinita e isotropía. 2. Euclídeo. 3. Tridimensional. 4. Inmutable.

El tiempo para Newton es también absoluto y discurre sin relacionarse con ningún suceso o hecho físico. Citando otra vez los *Principia*: *“El tiempo absoluto, real y matemático, por sí, desde su propia naturaleza discurre igualmente sin relación con ninguna cosa externa, y por otro nombre se le llama ‘duración’”.* El lenguaje es elegante pero deliciosamente oscuro. Como dijo Newton en la cita primera de este documento, él no intentó definir ni el espacio ni el tiempo.

No se puede ni acelerar el tiempo ni frenarlo y este discurrir del tiempo es uniforme con todo el universo.

En conclusión, el tiempo newtoniano es: 1. Homogéneo, puesto que es uniforme, independiente, continuo, presenta relatividad en los intervalos, e inacción causal. 2. Unidimensional. 3. Sucesivo.

El espacio y el tiempo, aunque completamente independiente uno del otro, están interrelacionados de tal forma, que consideramos imposible que existan objetos en el espacio durante ningún tiempo. O que existan durante un tiempo finito, pero “entre ninguna parte” del espacio. Los dos, el espacio y el tiempo, se consideran como infinitamente visibles sin tener estructura final.

Los párrafos anteriores describen, en lenguaje corriente, algunas nociones de sentido común sobre la naturaleza del espacio y el tiempo. Encajados en estas nociones hay algunas consideraciones que se adoptan bien, a sabiendas o inconscientemente, para el desarrollo de nuestra imagen del universo. Por esto es fascinante, aunque instintivamente parece correcto, que muchas de estas ideas proporcionan consecuencias que son inconsistentes con la experiencia.

El primer hecho aparente se relaciona con los movimientos a velocidades más altas, cercanas o casi iguales a la de la luz, y con los fenómenos del electromagnetismo; y fue Einstein en su desarrollo de la teoría de la relatividad especial, quien expuso algunas de las más importantes limitaciones de las ideas clásicas, incluyendo las ideas propias de Newton sobre la relatividad, y entonces demostró cómo necesitaban ser modificadas, especialmente en lo referente al concepto de tiempo.

Con el fin de tener una mayor amplitud conceptual con respecto al espacio y al tiempo, se considerarán los siguientes puntos de vista filosóficos (Rosental, 1946):

Tiempo y espacio: formas básicas de la existencia de la materia. Lo que ante todo interesa a la filosofía es si el tiempo y el espacio son reales o constituyen puras abstracciones existentes solo en la conciencia del hombre.

Rosental (1946) expresa que los filósofos idealistas niegan el carácter objetivo del tiempo y el espacio: los sitúan en dependencia del contenido individual de la conciencia (Berkeley, Hume, Mach), los ven como formas apriorísticas de la contemplación sensorial (Kant) o como categorías del espíritu absoluto (Hegel).

El materialismo reconoce el carácter objetivo del tiempo y el espacio, niega la realidad fuera del uno y del otro. El tiempo y el espacio son inseparables de la materia. En esto se revela su universalidad y su generalidad.

El espacio es tridimensional, el tiempo una dimensión y solo una; el primero expresa el orden en que están dispuestos simultáneamente objetos que coexisten; el segundo, en cambio, expresa la sucesión en que van existiendo los fenómenos que se sustituyen unos a otros. El tiempo es irreversible, o sea, todo proceso material se desarrolla en una dirección, del pasado al futuro.

El avance de la ciencia natural ha demostrado la inconsistencia de la concepción metafísica, según la cual el tiempo y el espacio existen con independencia de los procesos materiales y cada uno de por sí.

El materialismo dialéctico no parte del simple nexo del tiempo y el espacio con la materia en movimiento, sino que el movimiento constituye la esencia del tiempo y el espacio y, por ende, la materia, el movimiento, el tiempo y el espacio son inseparables. Esta idea ha sido confirmada por la física moderna.

La ciencia natural de los siglos XVIII y XIX, a la vez que reconocía el carácter objetivo del tiempo y del espacio, los consideraba, siguiendo a Newton, separados uno del otro y como algo independiente, con existencia por completo aparte de la materia y del movimiento. En concordancia con las concepciones atomísticas de los filósofos clásicos de la naturaleza (Demócrito, Epicuro), los naturalistas casi hasta el propio siglo XX identificaban el espacio con el vacío, lo consideraron como algo absoluto, siempre y en todas partes igual e inmóvil, mientras que concebían el tiempo como fluyendo uniformemente.

La física moderna ha desechado las viejas representaciones del tiempo y el espacio como recipientes vacíos y ha demostrado la profunda interconexión existente entre ambos y la materia en movimiento. La principal conclusión de la teoría de la relatividad de Einstein estriba, precisamente, en establecer que el tiempo y el espacio no existen de por sí, al margen de la materia, sino que se encuentran en una interconexión universal de tal naturaleza, que en ella pierden su independencia y aparecen como partes relativas de un espacio-tiempo único e indivisible.

La ciencia ha establecido con exactitud que el curso del tiempo y la extensión de los cuerpos dependen de la velocidad con que dichos cuerpos se mueven, y que la estructura o las propiedades geométricas del continuo tetradimensional (espacio- tiempo) cambian dependiendo de la acumulación de masas de substancia y del campo de gravitación por ellas engendrado.

Han influido mucho en la formación de las modernas teorías del espacio y el tiempo las ideas de Lobachevski, Riemann, Gauss y Bolyai. El descubrimiento de la geometría no euclidiana refutó la doctrina kantiana sobre el tiempo y el espacio como formas extraexperimentales de la percepción sensorial.

Las investigaciones de Bútlerov, Fiódorov y sus sucesores han revelado la dependencia en que se encuentran las propiedades espaciales respecto a la naturaleza física de los cuerpos materiales. Han descubierto que las propiedades físico-químicas de la materia están condicionadas por la disposición espacial de los átomos. Veía el quimismo como una de las manifestaciones del movimiento de la materia.

El hecho de que varíen nuestras representaciones acerca del tiempo y el espacio es utilizado por el idealismo filosófico y el “físico” para negar la realidad objetiva de aquellos.

Según el materialismo dialéctico, el conocimiento humano proporciona una representación cada vez más profunda y correcta del tiempo y el espacio objetivamente reales (Rosental, 1946).

Las tentativas de leer el grande y misterioso libro de la naturaleza son tan antiguas como el propio pensamiento humano y continúan siendo objeto de investigación. Sin embargo, hace tan solo unos tres siglos que los hombres de ciencia han comenzado a entender su lenguaje. Su lectura ha progresado rápidamente desde entonces, es decir, desde Galileo y Newton; nuevas técnicas y métodos sistemáticos de investigación se han desarrollado; ciertas claves (Einstein, 1993) han sido resueltas, aun cuando muchas soluciones resultaron temporales y superficiales a la luz de investigaciones posteriores.

Cuatro grandes tradiciones de investigación en la historia del pensamiento científico se pueden mencionar hasta el momento: el aristotelismo, el galileismo, el cartesianismo y el newtonismo.

La tradición de investigación newtoniana es ineludiblemente inductivista, siendo permitida su adhesión solamente a aquellas teorías que han sido “inferidas inductivamente” a partir de los datos. ¿Constituyó esto una revolución científica? La idea de revolución ha sido acuñada por la obra de Thomas Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas.* En ella propone un modelo de progreso científico cuyo elemento primario es el “paradigma”. Para Kuhn, el paradigma se caracteriza por ser “modos de mirar al mundo”, ideas o sospechas, amplias o cuasimetafísicas, acerca de cómo se deberían explicar los fenómenos de un dominio (Laudan, 1979).

Una revolución está señalada por el surgimiento de un nuevo “paradigma” teórico que, en un corto tiempo, desacredita el antiguo paradigma y se gana la adhesión prácticamente unánime de los miembros de la comunidad científica en cuestión (Kuhn, 1992).

El ejemplo arquetípico de revolución científica es, para Kuhn, el desarrollo de la mecánica newtoniana desde 1700 hasta la mitad del siglo XIX; para Laudan no es sorprendente, puesto que considera que puede haber habido pocos paradigmas o tradiciones de investigación con más éxito que este.

Aunque no puede haber duda de que la tradición de investigación newtoniana tuvo un tremendo impacto en la mecánica racional del siglo XVIII, esa tradición no gozaba ni de una adhesión unánime ni de la suspensión del juicio crítico que, según la opinión de Kuhn, tipifican los efectos de una revolución científica (Laudan, 1979).

Las revoluciones pueden ser, y a menudo lo han sido, llevadas a cabo por una proporción relativamente pequeña de científicos en un campo particular. Sin embargo, se habla de una revolución newtoniana en la física de comienzos del siglo XVIII, aunque la mayor parte de los filósofos de la naturaleza de la época no eran newtonianos.

Sostiene Laudan que una revolución científica se produce no necesariamente cuando toda y ni siquiera la mayoría de la comunidad científica acepta una nueva tradición de investigación, sino más bien cuando aparece una nueva tradición de investigación que suscita el interés suficiente (quizá gracias a una tasa de progreso inicial elevada) como para que los científicos del campo relevante sientan, sean cuales sean sus compromisos con su propia tradición de investigación, que tienen que llegar a un acuerdo con la tradición de investigación en germen.

Newton produjo ese revuelo porque, una vez que se publicaron los *Principia* y la *Óptica*, casi todos los científicos en activo sentían que tenían que vérselas con la visión newtoniana del mundo, pues Newton había elaborado un modo de abordar los fenómenos naturales que no podía ser ignorado (Laudan, 1979).

La evolución de las tradiciones de investigación

Continuando con la reflexión desde la perspectiva de la identificación de los problemas científicos, las teorías y la evolución de las tradiciones de investigación, Laudan en su obra *El progreso y sus problemas* afirma que *"hay muchos más problemas comunes a tradiciones de investigación rivales que problemas de una sola tradición"*. Estos problemas compartidos proporcionan la base para la valoración racional de la efectividad relativa de las tradiciones de investigación rivales para resolver problemas.

Así, cuando los newtonianos y los cartesianos del siglo XVIII hablaban del problema de la caída libre, estaban identificando el mismo problema, a pesar de todas las profundas diferencias entre sus respectivas tradiciones de investigación.

A los filósofos de la ciencia les ha preocupado mucho la relación entre las teorías de Galileo y Newton sobre la caída libre y los datos. Como no podían afirmar que ambas teorías "explicaban" los fenómenos de caída (dado que las dos son formalmente inconsistentes), inventaron una serie de dispositivos para excluir el carácter de "explicativa" de una teoría o de la otra. Y sin embargo es, seguramente, más natural desde el punto de vista histórico —y conceptualmente más razonable— afirmar que ambas teorías (la de Galileo y la de Newton) resolvían el problema de caída libre, si bien, quizás, una con mayor precisión que la otra. En beneficio de ambas redunda en el hecho de que, como Newton percibió, cada una de ellas proporcionaba una solución adecuada al problema en cuestión.

Como una de las dimensiones más ricas y saludables de la ciencia es el aumento, a través del tiempo, de los requisitos que exige para que algo sea considerado como solución a un problema. Lo que una generación de científicos acepta como solución perfectamente adecuada, será, a menudo, considerado por la siguiente como inadecuada. La historia de la ciencia está repleta de casos en los que soluciones cuya precisión y especificidad eran completamente adecuadas para una época, resultan ser por completo inadecuadas para otra (Laudan, 1979).

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

Sin embargo, para Galileo, Descartes, Huygens y Newton los puntos de vista de Aristóteles no constituían en absoluto soluciones al problema de la caída de los cuerpos. Se podría querer decir que los pensadores posteriores, simplemente trabajaban en un problema muy diferente al de Aristóteles; Laudan se inclina más a ver esto como un caso en el que, a lo largo del decurso temporal, los criterios por los que algo cuenta como solución a un problema han evolucionado tanto, que aquello una vez fue considerado una solución adecuada, deja de serlo como tal.

Lo que se consideraba que caracterizaba el núcleo irrenunciable de la tradición de investigación newtoniana en la mecánica del siglo XVIII (por ejemplo, el tiempo y el espacio absolutos) ya no fue considerado como tal por los newtonianos de mediados del siglo XIX.

Puede suceder que una tradición de investigación muy fructífera conduzca al abandono de esa visión del mundo que es incompatible con ella, y a la elaboración de una nueva visión del mundo compatible con la tradición de investigación. Es de este modo como muchos sistemas científicos radicalmente nuevos llegan con el tiempo a ser “canonizados” como parte de nuestro “sentido común” colectivo (Laudan, 1979).

Durante los siglos XVII y XVIII, por ejemplo, las nuevas tradiciones de investigación de Descartes y Newton se enfrentaron violentamente a muchas de las más apreciadas creencias de la época en cuestiones tales como “el lugar del hombre en la naturaleza”, la historia y la extensión del cosmos y, de modo más general, la naturaleza de los procesos físicos. Todo el mundo reconoció en ese momento la existencia de estos problemas conceptuales. Fueron, al final, resueltos, no modificando las tradiciones de investigación responsables para ponerlas en consonancia con las visiones del mundo más tradicionales, sino más bien forjando una nueva visión del mundo que se pudiera conciliar con las tradiciones científicas de investigación.

La tradición de investigación galileana no podía, en sus primeros años, rivalizar contra su principal competidor, el aristotelismo. La tradición de investigación de Aristóteles podía resolver muchísimos más problemas empíricos importantes que la de Galileo. Del mismo modo, a pesar de todas las dificultades conceptuales del aristotelismo, este planteaba en realidad menos problemas conceptuales que la versión galileana temprana de la teoría física de Copérnico. Pero lo que la física y la astronomía galileanas sí tenían a su favor era su impresionante capacidad para explicar con éxito algunos fenómenos muy conocidos que constituían anomalías empíricas para la tradición cosmológica de Aristóteles y Ptolomeo (Laudan, 1979).

Galileo podía explicar, por ejemplo, por qué los cuerpos más pesados no caen más rápidamente que los más livianos (Laudan, 1979). Aunque los científicos aristotélicos podían, en última instancia, encontrar soluciones para estos fenómenos (después de que Galileo dirigiera su atención a ellos), las explicaciones por ellos ofrecidas tenían el regusto de lo artificioso y rebuscado. Galileo fue tomado tan en serio por los científicos posteriores del siglo XVII, no porque su sistema pudiera explicar, en conjunto, más que sus predecesores medievales y renacentistas (puesto que, visiblemente, no podía), sino más bien porque se mostraba prometedor al haber sido capaz, en un corto "tiempo" de ofrecer soluciones a problemas que constituían anomalías para las otras tradiciones de investigación de su campo.

Si un problema ha sido resuelto por alguna teoría viable en el dominio, entonces ese problema adquiere una relevancia considerable, hasta el punto que, casi con seguridad, se esperará de cualquier teoría rival en el dominio que lo resuelva o que dé buenas razones de su fracaso en resolverlo. Así, una vez Galileo encontró una solución al problema de la velocidad con la que caen los cuerpos, cualquier otra teoría mecánica subsiguiente estaba fuertemente obligada a proporcionar una solución igual de adecuada del mismo problema.

Para Galileo, así como para Huygens y Newton, la parte matemática, deductiva, de la empresa científica tenía una importancia mayor que la experimental. Galileo no estaba menos orgulloso de la abundancia de teoremas que surgían de un único principio que del descubrimiento del principio mismo. Los hombres que forjaron la ciencia moderna — Descartes, Galileo, Huygens y Newton (podemos también incluir a Copérnico y a Kepler) — enfocaron el estudio de la naturaleza como matemáticos, en su método general y en sus investigaciones concretas. Fueron primordialmente pensadores especulativos que esperaban aprehender principios matemáticos amplios, profundos (pero también sencillos), claros e inmutables, bien a través de la intuición o mediante observaciones y experimentos cruciales, y deducir entonces nuevas leyes a partir de estas verdades fundamentales, enteramente en la forma en que las propias matemáticas habían construido su geometría. El grueso de la actividad era la porción deductiva; así se derivarían sistemas completos de pensamiento (Laudan, 1979).

Lo que los grandes pensadores del siglo XVII consideraban como el método adecuado de la ciencia se reveló en realidad como el camino provechoso. La búsqueda racional de las leyes de la naturaleza produjo, en la época de Newton, resultados extremadamente valiosos sobre la base del conocimiento observacional y experimental más ligero.

Y durante los dos siglos siguientes los científicos produjeron leyes de la naturaleza profundas y extensas, apoyados en muy pocos experimentos y en observaciones casi triviales.

La esperanza de Galileo, Huygens y Newton de que solo unos pocos experimentos bastarían para sus propósitos, puede entenderse fácilmente. Como estaban convencidos de que la naturaleza estaba diseñada de forma matemática, no veían ninguna razón por la que no pudieran actuar en asuntos científicos como los matemáticos actuaban en su campo.

Como dice John Herman Randall en *Making of the Modern Mind*: *"La ciencia nació de la fe en la interpretación matemática de la naturaleza..."* (Kline, 1972). Esto explica el por qué los trabajos de Roberval, Barrow y Newton, con respecto al concepto de curva, se orientan por considerarla como la trayectoria de un punto móvil. Dicha concepción alcanza reconocimiento explícito y aceptación.

Newton en su *Quadrature of Curves* escrito en 1676 (citado por Kline, 1972) expresa:

> *Considero las cantidades matemáticas en este punto no como constituidas por muy pequeñas partes, sino como descritas por un movimiento continuado. Las líneas (curvas) están descritas, y así generadas, no por la yuxtaposición de partes sino por el movimiento continuado de puntos... Esta génesis tiene lugar realmente en la naturaleza de las cosas, y se ve diariamente en el movimiento de los cuerpos.*

Los términos y el simbolismo para los distintos tipos de funciones representadas por estas curvas fueron introduciéndose gradualmente. La definición más explícita del concepto de función en el siglo XVII fue dada por James Gregory en su *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* (1667). Definió una función como una cantidad que se obtiene de otras mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante otra operación imaginable (Kline, 1972).

Desde el comienzo de su trabajo sobre el cálculo, es decir, desde 1665 en adelante, Newton utilizó el término “fluent” (fluyente) para representar cualquier relación entre variables.

En un manuscrito de 1673, Leibniz utilizó la palabra “función” para significar cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva —por ejemplo, la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada—. La curva misma se decía dada mediante una ecuación. Leibniz también introdujo las palabras “constante”, “variable” y “parámetro”, esta última utilizada en conexión con una familia de curvas (Kline, 1972).

Tratando con funciones, Jean Bernoulli hablaba ya desde 1697 de una cantidad formada de cualquier manera posible, de variables y constantes; con “cualquier manera” quería decir mediante expresiones algebraicas y trascendentes. Adoptó la frase de Leibniz “función de x” para esta cantidad en 1698. En su *Historia* (1714), Leibniz utilizó la palabra “función” para significar cantidades que dependen de una variable.

En cuanto a la notación, Jean Bernoulli escribía X o $\cap$ para una función general de x, aunque en 1718 cambió a $\exists x$. A Leibniz le pareció bien esto, pero propuso también x^1 y x^2 para funciones de x, utilizando el superíndice cuando se tratara con varias funciones. La notación $f(x)$ fue introducida por Euler en 1734. El concepto se convirtió inmediatamente en central en los trabajos sobre el cálculo.

Por ejemplo, Leibniz nos ha enseñado a concebir el reposo, no como opuesto contradictoriamente al movimiento, sino como un caso límite del movimiento. Y, mediante una argumentación basada en la idea de continuidad, consiguió refutar *a priori* las leyes del impacto propuestas por Descartes.

Dewey ha insistido acerca de la diferencia de significado que el concepto de función tiene en la física y en la matemática (Newman, 1994). Cuando se dice: *“el volumen de un gas es una función de la temperatura y de la presión”* se afirma que cualquier variación existencial en el volumen se halla correlacionado con variaciones en la temperatura o en la presión. Se ha llegado a la fórmula y ha sido comprobada mediante operaciones de observación experimental. Por lo tanto, es contingente, de tal modo que *“dada la formulación de la función, se pueden dar valores especiales al volumen, a la presión y a la temperatura, únicamente por medio de operaciones independientes de observación existencial”*.

En cambio, en el caso de la proposición $y = x^2$, cualquier operación que asigne un valor a x o a y, establece, necesariamente, una modificación correspondiente del valor del otro miembro de la ecuación, y la operación de asignar un valor se halla determinada, por completo, por el sistema del que la ecuación forma parte. Pero es obvio que esta diferencia no modifica el concepto de función, que permanece en sus características, en el uso muy extenso que de él hacen las ciencias contemporáneas.

Continuando con la caracterización de la empresa científica, en el siglo XVII la imagen dominante era matemática y demostrativa, una imagen que se constituyó canónica en el famoso *Discurso del método* de Descartes. Y en el siglo XVIII y comienzos del XIX, por el contrario, la mayoría de los filósofos de la naturaleza estaban convencidos de que los métodos de la ciencia debían ser inductivos y experimentales. No es sorprendente que cada época histórica evidencie una o más imágenes normativas dominantes de la ciencia.

De acuerdo con las observaciones de Imre Lakatos, es útil resaltar cómo este concede, y recalca, la importancia histórica de la coexistencia de varios programas de investigación, alternativos al mismo tiempo, dentro del mismo dominio (Laudan, 1979). Situación que justifica una vez más las diferencias de concepción en torno al concepto de función planteado arriba, e incluso de los métodos empleados por la ciencia.

La integración de tradiciones de investigación

Sería un grave error suponer que un científico no puede trabajar con coherencia en más de una tradición de investigación (Laudan, 1979). Esto invita a reflexionar sobre el trabajo desarrollado por Newton y Leibniz en el cálculo, así como a preguntarse si el triunfo global de la tradición de investigación newtoniana sobre las tradiciones de investigación cartesiana y leibniziana en el siglo XVIII fue progresivo, o el progreso científico fue el resultado de la integración entre estas tradiciones de investigación.

Sostiene Laudan que hay momentos en que dos o más tradiciones de investigación, lejos de socavarse mutuamente, pueden ser fundidas, produciendo una síntesis que resulta progresiva respecto de las dos tradiciones precedentes. Por ejemplo, en la filosofía natural del siglo XVIII, muchos científicos eran, de manera simultánea, newtonianos y teóricos del fluido sutil. Su adhesión a la tradición de investigación de los fluidos sutiles (que era tan cartesiana como newtoniana) les llevaba a postular fluidos etéreos imperceptibles para explicar fenómenos de la electricidad, el magnetismo, el calor, la percepción y una gama de otros problemas empíricos.

Respecto a los trabajos de Newton y Leibniz, es preciso considerar que el cálculo infinitesimal tiene dos ramas: cálculo diferencial y cálculo integral. El cálculo diferencial, que maneja incrementos, cantidades de cambio, surgió durante el intento de resolver dos problemas aparentemente diversos, ambos urgentes para la ciencia del siglo XVII, y ambos en realidad íntimamente relacionados.

Uno de ellos era el movimiento no uniforme; el otro, era el de hallar la dirección exacta de la tangente en cualquier punto de una curva. Si consideramos primero el problema del movimiento, pronto quedaría claro que los dos problemas son en sustancia uno solo (Kline, 1972).

El comportamiento de un móvil puede representarse mediante un gráfico que muestra su distancia del punto de partida de cada momento. Si el movimiento es uniforme, de tal modo que a iguales incrementos de distancia corresponden iguales incrementos de tiempo, la gráfica será una línea recta. En otro caso será una curva.

La velocidad del cuerpo es la medida en que aumenta la distancia. Es claro que la inclinación de la línea puede representarla. Cuando la curva sube muy abruptamente, eso quiere decir que a un pequeño incremento de tiempo corresponde un gran aumento de distancia. Cuando la pendiente es más suave, eso significa que el mismo incremento de tiempo corresponde a un menor incremento de distancia.

Por tanto, el problema de calcular la velocidad es el problema de calcular la inclinación (o gradiente) de la línea. Para saber la velocidad en un momento determinado t, tenemos que hallar la inclinación de la línea en el punto A, que corresponde al momento t. Ahora bien, la inclinación de una curva es la tangente. Por tanto, nuestro problema consiste en hallar la inclinación (esto es, la dirección exacta) de la tangente AB. Así, un problema mecánico es esencialmente idéntico a un problema geométrico.

El problema de la tangente había sido resuelto por los antiguos en muchos casos especiales. Pero Newton y Leibniz, los principales autores del cálculo diferencial, inventaron un método general (llamado diferenciación) por el cual puede resolverse siempre.

Las leyes físicas se refieren a relaciones entre cantidades variables. Cuando una variable y depende de otra variable x, se dice que y es función de x. Así, por ejemplo, la distancia a que se encuentra un móvil respecto de su punto de partida es función del tiempo.

Con frecuencia nos interesa comparar los incrementos o las razones de cambio de dos variables funcionalmente relacionadas. Como en el caso de la distancia y el tiempo, el problema es siempre equivalente al de hallar la dirección de la tangente a una curva. Por esta razón el problema de la tangente no tiene ni mucho menos un interés exclusivamente geométrico. En sus primeros tiempos, el cálculo diferencial se llamó a menudo “método de las tangentes”.

Leibniz y Newton, empujados por defensores que convirtieron el asunto en cuestión de honor nacional, se vieron envueltos en una indigna querella. La cuestión discutida era la prioridad de la invención del cálculo infinitesimal.

La disputa entre Newton y Leibniz se complicó aún más por la resistencia de Newton a publicar sus trabajos y por el hecho de que uno y otro debían mucho a predecesores como Barrow, Wallis, Cavalieri y Fermat.

Newton usó por primera vez su *Método de las fluxiones* en 1665-1666 en el asombroso período de retiro en Woolsthorpe, durante el cual empezó a elaborar su obra sobre la gravitación. Aunque sus ideas fueron difundiéndose poco a poco entre sus amigos, hasta 1687 no apareció impresa la primera alusión al cálculo de fluxiones, en un lema de los *Principia*. Y aunque Newton fue el primero en la idea, Leibniz fue el primero en publicarla generalizada (1684).

El simbolismo de Leibniz era muy superior al de Newton. Por esta razón, la mayor parte del mérito de haber hecho viable el cálculo infinitesimal corresponde a Leibniz. Como ha dicho De Morgan, el simbolismo ha sido el único capítulo importante de la matemática que se ha quedado sin contribución notable de Newton, tal vez a causa de que el genial talento le permitía trabajar sin ayuda simbólica. Pero el éxito de muchos matemáticos depende de un adecuado simbolismo.

La matemática es el más importante de todos los instrumentos de la ciencia, puesto que amplía la capacidad del intelecto. Una inteligencia equipada con una buena técnica matemática —técnica que requiere un simbolismo adecuado— puede realizar hazañas de pensamiento que de otro modo estarían fuera de su alcance. Por ejemplo, puede observarse que el cálculo de la velocidad de una partícula en un instante dado y el hallazgo de la tangente a una curva en un punto dado son el mismo tipo de problema: el "cociente diferencial" de una función (Jourdain, 1994).

Consideremos una curva de espacios. Si el movimiento es uniforme, el número que mide un incremento cualquiera de la distancia dividido por el número que mide el correspondiente incremento de tiempo es siempre el mismo valor como medida de la velocidad.

Pero si procediéramos de este modo cuando la velocidad es variable, obtendríamos valores muy diversos para la velocidad. De todos modos, cuanto menor es el incremento del tiempo, tanto más se aproximará a una línea recta el trocito de curva de espacios que corresponda a ese incremento de tiempo, y tanto más se aproximará, por tanto, a la uniformidad de incremento (o disminución) de s. Así, si denotamos el incremento de t por "$\triangle t$" (notación en la cual "$\triangle$" no representa un número, sino la frase "el incremento de"), y el correspondiente incremento (o "decremento" o disminución) de s por "$\triangle s$", podemos definir la velocidad media en ese elemento o trocito del movimiento por:

$$\frac{\triangle s}{\triangle t}$$

Por pequeño que sea $\triangle t$, la línea representada por $\triangle s$ no es, por lo menos corrientemente, del todo recta, y la velocidad en el instante t que, en la terminología del cálculo diferencial de Leibniz, se define como el cociente de incrementos "infinitamente pequeños" y se simboliza por $\frac{ds}{dt}$ (porque se sustituyen las $\triangle$ por d cuando consideramos "infinitésimos") queda definida sólo aproximadamente.

Esta nueva noción de velocidad incluye como caso particular la de velocidad uniforme. Las reglas del cálculo infinitesimal autorizan a inferir de la ecuación $\frac{ds}{dt} = \mathrm{a}$ (en la cual a es alguna constante) la ecuación $\mathrm{s} = \mathrm{at} + \mathrm{b}$ (siendo b otra constante). Todo eso no ha estado explícitamente formulado hasta unos cincuenta años después de que Galileo publicara sus investigaciones sobre el movimiento de caída libre.

En la mecánica newtoniana aparece el problema de los movimientos variablemente acelerados, y este es el punto en el cual se hace necesario en la mecánica teórica el cálculo infinitesimal o algún cálculo equivalente, como el *Método de las fluxiones* de Newton (Kline, 1972).

La historia muestra que justamente después de la adopción del concepto de función vino el cálculo, el cual, junto con la geometría euclídea, es la mayor creación de todas las matemáticas (Kline, 1972). Aunque era, hasta cierto punto, la respuesta a problemas ya manejados por los griegos, el cálculo fue creado sobre todo para tratar los principales problemas científicos del siglo XVII.

En este siglo se tenían cuatro tipos principales de problemas, a saber:

1. Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cualquier instante; y, al revés, dada la fórmula que describe la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorridas. Este problema surgió directamente en el estudio del movimiento, y la dificultad que planteaba era que las velocidades y las aceleraciones que interesaban en el siglo XVII variaban de instante en instante.

Al calcular una velocidad instantánea, por ejemplo, no se puede dividir la distancia recorrida por el tiempo empleado, como ocurre en el caso del cálculo de velocidad media, porque en un instante dado tanto la distancia recorrida como el tiempo empleado son cero, y 0/0 no tiene sentido. Sin embargo, era claro desde un punto de vista físico que los objetos móviles tienen una velocidad en cada instante de su viaje.

El problema inverso de obtener la distancia recorrida, conociendo la fórmula de la velocidad incluye la dificultad correspondiente; no se puede multiplicar la velocidad en cualquier instante por el tiempo utilizado para obtener el espacio recorrido, porque la velocidad varía de un instante a otro (Kline, 1972).

Esto representaba problemas de tipo conceptual que correspondían a la física y que debían ser resueltos dentro de la tradición de investigación newtoniana, pues las tradiciones predecesoras carecían de las estructuras conceptuales idóneas para su resolución.

El problema del cálculo de la velocidad instantánea a partir del conocimiento de la distancia recorrida como función del tiempo, y su inverso, se vio pronto que eran casos particulares del cálculo del cambio relativo instantáneo de una variable con respecto a otra, y su problema inverso.

El primer tratamiento significativo de los problemas de cambios relativos, en general, se debe a la tradición de investigación newtoniana.

2. Obtener la tangente a una curva. El interés por este problema vino por más de una fuente; era un problema de geometría pura y era de gran importancia para las aplicaciones científicas. Un problema científico que implicaba la tangente a una curva surgía en el estudio del movimiento. La dirección del movimiento de un cuerpo móvil en cualquier punto de su trayectoria es la dirección de la tangente a la trayectoria.

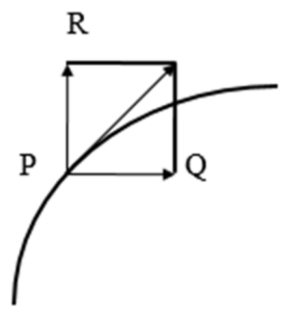
En realidad, incluso el mismo significado de “tangente” estaba abierto. Para las secciones cónicas, la definición de una tangente como una recta que toca a una curva en solo un punto y perpendicular a un lado de la curva, bastaba; esta definición era utilizada por los griegos. Pero era complicada para las curvas más complicadas que se utilizaban en el siglo XVII.

Se propusieron varios métodos para obtener la tangente a una curva:

En su *Traité des indivisibles*, que data de 1634 (aunque no fue publicado hasta 1693), Gilles Persone de Roberval (1602-1675) generalizó un método que Arquímedes había usado para obtener la tangente en cualquier punto de su espiral. Como Arquímedes, Roberval pensó en una curva como lugar geométrico de un punto que se mueve con la acción de dos velocidades (Kline, 1972).

Por ejemplo, un proyectil disparado desde un cañón experimenta la acción de una velocidad horizontal, PQ, y una velocidad vertical, PR. La resultante de estas dos velocidades es la diagonal del rectángulo formado sobre PQ y PR. Roberval tomó la recta de esta diagonal como la tangente en P.

Figura 2. Representación de las componentes de la velocidad.



Fuente: Klein, M. (1972).

El método de Roberval utilizaba un principio establecido ya por Galileo, que consiste en que las velocidades horizontal y vertical actúan independientemente la una de la otra. Torricelli utilizó el método de Roberval para obtener las tangentes a las curvas cuyas ecuaciones escribimos en la actualidad como $y = x^n$ (Kline, 1972).

Aunque la noción de tangente como una recta que tiene la dirección de la velocidad resultante era más complicada que la definición griega de una recta que toca a una curva, el nuevo concepto podía aplicarse a muchas curvas en las que el antiguo fallaba. Era también valioso porque relacionaba la geometría pura y la dinámica, las cuales, antes de los trabajos de Galileo, habían sido consideradas como esencialmente distintas.

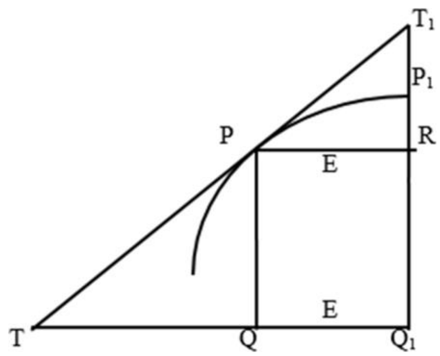
Esta definición de tangente era objetable en términos matemáticos porque se basaba en conceptos físicos. Surgieron muchos casos de curvas en situaciones que no se podían relacionar con el movimiento, y por lo tanto la definición de tangente no se podía aplicar. Por todo ello fueron ganando aceptación otros métodos para obtener tangentes (Kline, 1972).

El método de Fermat, que él había ideado en 1629 y que puede encontrarse en un manuscrito de 1637 *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* (*Método para obtener máximos y mínimos*), es, en esencia, el método actual.

De Kline (1972) se extracta lo siguiente:

> *Sea PT la tangente deseada a una curva en P. La longitud TQ se llama subtangente. El plan de Fermat es obtener la longitud de TQ, de la que se obtiene la posición de T y entonces trazar TP.*

Figura 3. Método de Fermat.



Fuente: Klein, M. (1972).

Sea QQ_1 un incremento de longitud E de TQ. Como el triángulo TQP es semejante al triángulo PRT_1,

$$TQ: PQ = E: T_1R$$

Pero, dice Fermat, T_1R es casi P_1R, por lo tanto

$$TQ: PQ = E : (P_1Q_1 - QP)$$

Llamando $f(x)$ a PQ, en nuestra notación moderna, tenemos

$$TQ : f(x) = E : [f(x + E) - f(x)]$$

Por tanto,

$$TQ = \frac{Ef(x)}{f(x + E) - f(x)}$$

Para la $f(x)$ tratada por Fermat era inmediatamente posible dividir el numerador y el denominador de la fracción anterior por E. Hace entonces E = 0 (según dice, elimina el término E) y así obtiene TQ.

Fermat aplicó este método de las tangentes a muchos problemas difíciles. El método tiene la forma del método, ahora habitual, del cálculo diferencial, pero está suponiendo enteramente la difícil teoría de los límites (Kline, 1972).

Por otra parte, para Descartes encontrar la tangente a una curva era importante porque permitía encontrar propiedades de las curvas —como, por ejemplo, el ángulo de intersección de dos de ellas—. Dice: *"Este es el problema más útil y más general, y el más general, no solo que conozco sino de los que deseo conocer en geometría"* (Kline, 1972). El método era puramente algebraico y no incluía ningún concepto de límite, mientras que para Fermat sí lo implicaba, si se formulaba rigurosamente.

Sin embargo, el método de Descartes solo era útil para curvas cuyas ecuaciones fueron de la forma $y = f(x)$, en la cual $f(x)$ era un polinomio sencillo. Mientras que Fermat veía ventajas en su método en la utilización de los pequeños incrementos E (Kline, 1972).

3. El trabajo sobre el tercer tipo de problemas, la obtención de los máximos y mínimos de una función, puede decirse que comienza con una observación de Kepler. Estaba interesado en la forma de los toneles de vino; en su *Stereometria Doliorum* (1615) demostró que, de todos los paralelepípedos rectos, de bases cuadradas, inscritos en una esfera, el cubo es el mayor. Su método fue el de calcular los volúmenes para elecciones particulares de las dimensiones. Eso en sí mismo, no era significativo, pero notó que cuando se acercaba al volumen máximo, el cambio en volumen que correspondía a un cambio fijo en las dimensiones crecía cada vez menos (Kline, 1972).

4. El cuarto problema era el de obtener longitudes de curvas como, por ejemplo, la distancia recorrida por un planeta en un tiempo dado. Hasta, más o menos, 1650 nadie creía que la longitud de una curva pudiera ser exactamente a la longitud de una recta. De hecho, en el segundo libro de *La Géométrie* Descartes expone que la relación entre las líneas curvas y rectas ni se conoce ni se podrá conocer nunca (Kline, 1972). Pero Roberval encontró la longitud de un arco de cicloide.

Hasta aquí, hemos enunciado algunas de las principales contribuciones de los predecesores de Newton y Leibniz a los cuatro problemas más importantes que motivaron los trabajos sobre el cálculo. Es importante resaltar el hecho de que los cuatro problemas habían sido considerados como diferentes; sin embargo, se detectaron relaciones entre ellos que, incluso, llegaron a utilizarse. Por ejemplo, Fermat había usado exactamente el mismo método para obtener tangentes y para conseguir el valor máximo de una función.

También se vio fácilmente que el problema del cambio relativo de una función con respecto a la variable independiente y el problema de la tangente eran el mismo.

De hecho, el método de Fermat y de Barrow para obtener tangentes no es más que la contrapartida geométrica de la obtención del cambio relativo (Kline, 1972).

La característica principal del cálculo, después de los mismísimos conceptos de derivada y de integral como límite de una suma, es el hecho de que la integral puede obtenerse invirtiendo el proceso de diferenciación o, como decimos nosotros, obteniendo la antiderivada.

Torricelli había observado en casos particulares que el problema del cambio relativo era esencialmente el inverso del problema del área. Estaba, de hecho, incluido en el uso que

Galileo hacía del hecho de que el área encerrada en la curva tiempo- velocidad proporciona la distancia recorrida hasta el tiempo correspondiente. Puesto que el cambio relativo de la distancia debe de ser la velocidad, el cambio relativo del área considerada como una “suma” debe ser la derivada de la función de área.

Se había acumulado una inmensa cantidad de conocimiento sobre el cálculo antes de que Newton y Leibniz entraran en escena. Puede uno preguntarse entonces qué quedaba por realizar en la senda de los principales resultados nuevos. La respuesta es una mayor generalidad del método y el tomar conciencia de la generalidad de lo que ya había sido establecido en problemas particulares. Los trabajos sobre el cálculo durante los primeros dos tercios de siglo se perdieron en los detalles (Kline, 1972). Además, en sus esfuerzos por alcanzar rigor a través de la geometría, no se utilizaron ni se exploraron, en general, las implicaciones de la nueva álgebra ni de la geometría de coordenadas, y muchos se agotaron en sutiles razonamientos sin salida.

James Gregory afirmaba que la verdadera división de las matemáticas no era en geometría y aritmética, sino en lo universal y lo particular. Lo universal fue proporcionado por las dos mentes universales, Newton y Leibniz.

En lo que se refiere al cálculo, la tradición de investigación newtoniana se caracterizó por la generalización de las ideas ya adelantadas por muchos otros, estableciendo métodos ya maduros y mostrando las interrelaciones entre varios de los importantes problemas descritos anteriormente.

La primera publicación de Newton que incluye su desarrollo del cálculo es la magnífica obra *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Por lo que se refiere a la noción básica del cálculo, la fluxión o, como diríamos nosotros, la derivada, Newton hace varias afirmaciones. Rechaza los infinitesimales o las cantidades indivisibles últimas en favor de las “cantidades divisibles evanescentes”, cantidades que se puede hacer disminuir tanto como se quiera (Kline, 1972).

Siguiendo a Laudan en sus planteamientos sobre la naturaleza de las tradiciones de investigación abordamos ahora el trabajo de Leibniz. Aunque sus contribuciones fueron bastante diferentes, el hombre que se alinea con Newton en la construcción del cálculo es Leibniz (Kline, 1972).

Durante los años 1670 y 1671 Leibniz escribió sus primeros artículos sobre mecánica y hacia 1671 había producido su máquina de calcular. Publicó artículos sobre el cálculo desde 1684 en adelante.

Hacia 1673 Leibniz era consciente del importante problema directo e inverso de obtener tangentes a las curvas, estaba bastante seguro de que el método inverso era equivalente al de obtener áreas y volúmenes mediante sumaciones. El desarrollo algo sistemático de sus ideas comienza con notas de 1675. Para comprender su pensamiento es útil señalar que en su *Dissertatio de arte combinatoria* había considerado sucesiones de números, primeras diferencias, segundas diferencias y diferencias de mayor orden. Así, para la sucesión de cuadrados:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36,$$

las primeras diferencias son

$$1, 3, 5, 7, 9, 11$$

y las segundas diferencias son

$$2, 2, 2, 2, 2, 2$$

Kline escribe que

> *Leibniz se dio cuenta de la anulación de las segundas diferencias para la sucesión de los números naturales, y de las terceras diferencias para la sucesión de los cuadrados, y así sucesivamente. También observó que, si la sucesión original comienza por 0, la suma de las primeras diferencias es el último término de la sucesión.*

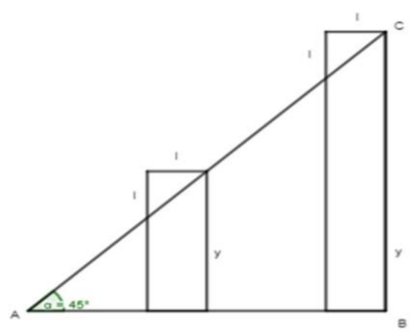
Para relacionar estos hechos con el cálculo tuvo que pensar en la sucesión de los números como en los valores de y de una función, y en la diferenciación de dos cualesquiera como la diferencia de dos valores contiguos de y. Inicialmente pensó que la x representaría el orden del término en la sucesión e y el valor de este término.

La cantidad dx, que a menudo escribe como a, es entonces 1 porque es la diferencia de los órdenes de dos términos sucesivos, y dy es la diferencia real en los valores de dos términos sucesivos. Entonces, utilizando omn como la abreviatura del latín omnia, para significar suma, y utilizando l en lugar de dy, Leibniz concluye que omn $\mathrm{l} = \mathrm{y}$, porque omn l es la suma de las primeras diferencias de una sucesión cuyos términos comienzan por 0 y que, por lo tanto, proporciona el último término.

He aquí que, omn. yl presenta un nuevo problema.

Leibniz obtiene el resultado de que omn. yl es $\frac{y^2}{2}$ pensando en términos de la función $y = x$. Como se muestra en la Figura 3.

Figura 4. Método de Leibniz.



Fuente: Klein, M. (1972).

Dice Leibniz que: *"Las líneas rectas que aumentan de la nada, multiplicada cada una por su elemento de aumento correspondiente forman un triángulo"* (Kline, 1972).

En el manuscrito del 29 de octubre de 1675, Leibniz decidió escribir $\int$ en lugar de omn. El símbolo $\int$ es una S alargada para indicar "suma".

Leibniz se dio cuenta bastante pronto, probablemente al estudiar los trabajos de Barrow, de que la diferenciación y la integración como sumación deben de ser procesos inversos; así, el área, cuando se diferencia, debe proporcionar una longitud. A partir de razonamientos difícilmente inteligibles (Kline, 1972), Leibniz establecía el hecho de que la integración como proceso de sumación es el inverso de la diferenciación. Esta idea está en los trabajos de Barrow y Newton, quienes obtuvieron áreas por antidiferenciación, pero Leibniz es el primero que la expresa como una relación entre sumación y diferenciación.

Por otra parte, con respecto a la diferenciación, incluso después de reconocer que dy y dx pueden ser cantidades arbitrariamente pequeñas, Leibniz tenía que superar aún la dificultad fundamental de que la razón dy/dx no es completamente la derivada en nuestro sentido. Basaba su razonamiento en el triángulo característico, que también habían utilizado Pascal y Barrow.

En un artículo del 26 de junio de 1676, se da cuenta de que el mejor método para obtener las tangentes es hallar dy/dx, en la cual dy y dx son diferencias y dy/dx es el cociente.

En noviembre de 1676 es capaz de dar las reglas generales $dx^n = nx^{n-1}$ para n entero y fraccionario, y $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

En 1680, dx se había convertido en la diferencia de las abscisas y dy en la diferencia de las ordenadas. Dice: *"...ahora, estas dx y dy se tomarán como infinitamente pequeñas, o bien se entiende que los dos puntos de la curva están separados una distancia que es menor que cualquier longitud dada..."*. Llama a dy el "incremento momentáneo" en y cuando la ordenada se mueve a lo largo del eje de las x (Kline, 1972).

Con respecto a la notación, Leibniz trabajó esmeradamente en busca de la más adecuada. Sus dx, dy y dy/dx se utilizan todavía. En general, el trabajo de Leibniz, aunque rico en sugestiones y profundo, fue incompleto y fragmentario que resultaba difícilmente inteligible.

Tanto a Newton como a Leibniz se les debe reconocer que vieron el cálculo como un método nuevo y general, aplicable a muchos tipos de funciones. Pues la importancia de la matemática no son ciertas funciones particulares, sino las funciones en general. Una abstracción de esta clase garantiza gran amplitud en sus aplicaciones, ya que una fórmula o un teorema contiene un número "infinito" de casos concretos posibles (Kline, 1972).

Newton y Leibniz aritmetizaron el cálculo, trabajando en él con conceptos algebraicos. La notación y las técnicas algebraicas utilizadas por ambos no solo les proporcionaron un instrumento más efectivo que la geometría, sino que también permitieron tratar con la misma técnica muchos problemas geométricos y físicos diferentes.

La distinción principal entre el trabajo de los dos es que Newton utilizó incrementos infinitamente pequeños en x y en y como medio para determinar la fluxión o derivada. Era en esencia el límite del cociente de los incrementos, cuando estos se hacían cada vez más pequeños. Por otra parte, Leibniz trató de forma directa con los incrementos infinitamente pequeños en x y en y, es decir, con diferenciales, y determinó las relaciones entre ellos. Esta diferencia refleja la orientación física de Newton, en la que un concepto como el de velocidad es central, y la preocupación filosófica de Leibniz por las partículas últimas de la materia, que llamó mónadas.

De acuerdo con lo expuesto en las páginas anteriores es preciso tener en cuenta que ninguna teoría surge como resultado de la simple formulación de nuevos conceptos, ya que se requiere que los nuevos conceptos cobren una actividad propia, es decir, que entre ellos se descubran nuevas relaciones que permitan la solución de nuevos problemas.

Es más: un nuevo concepto solo puede nacer, desarrollarse y ganar en generalidad y precisión sobre la base de esos mismos problemas que aquel permite resolver, y solo por medio de los teoremas de los que forma parte.

En este proceso de formación de conceptos se presentan ciertos rasgos que caracterizan su evolución, y que permiten diferenciar el pensamiento matemático, del pensamiento físico. Esta distinción se puede abordar desde el punto de vista de las rupturas epistemológicas (Vasco, 1991), pues en física se puede aceptar que se han dado por lo menos dos rupturas epistemológicas: la galileana y la einsteniana, como hechos que representan el punto de separación entre la tradición aristotélica y galileana, y la tradición newtoniana y einsteniana, respectivamente.

El interrogante que surge es: ¿hay revoluciones o rupturas epistemológicas en las matemáticas?, al respecto Vasco plantea:

> *1. En cada una de las disciplinas matemáticas la ruptura epistemológica, si tiene sentido identificarla con la conformación de la disciplina respectiva, se da una sola vez; y 2. En cada una de las disciplinas matemáticas una vez conformadas no se dan propiamente revoluciones científicas en el sentido de Kuhn.*

"La ruptura no es un acto voluntarista de un genio", argumenta Vasco, sino una fase de un complejo proceso, fase que casi siempre escapa a la conciencia de sus protagonistas y es señalable solo por el historiador, el matemático y el epistemólogo que reunidos en una sola persona o en un equipo de trabajo, reconstruyen muy tentativamente las fases de un proceso que todavía continúa.

Estas fases del proceso son herramientas útiles para el ejercicio docente y al ser aplicadas en el aula permiten hacer de este uno de los medios de reflexión y enriquecimiento en la formación del pensamiento científico.

Capítulo 3

El análisis estructural: enfoque prospectivo en la investigación sobre los procesos de comprensión del concepto de función

La prospectiva es la identificación de un futuro probable y de un futuro deseable, diferente de la fatalidad y que depende únicamente del conocimiento que se tiene sobre las acciones que el hombre quiera emprender (Mojica, 1991).

La implementaron de técnicas prospectivas con el propósito de hacer de la actividad docente una labor que permitiera visualizar el futuro del proceso enseñanza- aprendizaje, a partir de la reflexión sobre las acciones ejecutadas en la interacción con los estudiantes, ha sido el hilo conductor del proceso de planificación de esta investigación.

El método del análisis estructural ha sido la primera técnica aplicada nacida directamente del estructural-funcionalismo, cuyo concepto central es el de “estructura” propuesto por Claude Lévi-Strauss, citado por Mojica: *“Estructura es una realidad que es estudiada como un sistema, cuyos elementos guardan relaciones de interdependencia”*.

La implementación de este método inicia con la identificación de aquellos elementos (o variables) que en el proceso enseñanza-aprendizaje constituyen el problema de estudio. Aquí cada elemento es percibido según las relaciones que tiene con los otros.

A través del análisis estructural se logra observar todas las relaciones que pueden tener entre sí las variables que conforman la problemática abordada en el estudio de la función desde el movimiento. Lo más importante de esta técnica radica en poder detectar las variables clave, es decir, aquellas que ejercen la mayor influencia sobre las restantes.

Variables críticas

Para lograr la identificación de las variables clave se realizan las siguientes etapas:

a) <u>Identificar las variables que conforman el problema:</u> esta etapa facilitó a partir de la exploración de las respuestas presentadas por estudiantes de primer semestre de las Licenciaturas en Matemática y Física de la Universidad de Cundinamarca, analizar la forma de proceder al representar y procesar datos provenientes de las prácticas de laboratorio sobre movimiento, al realizar el análisis de gráficas y obtener los modelos matemáticos representativos de las situaciones experimentales. Esto permitió identificar las dificultades que presentaba el grupo en general, en cuanto a las siguientes áreas del conocimiento:

   - Matemática.
   - Física.

- Epistemología.

Una vez detectados los problemas, se procede a enriquecer tanto el nombre del problema como su definición. Este fue el resultado de la identificación de las variables:

Tabla 1. Variables críticas

Variables críticas	**Observaciones**
Pensamiento matemático	Existe una noción superficial sobre cómo debe ser el modo de proceder en el trabajo matemático, de tal manera que estructure el pensamiento y sirva de elemento clave en los procesos de aprendizaje de otras áreas tales como la física, en este caso. Se observa memorización de contenidos, los cuales al ser requeridos para su aplicación en otras áreas hacen difícil su aplicación ya que no se tiene claridad en cuanto a su funcionalidad en la estructuración del conocimiento.
Medición	Se emplea desde el punto de vista práctico en situaciones de laboratorio, por ejemplo, pero se ha descuidado su estudio como función, lo que origina que en muchos casos se empleen expresiones negativas para referirse a resultados de una medición, ya que se ha descuidado el concepto de métrica, y aunque a este nivel no puede tener todo el rigor matemático, es necesario para la formalización del concepto de medida.
Concepto de variable	Se observa que el proceso de conceptualización de la variable presenta disfunciones. Existe la tendencia por considerar como variable a una letra x o y, estos hábitos proceden del estudio del álgebra elemental y al carecer de significación concreta. Al ser empleados en el estudio del movimiento de los cuerpos y asociarlo con los conceptos de espacio y tiempo, no pasan a ser más que reemplazos de una letra x, por la palabra tiempo, y de una letra y, por otro, la palabra espacio. La dificultad para identificar las relaciones entre estas variables y su condición de independencia o dependencia, es otra característica que ejemplifica la existencia de obstáculos epistemológicos y cognitivos en este proceso de conceptualización.
Concepto de función	Aunque desde los primeros grados de la educación básica secundaria se estudia este concepto, se observa asociado a la noción de conjuntos y su representación en diagramas de Venn, en los cuales se establecen ejemplos de funciones inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, pero al tratar de llevar el proceso de pensamiento hacia la aplicación en situaciones de la vida cotidiana, o a identificar funciones mediante representaciones en diagramas cartesianos asociados con las ecuaciones respectivas, la dificultad es generalizada. Además, no se encuentran casos en los que se considere el movimiento como un ejemplo de función.
Concepto de variable	Al presentarse la necesidad de utilizar este concepto, en algunos casos se recuerda la manera de calcularla como la razón entre los incrementos Oy y Ox, pero se nota que no se interpreta el significado de esta situación y menos su utilidad para hallar velocidades en gráficas espacio-temporales.

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

Aplicación de la matemática a la ciencia natural	Existe la tendencia de considerar a la matemática independiente de la realidad y poco se le utiliza para el aprendizaje de otras áreas del conocimiento, por ejemplo, la física, porque aunque en el aprendizaje tradicional de las ciencias físicas se desarrollan ejercicios que implican hacer cálculos numéricos, no se emplea la matemática como lo que ha sido en la historia del pensamiento científico, una herramienta fundamental en la construcción de la ciencia.
Manejo de herramientas de geometría analítica	Aunque en educación media se ha iniciado el trabajo de la geometría analítica, se pierde el tiempo, ya que no se aprovecha la interrelación entre las diferentes áreas, de tal forma que permitan que el estudiante vea el conocimiento como un ente compacto, sino que están tan aisladas las áreas del saber, que el simple manejo de sistemas de coordenadas cartesianas parece tener características muy diferentes en la clase de matemáticas y en la de física. En el análisis de gráficas se percibe otra de las dificultades en la representación de magnitudes diferentes; por ejemplo, espacio y tiempo no se diferencian como tal y generalmente se considera el tiempo como otra magnitud espacial.
Concepto de espacio	La idea más frecuente asociada con el concepto de espacio es la de espacio exterior. Aunque en física de educación media se trabaja con los conceptos clásicos, el estudiante presenta un concepto de espacio newtoniano muy pobre, se observa bastante dificultad para la asimilación de la representación unidimensional, bidimensional y tridimensional mediante sistemas de coordenadas cartesianas. Aunque utiliza el plano cartesiano en matemáticas, el paso a la representación en un plano de las coordenadas tridimensionales es una de las mayores dificultades.
Concepto de tiempo	Generalmente se encuentra esta idea asociada con el instrumento de medida (reloj), lo cual implica considerar que el tiempo se detiene, así como se detiene el cronómetro. El concepto de tiempo desde la tradición newtoniana no se tiene muy definido.
Concepto de movimiento	Aunque en todos existe una idea intuitiva de movimiento, está asociada con el aspecto físico de desplazamiento de un cuerpo, pero se encuentra total ausencia del enfoque matemático del movimiento como una función.
Concepto de cambio	Aunque el término es utilizado en el lenguaje común, se desconoce la importancia que el cambio ha tenido en la evolución del pensamiento matemático.
Concepto de razón de cambio	Se observa dificultad para la comprensión y el empleo del concepto de razón. La dificultad es mayor cuando se requiere la conceptualización de la razón de cambio.
Concepto de velocidad	La idea de velocidad es utilizada y comprendida desde el aspecto físico, sin embargo, su tratamiento desde el punto de vista matemático presenta dificultad, lo que se hace evidente cuando se analizan velocidades constantes y velocidades que cambian con el tiempo. Existen dificultades en la comprensión de velocidades negativas y positivas.
Identificación de los problemas empíricos y conceptuales	Se abordan los contenidos programáticos sin tener en cuenta que en la evolución del conocimiento se han presentado siempre problemas empíricos y conceptuales, los cuales representan el eje dinamizador del progreso científico. Por lo tanto, en el estudiante no se encuentra la tendencia a hacer de su proceso de aprendizaje una actividad de resolución de problemas.
Importancia de la evolución de las teorías	Se entregan los contenidos al estudiante como aparecen estructurados en los libros de texto, lo que lo aleja de tener en cuenta la importancia de la evolución histórica de las teorías que está estudiando, y hacer de estas un elemento de reflexión en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Fuente: elaboración propia.

b) Detectar la influencia que ejercen unas variables sobre otras: el inventario de problemas obtenidos es la materia prima para construir un sistema en el cual se pueda apreciar la manera como cada variable se relaciona con las restantes. Para la construcción de este sistema, se tiene en cuenta que la influencia que una variable ejerce sobre otra se puede presentar así:

Tabla 2. Grados de influencia entre variables

Escala	Tipo de influencia	Descripción
5	Influencia fuerte	Si dicha variable es la única que influye sobre la variable en estudio.
3	Influencia media	Si esta variable influye sobre la variable en estudio, pero no es la única que influye sobre ella.
1	Influencia débil	Si esta es una de las muchas variables que influyen sobre la variable en estudio, pero su influencia no es relevante.
0	No influencia	Cuando la variable no ejerce algún tipo de influencia sobre la variable en estudio.

Fuente: Mojica, F. (1991).

Según la puntuación anterior, se procede a diseñar la matriz relacional que permita establecer el grado de influencia y dependencia de cada una de las variables, y proceder a clasificarlas en los siguientes grupos:

- ✓ Variables independientes
- ✓ Variables intervinientes
- ✓ Variables dependientes
- ✓ Variables autónomas

c) Determinación de las variables más sobresalientes (variables críticas): de acuerdo con la puntuación procedente de la matriz relacional, las variables se clasifican así:

Diagrama 1. Clasificación de las variables en función de los grados de influencia y dependencia

DEPENDENCIA

Variables Dependientes Movimiento Cambio Función Razón de Cambio Velocidad Pendiente Derivada	***Variables Intervinientes (de Control)*** Aplic. de la Matemática a la ciencia natural Pensamiento Matemático Identificación de problemas empíricos y conceptuales Importancia de la Evolución de las Teorías
Variables Autónomas	***Variables Independientes (de Poder)*** Espacio Tiempo Medición Geometría Analítica Variable

INFLUENCIA

Fuente: Elaboración propia.

Variables independientes (de poder): se manipulan en el proceso y presentan alta influencia y baja dependencia.

- Concepto de espacio.
- Concepto de tiempo.
- Medición.
- Geometría analítica.
- Concepto de variable.

Variables intervinientes (de control): se controlan durante el estudio, de tal manera que no presenten variaciones significativas que afecten el estudio. Estas variables presentan alta influencia y alta dependencia.

- Aplicación de la matemática a la ciencia natural. Pensamiento
- matemático.
- Identificación de problemas empíricos y conceptuales.
- Importancia de la evolución de las teorías.

Variables dependientes: se observa cómo se ve afectado su comportamiento al manipular las diversas variables independientes. Dichas variables presentan una baja influencia y alta dependencia.

- Concepto de movimiento.
- Concepto de cambio. Concepto
- de función.
- Conceptos de razón de cambio.
- Conceptos de velocidad. Concepto
- de pendiente. Concepto de
- derivada.

Variables autónomas: presentan baja influencia y baja dependencia, la técnica prospectiva sugiere descartar estas variables del estudio. En este proceso no se encontró este tipo de variables.

Sistematización del problema

En esta parte del proceso se diseñan los instrumentos de trabajo que permitan:

- La manipulación de las variables independientes.
- La identificación del grado de influencia de las variables independientes o de poder, sobre las dependientes.
- La distribución uniforme o el control de las variables intervinientes, a lo largo del proceso.

Las anteriores estrategias posibilitan el diseño de las hipótesis de trabajo, las cuales representan la directriz mediante la cual se orienta todo el proceso operativo.

Hipótesis 1. El estudio del movimiento de los cuerpos contribuye a la formación del concepto de función.

Hipótesis 2. La utilización de la epistemología en el proceso de enseñanza- aprendizaje favorece la formación de conceptos y contribuye a la reconstrucción del conocimiento.

Hipótesis 3. La interrelación de la matemática y la física en las actividades de enseñanza-aprendizaje representa una herramienta útil en sus procesos de conceptualización.

Diseño de la acción operativa

Acciones

- Diseñar procesos de medición en los cuales se facilite el estudio de esta como una función.
- Generar actividades que permitan conceptualizar el espacio y el tiempo, desde la tradición de investigación newtoniana.
- Diseñar procesos de medición que posibiliten aplicar los conceptos del espacio y del tiempo en el estudio del movimiento.
- Utilizar las herramientas de la geometría analítica para aplicar los sistemas de coordenadas cartesianas a la representación gráfica del movimiento.
- Emplear sistemas de coordenadas cartesianas que permitan la relación de variables físicas en la interpretación de movimientos.
- Utilizar sistemas de coordenadas cartesianas que representen relaciones entre variables y permitan la generalización al concepto de función.
- Utilizar el concepto de razón de cambio en el proceso de abstracción de los conceptos de velocidad y aceleración.
- Emplear el concepto de velocidad en el proceso de conceptualización de la derivada.
- Aplicar el concepto de función y su representación gráfica en la construcción del concepto de pendiente.
- Utilizar el método de Leibniz en la construcción del concepto de derivada.
- Desarrollar progresivamente actividades tendientes a la comprobación de las hipótesis del trabajo teniendo en cuenta en todo el proceso la importancia de utilizar marcos teóricos con componentes físicos, matemáticos y epistemológicos.
- Controlar en el proceso las manifestaciones del estudiante en torno a su modo de pensar en matemáticas y al empleo que haga de la matemática en la interpretación del mundo físico.

Elementos para la ejecución

1) El diseño de procesos de medición que faciliten el estudio de esta como una función requiere:

- Realizar prácticas de medición que permitan involucrar al estudiante con situaciones relacionadas con la resolución de problemas, como una de las características del trabajo científico. Enfrentándolo al proceso desde la primera etapa que corresponde a situaciones concretas.

- Tener en cuenta el componente histórico, respecto al trabajo de los pitagóricos, pues es valioso resaltar y reflexionar sobre cómo para ellos la esencia del conocimiento se basaba en el número y en las relaciones numéricas. Al ser el número su primer principio para la explicación de la naturaleza, se tenía la necesidad de representar los resultados de las mediciones mediante ellos. En el proceso de conceptualización esta situación ilustra un primer grado de abstracción en el pensamiento de quien aprende.

- Con el fin de continuar el ascenso en el proceso de conceptualización, se realiza el análisis de los datos procedentes de las mediciones, con la ayuda de técnicas fundamentadas por la teoría de los errores. Esto permite establecer relaciones numéricas entre los datos, así como también someterlas a evaluación con el fin de justificar sus opiniones y alcanzar la habilidad para plantear y comprobar sus propias hipótesis.

- Al analizar el comportamiento de los datos procedentes de las mediciones y el de sus relaciones, se evidencia la necesidad de expresar los resultados del trabajo, en términos más abstractos que permitan justificar la importancia de estos. Por eso se hace necesario incluir en el proceso situaciones procedentes de la matemática, por ejemplo, el estudio de propiedades de la métrica, abordadas desde el nivel más concreto posible, lo que significa que no es indispensable la axiomatización formal de la información para presentar este concepto con el rigor que merece.

- Tratar la medición como una función en la cual el marco referencial de la métrica permita darle al trabajo práctico iniciado un carácter progresivo en la generalización de los hechos estudiados, contribuye a formar en el estudiante el hábito de buscar e identificar modelos matemáticos que expresen de manera seria las situaciones que diariamente enfrenta en el proceso educativo.

2) Las actividades que permitan conceptualizar el espacio y el tiempo, desde la tradición de investigación newtoniana, requieren de:

- Explorar los preconceptos que tiene el estudiante en torno al espacio y al tiempo.

- Utilizar el componente histórico que permita abordar los conceptos desde la época de los griegos e ir presentando la manera como estos han evolucionado. Es decir, estudiar de la evolución del concepto de espacio y tiempo desde Aristóteles hasta Newton.

- Hacer uso de la epistemología para la identificación de aquellos problemas empíricos que dieron origen al estudio del espacio y del tiempo, así como de los problemas conceptuales que han surgido de las teorías que intentan resolverlos.

3) Para diseñar procesos de medición que permitan aplicar los conceptos del espacio y tiempo en el estudio del movimiento, se emplean:

- Prácticas de laboratorio sobre: caída libre (usando como instrumentos de medición una cinta y un ticómetro), movimiento en un plano inclinado (utilizando el *software*), y movimiento en un plano horizontal (utilizando una cinta y un ticómetro).

- La componente epistemológica que permita considerar que la tradición de investigación desde la cual se hace el estudio, proporciona un conjunto de directrices para el desarrollo de las teorías específicas, que fundamentan el tema y explican los problemas empíricos de su dominio.

- Resaltar cómo en el paradigma de la medición moderna, la medición es una de las varias nociones que la ciencia moderna ha tomado del sentido común. Sin embargo, la medición no aparece como parte de sentido común hasta que no se alcanza un estadio de civilización relativamente alto; por otra parte, la concepción de medición propia del sentido común ha cambiado a lo largo de la historia y se ha desarrollado enormemente.

- Mostrar cómo el proceso de descubrimiento de que una propiedad es medible y el de establecer el procedimiento para medirla se basan en la investigación experimental. Que cada vez que se inaugura una nueva rama de la física (la física es la ciencia que estudia esos procesos de medición), el primer paso es siempre hallar algún proceso para medir las nuevas propiedades en estudio, y hasta que no se resuelve este problema no puede conseguirse ningún gran progreso en la nueva rama. Su solución exige el descubrimiento de nuevas leyes.

4) Para utilizar las herramientas de la geometría analítica al aplicar los sistemas de coordenadas cartesianas a la representación gráfica del movimiento, se requiere de:

- Emplear los datos de las mediciones de distancia y tiempo obtenidas en las tres prácticas sobre el movimiento (caída libre, plano inclinado, plano horizontal).

- Analizar cómo el pensamiento de los pitagóricos, para quienes todos los objetos estaban formados por puntos o “unidades de existencia” en combinaciones que correspondían a las distintas figuras geométricas, influye en la tendencia nuestra a utilizar un sistema de coordenadas para representar la posición de un cuerpo en el espacio.

- Inducir al estudiante a representar gráficamente el movimiento de un cuerpo bien sea a lo largo de una recta, en un plano o en el espacio tridimensional. Tratar de hacer que identifique los puntos como la ubicación de aquella partícula material que hacemos mover.

- Tener en cuenta que, así como Leucipo y Demócrito fueron notables porque fueron los más explícitos al afirmar la teoría del atomismo, su filosofía común era que el mundo está compuesto por una cantidad infinita de átomos simples y eternos, y al igual que los pitagóricos, estos aseguraban que la realidad que subyace en la constantemente cambiante diversidad del mundo físico se podía expresar en términos matemáticos y, además, que los acontecimientos de este mundo estaban estrictamente determinados por leyes matemáticas.

- Este tipo de pensamiento hace parte de la necesidad de tratar de expresar el movimiento de los cuerpos a través de modelos matemáticos, y de buscar la expresión que determine la ley empírica que caracteriza dicho movimiento. Sin embargo, se ha de considerarse que en ese momento histórico no se tenía el aporte de los trabajos de la geometría analítica ni del cálculo.

- Resaltar el periodo clásico durante el cual la teoría del diseño matemático de la naturaleza quedó establecida y la investigación de las leyes matemáticas, institucionalizada.

- Hacer notar que se dice a menudo que Nicolás de Oresme contribuyó a la formación del concepto de función, a la representación funcional de las leyes físicas y a la clasificación de las funciones.

- Resaltar el trabajo de Descartes, quien introdujo en el plano las coordenadas x, y que ahora llamamos cartesianas. De este modo, a cada par de valores x e y corresponde un punto y, recíprocamente, a cada punto corresponde un par de coordenadas x, y.

- Tener en cuenta que la representación gráfica se puede interpretar de dos maneras distintas. Una de ellas es imaginar el movimiento como una serie de sucesos en el continuo unidimensional del espacio, sin mezclarlo con el tiempo, usando una imagen dinámica, según la cual las posiciones del cuerpo cambian con el tiempo. La otra consiste en formarnos una imagen estática del movimiento, considerando la curva en el continuo bidimensional espacio-tiempo. Según esta manera de interpretarlo, el movimiento está representado como algo que es, que existe, en el continuo bidimensional espacio-tiempo y no como algo que cambia en el continuo unidimensional del espacio.

5) Al emplear sistemas de coordenadas cartesianas que permitan la relación de variables físicas en la interpretación de movimientos, es preciso considerar:

- Que Aristóteles cita en su física el problema de la caída como un fenómeno central para cualquier teoría de la mecánica terrestre. Él mismo intentó entender por qué los cuerpos caen y por qué se aceleran en su caída. La física aristotélica daba a estos problemas soluciones que fueron tomadas en serio durante más de dos milenios.

- El concepto antiguo de rapidez que Aristóteles, entre otros, especificó como: *“la distancia recorrida en un tiempo dado”*. En nuestros días, decimos casi lo mismo, definiendo rapidez como *“la razón entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido correspondiente”*.

- Los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad.

- Que Galileo en su obra publicada en 1638, se enfrentó con el problema de la caída de los cuerpos e intentó hallar no por qué cae, sino cómo cae, es decir, en qué forma matemática la distancia recorrida y la velocidad alcanzada dependen del tiempo transcurrido en la caída y el espacio recorrido.

- La influencia de la matemática en la interpretación de los hechos físicos, pues un pensamiento matemático es el que permite estudiar cómo se relacionan las variables en la caída de los cuerpos.

- Que la relación entre magnitudes de diferente naturaleza (distancia-tiempo) hace resaltar el hecho de haber avanzado un eslabón más en el concepto de razón y proporción, y pasar a la proporcionalidad entre magnitudes de distinta clase.

- Que desde el punto de vista histórico debido a que los cuerpos en caída libre alcanzaban una velocidad fuera de la capacidad de los instrumentos de medidas de que se disponía entonces, Galileo se aproximó al problema de verificación a través de la gravedad. Demostró que un cuerpo que desciende por un plano inclinado de una altura dada, alcanza una velocidad no ligada con el ángulo de la pendiente, y que su velocidad final es la misma que si hubiera caído a través de la misma altura vertical.

- La utilidad del trabajo de laboratorio y la implementación de las simulaciones computacionales.

- Que, así como Galileo planteó la pregunta del movimiento de los cuerpos en caída, del modo siguiente: ¿es v proporcional a s? o ¿es proporcional a t? El investigador moderno preguntará: ¿Qué función es el número v, que representa la velocidad, de los números s y t que representan, respectivamente, la distancia recorrida y el tiempo de caída?

6) Para utilizar sistemas de coordenadas cartesianas que representen relaciones entre variables y permitan la generalización al concepto de función, consideramos lo siguiente:

- Descartes no consideró x e y como incógnitas por obtener de una ecuación inicial, sino como variables, observando la interdependencia de ellas. En la ecuación $f(x, y) = 0$ determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. En general, este lugar será una curva.

- Es muy importante hacer que el estudiante analice el movimiento como una función y no como algo simplemente físico.

- La representación gráfica utilizando coordenadas espaciales y la inclusión de gráficas espacio-temporales permiten hacer exploraciones y aclarar dudas en cuanto al uso y la interpretación de gráficas.

- Como una de las hipótesis de Galileo era, pues, que la velocidad adquirida en la caída es proporcional al tiempo de caída, se justifica la necesidad de la práctica de laboratorio para averiguar mediante el experimento si esta hipótesis concordaba o no con los hechos observados. Sin embargo, hay que tener en cuenta que como resultaba difícil probar por algún medio directo que la velocidad adquirida fuera proporcional al tiempo de caída, en cambio, era más fácil averiguar la ley según la cual la distancia aumenta con el tiempo, aún hoy día procedemos a hacer esta comprobación de la misma manera.

- La importancia de la representación de las variables por símbolos. Y el empleo de funciones o proyecciones o representaciones.

- La idea de función, proyección o representación es sin duda uno de los conceptos fundamentales que acompañan a la matemática en todos sus pasos de teoría o de aplicación.

- A Galileo, quien descubrió la ley cuadrática de caída libre de los graves, según la cual la caída s de un cuerpo que cae libremente en el vacío, es una función cuadrática del tiempo t transcurrido desde cuando se le soltó:

$$s = {}^{1}/_{2}\ gt^2$$

Y es g una constante que tiene el mismo valor para todo cuerpo en el mismo lugar de la Tierra.

- Tener en cuenta que, mediante esta ley, Galileo convirtió una ley natural contenida en el movimiento efectivo de los cuerpos en una función matemática construida *a priori*, y esto es lo que la física intenta conseguir con todo fenómeno. Esa ley ha sido trazada por la naturaleza, la cual parece establecer sus planos con una fina sensibilidad para con la sencillez matemática y la armonía. Pero es claro que la naturaleza no se ve inhibida por la necesidad de tener que ser comprensible.

- El trabajo de Galileo, como un ejemplo de cómo la matematización de los conceptos físicos representaron un gran avance hacia la madurez de la ciencia.

- Considerar los siguientes rasgos característicos del proceso matemático:

  - ✓ Variables, como t y s de la expresión $s = ½\ gt^2$, cuyos valores posibles pertenecen al campo de los números reales y que podemos repasar enteramente porque es un campo nacido de nuestra propia y libre construcción.

  - ✓ La representación de esas variables por símbolos.

  - ✓ Funciones o proyecciones o representaciones construidas *a priori* del campo de una variable t sobre el campo de otra, s. El tiempo es la variable independiente.

- Estas expresiones se pueden resumir en la siguiente ecuación:

$$y = ½\ x^2$$

Esta expresión general representa el paso de las magnitudes variables concretas s, t, etc., a las variables generales x e y, y de las relaciones concretas anteriores, a la forma general $y = ½\ x^2$

- Al estudiar una función hay que dejar que la variable independiente recorra todo su campo. Una conjetura acerca de la interdependencia de cantidades de la naturaleza puede examinarse en el pensamiento, incluso antes de someterla a la prueba de la experiencia, por el procedimiento de estudiar si se cumple a través de todo el campo de las variables independientes. A veces algunos *casos límites* revelan sin más que una conjetura es insostenible.

- Recordar el trabajo de Descartes mediante el cual, este introdujo en el plano las coordenadas x, y que ahora llamamos cartesianas. De modo que a cada par de valores x e y corresponde un punto y, recíprocamente, a cada punto corresponde un par de coordenadas x, y. Así, la ecuación $f(x, y) = 0$ determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. En general, este será una curva.

- Tener en cuenta, de igual forma, que un lugar geométrico que venga dado por una condición geométrica puede definirse también mediante una ecuación que exprese la misma condición en lenguaje algebraico, por medio de coordenadas.

- Es importante aplicar procesos para la obtención de ecuaciones a partir de gráficos.

- Resaltar que Fermat y Descartes con la disciplina que crearon, la llamada geometría de coordenadas o analítica, tenían como idea central asociar ecuaciones algebraicas a las curvas y superficies. Es esta una de las vetas más ricas y fructíferas del pensamiento matemático que jamás se haya encontrado, rasgo característico de la tradición de investigación cartesiana.

- La definición más explícita del concepto de función en el siglo XVII fue dada por James Gregory en su *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* (1667), quien definió una función como *"una cantidad que se obtiene de otras mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante otra operación imaginable"* (Kline, 1972).

- Por otra parte, desde el mismo comienzo de su trabajo sobre el cálculo, es decir, desde 1665 en adelante, Newton utilizó el término "fluent" (fluyente) para representar cualquier relación entre variables.

- En un manuscrito en 1673, Leibniz utilizó la palabra "función" para significar cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva —por ejemplo, la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada—. La curva misma, se decía, dada mediante una ecuación. Leibniz también introdujo las palabras "constante", "variable" y "parámetro", esta última utilizada en conexión con una familia de curvas.

- En su *Historia* (1714), Leibniz usó la palabra "función" para significar cantidades que dependen de una variable.

- La notación $f(x)$ fue introducida por Euler en 1734. El concepto se convirtió inmediatamente en central en los trabajos sobre el cálculo.

- Las leyes físicas se refieren a relaciones entre cantidades variables. Cuando una variable y depende de otra variable x, se dice que y es función de x. Así, por ejemplo, la distancia a que se encuentra un móvil respecto de su punto de partida es función del tiempo; la atracción entre dos imanes es función de su distancia; la tensión de un muelle es función de su longitud.

- Igual que el concepto de número real es la imagen abstracta del valor real de una magnitud arbitraria, así, una variable es la imagen abstracta de una magnitud que varía, lo que supone distintos valores durante el proceso en consideración. Una variable matemática x es "algo" o más exactamente, "cualquier cosa", que puede tomar distintos valores numéricos. Este es el sentido general de variable; en particular podemos entender por ella, el tiempo, la distancia o cualquier otra magnitud variable.

- Una función es la imagen abstracta de la dependencia de una magnitud respecto a otra. En la matemática, la afirmación de que y es función de x únicamente significa que a cada posible valor de x le corresponde un valor definido de y. Esta correspondencia entre los valores de y y los valores de x se llama función.

7) Para utilizar el concepto de razón de cambio en el proceso de abstracción de los conceptos de velocidad y aceleración, es preciso considerar aspectos tales como:

- Una de las contribuciones de Nicolás de Oresme (1323-1382) fue el estudio del cambio. Recordemos que Aristóteles distinguía nítidamente entre cualidad y cantidad. La intensidad de calor era una cualidad. Para cambiar la intensidad, una sustancia, una especie de calor, debe perderse y otra añadirse. Oresme afirmaba que *"no había tipos diferentes de calor sino más o menos cantidad de este"* (Kline, 1972).

- Varios escolásticos del siglo XIV en Oxford y París, incluyendo Oresme, comenzaron a pensar sobre el cambio y la velocidad del cambio cuantitativamente. Estos autores estudiaron el movimiento uniforme (movimiento con velocidad constante), movimiento diforme (movimiento con velocidad variable) y movimiento uniformemente diforme (movimiento con aceleración constante).

- Para estudiar el cambio y la velocidad del cambio, Oresme siguió la tradición griega afirmando que las cantidades medibles distintas de números podían representarse mediante puntos, líneas y superficies. Por ello, para significar el cambio de la velocidad con el tiempo, representa el tiempo a lo largo de una línea horizontal, que llama longitud, y las velocidades en distintos tiempos mediante líneas verticales, que llamó latitudes.

- Oresme asociaba el cambio físico con toda figura geométrica. El área completa representaba la variación en cuestión; no había referencia a valores numéricos.

- Que el comportamiento de un móvil puede representarse mediante un gráfico que muestra su distancia del punto de partida de cada momento. Es útil construir gráficas de distancia vs. tiempo, y someterlas al análisis respectivo.

- Si el movimiento es uniforme, de tal modo que a iguales incrementos de distancia corresponden iguales incrementos de tiempo, la gráfica será una línea recta. En otro caso será una curva.

- La velocidad del cuerpo es la medida en que aumenta la distancia. Es claro que la inclinación de la línea puede representarla. Cuando la curva sube muy abruptamente, eso quiere decir que a un pequeño incremento de tiempo corresponde un gran aumento de distancia. Cuando la pendiente es más suave, eso significa que el mismo incremento de tiempo corresponde a un menor incremento de distancia. Por tanto, el problema de calcular la velocidad es el problema de calcular la inclinación (o gradiente) de la línea. Ahora bien, la inclinación de una curva es la tangente. Por tanto, nuestro problema consiste en hallar la inclinación (esto es, la dirección exacta) de la tangente. Así, un problema mecánico es esencialmente idéntico a un problema geométrico.

- Con frecuencia nos interesa comparar los incrementos o las razones de cambio de dos variables funcionalmente relacionadas. Como en el caso de la distancia y el tiempo, el problema es siempre equivalente al de hallar la dirección de la tangente a una curva. Por esta razón el problema de la tangente no tiene ni mucho menos un interés exclusivamente geométrico. (En sus primeros tiempos, el cálculo diferencial se llamó a menudo "método de las tangentes").

- La velocidad y la aceleración son cualidades del movimiento, pero el rasgo de la velocidad (y la aceleración) que le da toda su importancia la hace al mismo tiempo totalmente insusceptible de medición por el proceso fundamental.

- La necesidad de cuestionar al estudiante nuevamente sobre los procesos de medición e inducirlo a la interpretación de los resultados al determinar las velocidades y aceleraciones del movimiento, así como los métodos empleados para calcularlos. Es importante que cuando sea posible se le vaya enfrentando al estudiante con situaciones problemáticas que lo motiven a sugerir soluciones y comprobar su validez, así como a ser consciente de la evolución del conocimiento. El ser humano siempre se ha encontrado ante este tipo de situaciones, por tanto, se requiere ponerlo en contacto con la historia para observar cómo fueron resueltas estas dificultades y cómo las resuelve él hoy día.

- Considerar una curva de espacios. Si el movimiento es uniforme, el número que mide un incremento cualquiera de la distancia dividido por el número que mide el correspondiente incremento de tiempo es siempre el mismo valor como medida de la velocidad. Pero si procediéramos de este modo cuando la velocidad es variable, obtendríamos valores muy diversos para la velocidad. De todos modos, cuanto menor es el incremento del tiempo, tanto más se aproximará a una línea recta el trocito de curva de espacios que corresponda a ese incremento de tiempo, y tanto más se aproximará, por tanto, a la uniformidad de incremento (o disminución) de s. Así, si denotamos el incremento de t por "Δt" (notación en la cual "Δ" no representa un número, sino la frase "el incremento de") y el correspondiente incremento (o "decremento" o disminución) de s por "Δs", podemos definir la velocidad media en ese elemento o trocito del movimiento por:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

8) Para emplear el concepto de velocidad en el proceso de conceptualización de la derivada, se tendrá en cuenta que:

- Según la expresión $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, por pequeño que sea Δt, la línea representada por Δs no es, por lo menos corrientemente, del todo recta, y la velocidad en el instante t [que, en la terminología del cálculo diferencial de Leibniz, se define como el cociente de incrementos "infinitamente pequeños" y se simboliza por ds/dt (porque se sustituyen las Δ por d cuando consideramos "infinitésimos")] queda definida sólo aproximadamente.

- La nueva noción de velocidad incluye como caso particular la de velocidad uniforme. De hecho, las reglas del cálculo infinitesimal nos autorizan a inferir de la ecuación $\mathrm{ds/dt = a}$ (en la cual a es alguna constante) la ecuación $\mathrm{s = at + b}$ (siendo b otra constante). Tenemos que recordar que todo eso no ha estado *explícitamente* formulado hasta unos cincuenta años después de que Galileo publicara sus investigaciones sobre el movimiento de caída libre.

- Si consideramos una curva de velocidades, el movimiento uniformemente acelerado ocupa en ella el mismo lugar que la velocidad uniforme en la curva de espacios.

Si denotamos por v la medida numérica de la velocidad al final de t unidades de tiempo, la aceleración, en la notación del cálculo diferencial, se mide por:

$$\frac{dv}{dt},$$

y la ecuación $\mathrm{dv/dt} = h$, en la que h es alguna constante, es la ecuación del movimiento uniformemente acelerado.

- En la mecánica newtoniana tenemos que considerar movimientos variablemente acelerados, y este es el punto en el cual se hace necesario en la mecánica teórica el cálculo infinitesimal o algún cálculo equivalente, como el "método de las fluxiones" de Newton.

- Los escritos de Descartes fueron altamente influyentes; su filosofía deductiva y sistemática se extendió en el siglo XVII e impresionó a Newton, especialmente por la importancia del movimiento en ella.

- Un paso decisivo de la matemática de las magnitudes variables fue dado por Newton y Leibniz durante la segunda mitad el siglo XVII, al sentar las bases del cálculo diferencial e integral. Este fue el verdadero comienzo del análisis, puesto que el objeto de este cálculo son las propiedades de las funciones, distinto del objeto de la geometría analítica, que son las figuras geométricas.

- Las matemáticas se hicieron importantes en la metodología científica y se aprovecharon tanto de su adopción, que el programa de Galileo fue aceptado por gigantes como Newton.

- Newton proporcionó una exposición de sus ideas en el libro *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*. En este trabajo dice que considera sus variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de elementos infinitesimales. En los cuales a una cantidad variable la llama fluyente, y a su cambio relativo, fluxión.

- En este trabajo Newton establece más claramente el problema fundamental del cálculo: dada una relación entre dos fluyentes, obtener la relación entre sus fluxiones y recíprocamente. Las dos variables de las que se da la relación pueden representar cualquier cantidad. Sin embargo, Newton piensa en ellas como cambiantes con el tiempo porque es una forma de pensar útil, aunque, como señala, no es necesaria.

- En su *Tractatus de Quadratura Curvarum* (*Tratado sobre la cuadratura de las curvas*), Newton dice que había abandonado el infinitesimal o cantidad infinitamente pequeña. Critica ahora el despreciar los términos que incluyen o porque, según afirma:

  En matemáticas no se debe despreciar ni los errores más diminutos... Considero las cantidades matemáticas, en este punto, no como consistentes en pequeñas partes, sino como descritas por un movimiento continuo. Las líneas están descritas, y por tanto generadas, no por la yuxtaposición de partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de líneas; los ángulos por la rotación de los lados; las porciones de tiempo por un flujo continuo...

  Las fluxiones son, hasta la aproximación que queramos, como los incrementos de las fluyentes generados en tiempos iguales y tan pequeños como sea posible y, para hablar con precisión, están en la razón primera de los incrementos emergentes; aunque pueden expresarse mediante líneas cualesquiera que sean proporcionales a ellos (Kline, 1972).

- La interpretación geométrica dada por Newton.

- Leibniz nos ha enseñado a concebir el reposo, no como opuesto contradictoriamente al movimiento, sino como un caso límite del movimiento. Y, mediante una argumentación basada en la idea de continuidad, consiguió refutar *a priori* las leyes del impacto propuestas por Descartes.

9) Para aplicar el concepto de función y su representación gráfica en la construcción del concepto de pendiente, se considerarán los siguientes aspectos:

- Los conceptos matemáticos de variable y función son generalizaciones abstractas de variables concretas (tales como tiempo, distancia, velocidad, ángulo de rotación y área de una superficie barrida), y de las interdependencias entre ellas (la distancia depende del tiempo, etc.).

- Reflexionar sobre cómo evoluciona el conocimiento, puesto que a partir del punto de donde se inició el estudio de la función como movimiento, ya se ha alcanzado un grado de abstracción que permite abordar el concepto de función de una manera más general.

- Partir de los aportes de Descartes y Fermat a la geometría analítica que permitan construir la representación gráfica de la pendiente.

10) Utilizar el aporte de los trabajos de Leibniz en la construcción del concepto de derivada.

11) Para desarrollar progresivamente actividades tendientes a la comprobación de las hipótesis del trabajo teniendo en cuenta en todo el proceso la importancia de utilizar marcos teóricos con componentes físicos, matemáticos y epistemológicos, se ha diseñado en la segunda parte de este trabajo un artículo que trata sobre la evolución del concepto de función a partir del estudio del movimiento.

12) Con el fin de controlar en el proceso las manifestaciones del estudiante en torno a su pensamiento matemático y al empleo que haga de la matemática en la interpretación del mundo físico, es preciso realizar continuamente pruebas que permitan identificar estos aspectos en el proceder del estudiante al solucionar los diferentes problemas que aparecen en el trabajo.

Capítulo 4.

El juego de actores: enfoque prospectivo en la visualización de la evolución del problema y construcción del escenario futuro

El método prospectivo conocido como juego de actores permite mostrar la posible evolución del problema y la aparición de potencialidades. Este método depende únicamente del conocimiento que tengamos de las acciones que se quieren emprender, así se puede estimar un futuro probable y, con base en este, estar en capacidad de diseñar el futuro deseable (Mojica, 1991).

Se han tomado las técnicas prospectivas como guía metodológica, ubicando como actores del proceso las observaciones provenientes de la docencia de la matemática, la física y la epistemología en el estudio de la función, de tal manera que, para la determinación del futuro de las acciones diseñadas, se tenga en cuenta los aportes que desde estos tres campos del saber se puedan dar para lograr así una docencia de la matemática y de la física articulada.

La técnica del juego de actores nos permite visualizar la manera cómo evolucionan las acciones. Se aprecia con él el dinamismo de una realidad que antes no se veía sino estáticamente. Con el fin de concretarlos en los proyectos y anhelos con que se quiere dar solución a determinados problemas que surgen en el diseño del proceso.

Es preciso tener en cuenta que tanto el proyecto como el anhelo se refieren a solución de problemas. Esto quiere decir que, si se tiene un problema y, al mismo tiempo, un proyecto encaminado a solucionarlo, contaremos con elementos de juicio para determinar la evolución favorable de este problema.

Con el fin de presentar en forma ordenada la aplicación de la técnica prospectiva e indicar la evolución de las disfunciones del sistema o el desarrollo de las potencialidades, se presenta a continuación una descripción de los aspectos detectados al diseñar desde el trabajo de aula las acciones planteadas en el proceso.

Problema: “¿Cómo relacionar la enseñanza de la matemática y la enseñanza de la física en el estudio de la función desde el movimiento?”.

Hipótesis:

1) El estudio del movimiento de los cuerpos contribuye a la formación del concepto de función.

2) La utilización de la epistemología en el proceso de enseñanza-aprendizaje favorece la formación de conceptos y contribuye a la reconstrucción del conocimiento.

3) La interrelación de la matemática y la física en las actividades de enseñanza-aprendizaje de estas dos áreas representa una fortaleza para los procesos de conceptualización.

Evolución del problema

Aplicación del juego de actores. Esta técnica permite:

- Estudiar cada una de las disfunciones del problema (variables claves) en su estado actual.
- Plantear los proyectos, los cuales dependen de la evaluación de las acciones planteadas en el trabajo, de acuerdo con su gobernabilidad e impacto; esto permite identificar las acciones ejecutables a corto plazo (necesidades).
- Plantear los anhelos, los cuales permiten identificar acciones (potencialidades) ejecutables a largo plazo.

- ***Concepto de espacio***

Estado actual: teniendo en cuenta que el conocimiento precientífico se caracteriza por las apreciaciones intuitivas, por aquellas impresiones que nos afectan directamente, se puede decir que el concepto de espacio se encuentra en el primer estadio del proceso de conceptualización, es decir, en la etapa en la cual la idea que la persona tiene procede de su experiencia con el entorno.

Por tal motivo, es característico al explorar las concepciones que el estudiante tiene sobre el espacio, encontrar expresiones que muestran la asociación de este término con un objeto real, el entorno físico, y en algunos casos también se halla asociado al espacio exterior.

A pesar de que el estudiante de primer semestre de Licenciatura en Matemática y Física ha tenido una instrucción de dos años en el área de física clásica, no posee una formación que le permita expresar el concepto fundamentado desde la tradición de investigación newtoniana.

Aunque Newton no definía el espacio, lo caracterizaba como una especie de matriz tridimensional estacionaria, en la cual pueden existir objetos y a través de la cual pueden moverse sin que se produzca ninguna interacción entre el espacio y el objeto. Luego, como el espacio está ahí, tenemos la tarea de colocarle marcas a las diferentes posiciones que tenga el cuerpo en cierto tiempo, medir las distancias entre posiciones consecutivas y representarlas en una recta, en un plano o en un sistema de coordenadas tridimensional, dependiendo de la trayectoria que siga dicho cuerpo.

La situación anterior parece sencilla de asimilar, lo cual hace que en muchos casos en el trabajo docente olvidemos la complejidad del proceso de conceptualización que se presenta ahí, y se llegue directamente a la situación abstracta sin haber establecido unos pasos anteriores en una etapa que aborde el problema desde un aspecto concreto.

Se observa cómo el estudiante representa gráficamente las posiciones de un cuerpo, en una dimensión, con la ayuda de una recta. Asume que el cuerpo es unidimensional, sin expresarlo y sin reflexionar, pues al pedir justificaciones sobre el empleo que hace de estos diagramas, se evidencia el carácter memorístico de su trabajo en niveles anteriores de su proceso educativo.

Se están subutilizando las herramientas de representación gráfica con las correspondientes ecuaciones, procedentes de la matemática en el trabajo con la asignatura de física, puesto que, por una parte se hace una transmisión de información en la clase de matemáticas sin emplear ejemplos procedentes de la física que pueden contribuir al proceso de conceptualización, de tal manera que en la mayoría de los casos, en la clase de física, se repiten algunos contenidos matemáticos, convirtiéndola en otra matemática y perdiendo la oportunidad de profundizar en las teorías propias de la física, así como en la utilización de la matemática en el estudio de los modelos que generan las teorías procedentes de las ciencias naturales.

Proyectos:

Desarrollar actividades que le permitan al estudiante y al docente reflexionar sobre las características del conocimiento precientífico y científico, que le posibiliten al estudiante y al docente evaluar la validez de sus interpretaciones desde estos puntos de vista.

Efectuar procesos de medición y representación gráfica justificados desde la tradición de investigación newtoniana, que permitan ascender en el proceso de conceptualización del espacio y utilizar sistemas de coordenadas cartesianas, para la representación de espacios unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales, de tal manera que se reflexione sobre el carácter funcional de la representación del modelo de espacio newtoniano.

Anhelos:

Desarrollar actividades que permitan el manejo de la representación espacial en sistemas de coordenadas diferentes a las rectangulares.

Diseñar actividades que faciliten el desarrollo de procesos de conceptualización del espacio relativista.

- ***Concepto de tiempo***

Estado actual: plantea Newton en sus *Principia*, que no define el tiempo, el espacio, la posición y el movimiento, ya que son bien conocidos de todos. Efectivamente al estar familiarizados con el término tiempo, se descuida la exploración de manifestaciones en el estudiante relacionadas con el grado alcanzado por este en el proceso de conceptualización.

Cuando se dedica cierto momento de la actividad docente a identificar rasgos característicos del estado del concepto, se encuentra que el estudiante asocia el tiempo con la medida del tiempo registrada por un cronómetro. De tal manera que cuando detiene el cronómetro, considera que el tiempo se detiene, y aunque crecemos siendo buenos newtonianos, en el sentido de que nuestras ideas intuitivas sobre el tiempo están en total armonía con las de Newton, desconocemos que desde este punto de vista el tiempo es absoluto y discurre sin relacionarse con ningún suceso o hecho físico.

Cuando se estudia el movimiento de los cuerpos desde la física clásica, los conceptos de espacio y tiempo son tratados de manera separada. Sin embargo, en muchas ocasiones el estudiante emplea expresiones como “distancia de tiempo” para referirse a intervalos en los cuales se analiza el movimiento de un cuerpo. Al parecer esta confusión procede de la utilización de un sistema de coordenadas bidimensional para representar el movimiento del cuerpo, en el cual un eje representa la distancia recorrida por el cuerpo, y el otro eje el tiempo transcurrido en el intervalo estudiado.

Hay desconocimiento de las condiciones establecidas por la tradición de investigación newtoniana en torno al concepto de tiempo. Aunque el estudiante tiene la noción intuitiva de que el tiempo no retrocede, muchas veces no tiene en cuenta este hecho al analizar gráficas de distancia vs. tiempo, y al tener representado en el gráfico retrocesos en el tiempo, anota en sus descripciones que el cuerpo se devuelve en el tiempo y, por tanto, se acerca al punto de donde salió.

Proyectos:

Desde la tradición de investigación newtoniana, estudiar el concepto de tiempo y confrontarlo con las ideas procedentes de la teoría de la relatividad.

Anhelos:

Analizar el concepto de tiempo en su desarrollo histórico, identificando los rasgos característicos procedentes de diferentes tradiciones de investigación, que permitan explorar la evolución de las teorías científicas que lo han tratado.

- ***Medición***

Estado actual: los procesos de medición de distancias y tiempos, en las actividades relacionadas con el estudio del movimiento de los cuerpos a lo largo de trayectorias rectilíneas, ejecutados en el trabajo de aula, que justifican las acciones planteadas en este trabajo, no pasan de ser procesos tendientes a la recolección de datos. Con la aplicación de unas pocas técnicas estadísticas para el respectivo análisis, actividades que en algunos casos no pasan de ser procesos repetitivos y carentes de significado.

Es frecuente observar la desorientación del estudiante cuando se le enfrenta a procesos de medición en las prácticas de laboratorio de física, pues no sabe cómo observar y, por lo tanto, le es muy difícil identificar aquellas características que pueden ser estudiadas y sometidas a medición.

La situación se torna cada vez más problemática, ya que si no puede realizar mediciones adecuadas que le permitan apropiarse de datos para su respectiva relación en interpretación, la confrontación de sus resultados con el componente procedente de la física teórica, se hace imposible.

El estudiante frecuentemente utiliza el recurso de tomar desde la teoría física que esté estudiando aquellos modelos matemáticos representados por las ecuaciones, identifica las variables que intervienen en ellas y procede a tomar unos pocos datos en la práctica, con el fin de reemplazarlos en la ecuación para presentar su informe. Aunque desde las actividades diseñadas en el trabajo con la asignatura de física, se le involucra en el trabajo de análisis de datos, interpretación de gráficas, corrección de curvas, obtención de leyes empíricas expresadas por las ecuaciones procedentes del trabajo estadístico sobre los datos, etc.

En lo correspondiente al tratamiento de la medición como una función, no se presentan antecedentes en el estudiante de haber sido familiarizado con esta perspectiva, pues en nuestro trabajo docente la dejamos en un nivel netamente concreto y descuidamos la importancia de hacer que el estudiante progrese en el proceso hacia niveles abstractos en los cuales la teoría matemática cumple un importante papel en la generalización y formalización de los conceptos.

Proyectos:

Aplicar técnicas estadísticas para el procesamiento de datos procedentes de las mediciones, de tal manera que el estudiante se vea obligado a aplicarlas constantemente y a profundizar en la teoría estadística de la medición.

Utilizar las actividades de medición como situaciones concretas para el estudio de la función, de tal manera que el estudiante vaya de manera progresiva ascendiendo en el nivel de formalización que le permita comprender el concepto de métrica.

A partir de procesos de medición (por ejemplo, de distancias y tiempos), facilitar al estudiante herramientas para la interpretación de la teoría física, expresada mediante modelos matemáticos (por ejemplo, la función movimiento).

Anhelos:

Desarrollar procesos que contribuyan al estudio de los espacios métricos, a partir de ejemplos procedentes de la física.

- ***Uso de la geometría analítica***

Estado actual: en el bachillerato se trabaja la geometría analítica en un nivel abstracto, por ejemplo, las cónicas se tratan desde la representación en el sistema de coordenadas cartesianas y la obtención de una ecuación, o viceversa. Pero sin iniciar su estudio a partir de situaciones concretas para luego ir ascendiendo en el proceso de abstracción hasta concluir en la simbolización mediante ecuaciones.

Además, se desconoce el desarrollo histórico que ha tenido esta rama de la matemática y, por lo tanto, se emplea en los procesos de enseñanza-aprendizaje, sin tener en cuenta que para el estudiante también es necesario realizar procesos graduales que le permitan evolucionar en sus conceptos.

Se acostumbra tomar un sistema de coordenadas bidimensional para representar la relación distancia-tiempo, en situaciones relacionadas con la enseñanza de la física, considerando que es muy sencillo cambiar la letra “y” del eje coordenado vertical, por la letra “d”, o la palabra “distancia”, y la letra “x” del eje coordenado horizontal, por la letra “t” o la palabra “tiempo”, considerando que el estudiante asocia fácilmente ese cambio de letras y de inmediato comprende que la gráfica ahora tiene un significado físico, que es el movimiento.

Sin embargo, la situación es muy distinta; primero, el estudiante asocia la curva representada en el sistema espacio-temporal, como una curva sencillamente espacial, asociándola con la trayectoria del cuerpo y, segundo, parece que desconoce por completo que la curva representa un movimiento.

Esto origina dificultades para interpretar las gráficas del sistema de coordenadas, como ejemplos de representación de funciones y, más concretamente, para identificar el movimiento de un cuerpo como un tipo de función.

Por otra parte, hay dificultad para extraer de la curva de espacio-tiempo la ecuación representativa. Aunque el estudiante muchas veces usa ecuaciones y las representa, no las analiza y asocia con situaciones concretas.

Proyectos:

Emplear la geometría analítica como elemento básico en la representación gráfica del movimiento, como una de las etapas iniciales del proceso de representación de las funciones.

Obtener las ecuaciones del movimiento mediante procesos que muestren que ellas son el resultado final de una actividad gradual y progresiva que parte de situaciones cotidianas concretas, y permite consolidar en el pensamiento del estudiante ciertas características, las cuales a medida que se progresa en el proceso adquieren mayor rigor conceptual, para ir avanzando hacia la abstracción del concepto de movimiento.

Desarrollar actividades que permitan comprender por qué es importante la representación simbólica, empleada en una ecuación o grupo de ecuaciones que acompañan a la teoría física, así como dar la importancia que merece la implementación de la modelación matemática en los procesos de conceptualización.

Anhelos:

Realizar actividades para el estudio de la geometría analítica que incluyan la aplicación de esta a situaciones procedentes de la física, y que permita investigar aspectos de la docencia de la matemática y la física integrada.

- ***Concepto de variable***

Estado actual: como se observa al trabajar la representación en sistemas de coordenadas cartesianas de las variables x e y empleadas para denominar los valores asignados a los ejes coordenados en el campo de los números reales, el estudiante probablemente hace el cambio de estas letras por las correspondientes a distancia y tiempo, tratadas en la física; sin embargo, no pasan de ser cambios de letras, puesto que no hay análisis respecto a las condiciones que permiten que la distancia sea considerada como una variable, que pueda representarse mediante el sistema de coordenadas escogido. Lo mismo sucede con el tiempo. Esta dificultad está muy relacionada con los conceptos de espacio y tiempo, mencionados anteriormente en este documento, y que requieren de un modelo conceptual, proveniente para este caso de la tradición de investigación newtoniana.

Es claro para el estudiante que la letra que representa la distancia y la que representa el tiempo corresponde a un rango de valores, pero la dificultad comienza cuando en el caso de la distancia se encuentra con valores en el eje negativo, por ejemplo. O en el caso del tiempo, cuando se le cuestiona sobre la posibilidad de trabajar con valores positivos y negativos para el tiempo.

Proyectos:

Generar procesos que permitan, a partir del estudio del movimiento, hacer interpretaciones de las variables tratadas y establecer relaciones entre ellas, como requisito para el diseño de procesos de trabajo experimental, que lleven a la obtención de leyes empíricas formalizadas por la representación simbólica de dichas variables, mediante ecuaciones que conduzcan al diseño de modelos matemáticos.

Anhelos:

Realizar procesos de trabajo tendientes a desarrollar en el estudiante habilidades para el análisis de procesos experimentales conducentes a la obtención de modelos matemáticos, con la orientación de metodologías científicas de investigación.

- ***Concepto de función***

Estado actual: este concepto se trata de una forma tan abstracta que el único recurso que tiene el estudiante para responder en las evaluaciones es la memorización. No se tiene en cuenta la influencia de hechos físicos como por ejemplo el movimiento de los cuerpos, que permitan que el estudiante asimile desde un nivel concreto el significado de función, y vaya progresivamente evolucionando en su proceso de conceptualización.

Hay una completa ausencia de la relación entre el estudio del movimiento y el estudio de la función, lo que hace que el estudiante utilice en física herramientas matemáticas sin tomar conciencia de la razón de su aplicación y de la importancia del proceder matemático en este tipo de situaciones.

Cuando se le presentan al estudiante gráficas de distancia vs. tiempo, por ejemplo, en las cuales aparentemente el tiempo se detiene y la distancia recorrida continúa aumentando, el estudiante, aunque describa el gráfico en forma oral o escrita de esta manera, termina concluyendo que el cuerpo se encuentra en movimiento, sin reflexionar que no es posible que un cuerpo se encuentre en varias posiciones en el mismo instante. Nunca aparece la alusión de parte de él al hecho de que el movimiento del cuerpo desde el punto de vista matemático se puede expresar como una función.

Proyectos:

Diseñar procesos de trabajo que permitan conceptualizar la función partiendo de situaciones concretas procedentes del estudio de la física.

Emplear en las prácticas de laboratorio los procesos que desde el punto de vista histórico han contribuido al desarrollo de la ciencia, que permitan emplear técnicas de trabajo experimental utilizadas en diferentes épocas y que han originado la creación de las teorías, en las cuales se resalte la importancia de la matemática en el proceso de abstracción cuyo resultado final es la simbolización.

Anhelos:

Propender por la conformación de un pensamiento funcional en el estudiante.

- ***Concepto de razón de cambio***

Estado actual: cuando se explora sobre el concepto de razón, se empiezan a detectar problemas de conceptualización, dado que en los mismos procesos de aprendizaje se aborda el estudio de la razón desde el punto de vista de la relación entre dos números, sin darle significación a cada una de las cantidades analizadas y a la relación entre estas. Esto conduce a problemas de conceptualización respecto a proporción y proporcionalidad. Se presenta ausencia en el estudiante de primer semestre de Licenciatura del Conocimiento de la Razón de Cambio, aunque en el bachillerato se debe haber abordado, tanto en el estudio de la velocidad de los cuerpos desde la asignatura de física, como en el cálculo.

Proyectos:

Diseñar procesos que permitan conceptualizar los siguientes aspectos: razón, proporción y proporcionalidad.

Al abordar el estudio de la velocidad de los cuerpos, generar la necesidad de interpretarlo desde el punto de vista de la razón de cambio.

Anhelos:

Orientar procesos de conceptualización de la razón de cambio desde los primeros grados de la educación básica secundaria, desde aspectos concretos, de modo que al ir avanzando en el nivel de escolaridad se pueda comprobar la evolución de este concepto en el pensamiento del alumno.

- ***Concepto de velocidad***

Estado actual: la idea de velocidad hace parte del lenguaje común porque es fácil tener una noción de ella a partir de situaciones intuitivas propias del conocimiento precientífico.

Esto permite encontrar correspondencias entre las ideas que poseían los griegos y las ideas que tiene cualquier persona, aunque no haya hecho un estudio formal de este concepto.

Sin embargo, al abordar este concepto desde el estudio de la física, a nivel del bachillerato, se presenta cargada de ecuaciones que caracterizan ciertos tipos de movimiento, sin hacer un trabajo progresivo y secuencial que le permita al estudiante apropiarse del conocimiento de una manera efectiva, sino que, por el contrario, se presenta el concepto inicialmente desde un aspecto concreto y luego se termina dando un salto a una etapa superior cargada de situaciones abstractas y sin significado para el estudiante, quien se limita a tomar ecuaciones y hacer reemplazos de valores con el fin de obtener respuestas numéricas que no son analizadas.

Para el estudiante es problemático justificar lo que significan las velocidades negativas, así como analizar el comportamiento de la velocidad de un cuerpo desde el punto de vista funcional. A esto se asocia la dificultad de interpretar el significado de las aceleraciones.

Aparece en la docencia de la física a nivel del bachillerato, una incongruencia en la presentación de los contenidos relacionados con el estudio de la velocidad, puesto que, por una parte, no se presenta el concepto de razón de cambio para definirla, y además se incluye la velocidad instantánea haciendo uso del concepto de límite, cuando aún en este nivel no se encuentra formalizado.

Una situación similar se presenta en la asignatura de física general I de la Licenciatura en Matemáticas y Física, cuando se hace el estudio del movimiento de los cuerpos aplicando herramientas matemáticas procedentes del cálculo, que hasta ese momento del curso se comienzan a estudiar, como es el caso de la derivación e integración, desaprovechando la oportunidad de relacionar los contenidos.

Proyectos:

Efectuar el estudio de la velocidad de los cuerpos teniendo en cuenta su evolución a través de la historia, reflexionando en cada momento con respecto al paradigma reinante en la época.

Aprovechar las herramientas conceptuales provenientes de la física en torno al concepto de velocidad para formalizarlo con la ayuda de la matemática como elemento clave en la abstracción y para el diseño de modelos teóricos.

Anhelos:

Elevar el nivel de complejidad en torno al estudio de la velocidad y hacerlo extensivo al estudio de otros tipos de movimiento, retomando aquellos problemas que desde la física contribuyeron al avance de la matemática en cuanto a la evolución del cálculo.

- ***Concepto de pendiente***

<u>*Estado actual:*</u> la noción inmediata que muestra el estudiante cuando se le cuestiona por el concepto de pendiente es el relacionado con inclinación. A partir de ahí, el estado del concepto se reduce a recordar en el mejor de los casos la expresión que permite hallar la pendiente a una recta, a partir de la razón entre los incrementos de Y y los incrementos de X, y a obtener un número como representación de la información solicitada.

Al tratar de utilizar este concepto en el análisis de gráficas de distancia vs. tiempo, en el estudio del movimiento de los cuerpos, se presenta gran dificultad para relacionar el concepto de pendiente con el de velocidad, en el movimiento uniforme rectilíneo; o con el de aceleración en el movimiento uniforme acelerado.

En ciertas ocasiones el estudiante por memorización expresa que la pendiente de una recta corresponde a la tangente del ángulo de inclinación de dicha recta, pero hay dificultad para expresarla mediante una representación gráfica y un proceso ordenado que justifique su proceso de pensamiento.

<u>*Proyectos:*</u>

Analizar y convertir en herramientas para el trabajo de aula algunos métodos que han permitido presentar el concepto de pendiente en la historia de la matemática.

<u>*Anhelos:*</u>

Ampliar el estudio de la pendiente a situaciones relacionadas con cualquier tipo de curvas.

- ***Concepto de derivada***

<u>*Estado actual:*</u> a nivel de bachillerato, el estudio de la derivada se convierte en la mecanización y memorización de técnicas de derivación, que cuando van a ser utilizadas a la resolución de ejercicios propuestos en los textos, se han olvidado, o por lo menos se han confundido entre todas las expresiones acumuladas en el mal interpretado proceso de conceptualización.

Retomando los datos históricos, se encuentra que esta tendencia es característica de este tipo de trabajo puesto que el cálculo produjo gran cantidad de métodos que permitían resolver problemas de una manera eficaz. Sin embargo, a nivel de docencia se ha empobrecido esta herramienta dejando de lado la importancia de la formación de los conceptos, lo que origina que cuando el estudiante se enfrenta con la resolución de problemas que requieran su creatividad en la aplicación de estos conceptos, se encuentra desprovisto de habilidades para enfrentarlos.

Proyectos:

Fomentar una docencia en pregrado que forme al futuro licenciado en Matemáticas y Física, en sistemas de trabajo que presten especial atención a los procesos de conceptualización.

Anhelos:

Extender el estudio de la derivada a situaciones que permitan abordar temas de física relacionados con la mecánica de sólidos, mecánica de fluidos y el electromagnetismo, entre otros.

- ***Aplicación de la matemática a la ciencia natural***

Estado actual: en este trabajo, la rama de la ciencia natural que se ha considerado es la física; por tanto, no se hace referencia a otra área de la ciencia para efectos del presente análisis.

Se observa en la docencia de la física a nivel de bachillerato la tendencia por resolver ejercicios que impliquen la utilización de ecuaciones, en las cuales el resultado obtenido es un número que en muchos casos no representa ni cuantitativamente las características de la realidad.

En cuanto al trabajo de laboratorio, se emplean frecuentemente técnicas de procesamiento de datos, que terminan de nuevo en expresiones cuantitativas carentes de significado.

No existe en el estudiante la formación hacia una utilización de herramientas matemáticas que le permitan expresar la realidad mediante modelos matemáticos, que luego deben ser confrontados con los que le suministra la información teórica establecida.

Proyectos:

Diseñar procesos de trabajo en el laboratorio de física que permitan abordar los temas de la matemática desde las primeras etapas del proceso de conceptualización (nivel de lo concreto), e ir avanzando en el proceso (abstracción) con la ayuda de técnicas de trabajo experimental, conducentes a la obtención de modelos matemáticos que expliquen los hechos estudiados (simbolización-generalización).

Anhelos:

Realizar a nivel de docencia en pregrado, actividades de formación para los futuros docentes en la metodología del trabajo científico.

- ***Pensamiento matemático***

Estado actual: frecuentemente se asocia el pensamiento matemático con la capacidad para realizar cálculos numéricos de manera rápida, para resolver ejercicios que impliquen la aplicación de métodos "matemáticos", por ejemplo, resolver ecuaciones diferenciales para repetir la demostración de teoremas, etc., pero se desconoce lo que realmente significa "un pensamiento matemático". Esto origina una desorientación en los procesos de enseñanza de la matemática, pues cada docente la presenta de la manera como él la interpreta.

Se hace un poco difícil para un licenciado en Matemática y Física la investigación en docencia de la matemática, pues se desconocen las exigencias y características del pensamiento matemático, lo que impide orientar de manera efectiva el estudio.

Proyectos:

Capacitar al licenciado y al futuro licenciado en Matemáticas y Física en el conocimiento profundo de la disciplina matemática.

Anhelos:

Conformar grupos de investigación en torno a situaciones relacionadas con la docencia integrada de la matemática y la física.

- ***Identificación de problemas empíricos y conceptuales***

Estado actual: la docencia de la matemática y la física carece de la utilización del componente epistemológico en el aula de clase, que le permita reflexionar en torno a los temas de estudio y hacer del proceso educativo un sistema de identificación de aquellos problemas que han contribuido al avance de la ciencia natural y la matemática.

Proyectos:

Incluir en los procesos de conceptualización la reflexión epistemológica.

Anhelos:

Formar al futuro licenciado en Matemáticas y Física con herramientas conceptuales de carácter epistemológico que le posibilite relacionar la filosofía, la matemática y la física en el trabajo docente, así como aplicar la reflexión epistemológica en la transmisión de los conocimientos.

- ***Importancia de la evolución de las teorías***

Estado actual: generalmente en la práctica docente se presentan las teorías cuando se efectúa el proceso de transmisión del conocimiento, pero muy raras veces se someten a evaluación.

No existe una formación epistemológica que le permita al docente abordar el estudio de temas de carácter científico teniendo en cuenta la evolución de las teorías científicas.

Proyectos:

Abordar el estudio de los conceptos considerando su evolución histórica y su relación con la evolución del concepto en el pensamiento del estudiante.

Anhelos:

Formar al futuro licenciado en Matemáticas y Física en aspectos epistemológicos que le permitan generar en el aula actividades de reflexión y evaluación de las teorías científicas que se estén estudiando, a la luz de diferentes corrientes epistemológicas.

Construcción del escenario futuro

La calificación de los proyectos y anhelos, de acuerdo con criterios de gobernabilidad e impacto, permiten determinar qué planes se deben ejecutar a corto plazo y cuáles a largo plazo, lo cual posibilita visualizar las acciones hacia el futuro.

Para establecer la gobernabilidad de los proyectos y anhelos es preciso tener en cuenta que cuando nos referimos a gobernabilidad estamos mirando el grado en que la acción depende de otros. De acuerdo con la siguiente calificación:

Tabla 3. Grados de gobernabilidad

Escala	Tipo de Gobernabilidad	Descripción
5	Gobernabilidad fuerte	Si es del absoluto dominio de los actores interesados.
3	Gobernabilidad Media	Si se encuentra en el dominio de los actores siempre que otros concurran.
1	Gobernabilidad débil	Es indispensable que primero actúen otros para que así los interesados puedan actuar.
0	No gobernabilidad	Corresponde al dominio de otro.

Fuente: Mojica, F. (1991).

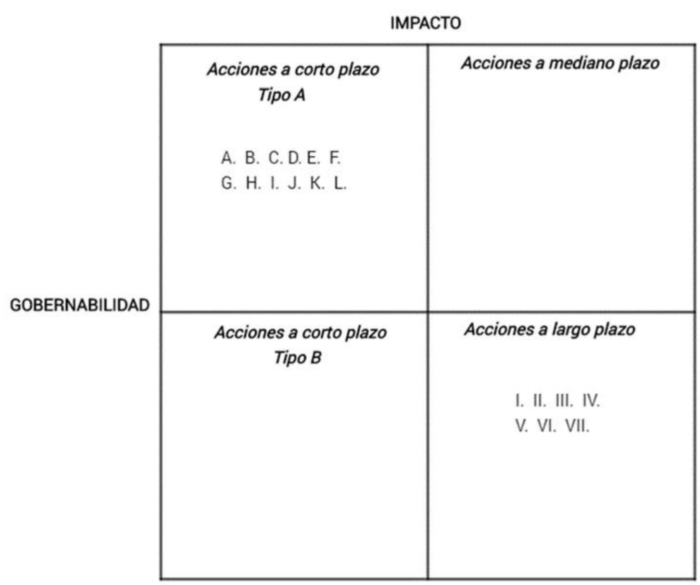
En cuanto al impacto, se debe considerar como el grado en el que la acción genera cambios. Para esto se tienen en cuenta los siguientes criterios:

Tabla 4. Grados de impacto

Escala	Tipo de Gobernabilidad	Descripción
5	Impacto fuerte	Si afecta significativamente el sistema.
3	Impacto medio	Si afecta el sistema, pero si simultáneamente ocurren otras acciones.
1	Impacto débil	Si afecta el sistema, pero si primero ocurren otras acciones.
0	No impacto	Eventualmente será omitible por el impacto de acciones previas.

Fuente: Mojica, F. (1991).

Diagrama 2. Mapa estratégico



Fuente: elaboración propia.

Acciones a corto plazo tipo A: a este grupo corresponden las necesidades que presentan alta gobernabilidad y alto impacto. Dichas necesidades pueden ser satisfechas por acciones que corresponden al completo dominio de los actores interesados. En algunas ocasiones requieren de la intervención de otros actores, pero no de una manera significativa. Entre ellas tenemos:

A. La ejecución de procesos de medición y representación gráfica del espacio y del tiempo, tendientes a la generalización en el concepto de función.

B. La conceptualización del espacio y del tiempo, desde el punto de vista de la tradición de investigación newtoniana.

C. El empleo de la geometría analítica en la representación gráfica del movimiento, como parte del proceso de conceptualización de la función.

D. La realización de trabajos experimentales tendientes a la identificación de variables y relaciones entre ellas, con miras a la obtención de leyes empíricas que permitan elaborar modelos matemáticos a partir de hechos concretos.

E. El diseño de actividades tendientes al estudio de la función que partan de situaciones planteadas por la física.

F. El empleo de técnicas de trabajo experimental que permitan estudiar las teorías científicas, evaluar su progreso y valorar la importancia de los modelos matemáticos que las sustentan.

G. La capacitación del docente y del futuro docente en sistemas de trabajo que le permitan identificar y contribuir en los procesos de conceptualización del conocimiento matemático y científico.

H. El estudio de los diversos temas atendiendo a las características que presentan desde los diferentes paradigmas que se les analice.

I. El diseño de procesos de trabajo que integren la docencia de la matemática y la física, con miras a hacer más efectivo el proceso de conceptualización de los aspectos abordados en estas dos áreas del conocimiento.

J. La formación profunda del licenciado en Matemáticas y Física, en cada una de estas disciplinas.

K. La capacitación del docente y futuro docente en aspectos de carácter epistemológico relacionados con el área del saber que esté transmitiendo.

L. La integración del trabajo docente con otras disciplinas que le permitan ejecutar acciones efectivas en el campo investigativo.

Acciones a largo plazo: en este grupo se encuentran las potencialidades, provenientes del planteamiento de los anhelos. Se han identificado las siguientes:

I. El empleo de diversos sistemas de coordenadas para la representación gráfica.

II. El empleo adecuado de la matemática al resolver problemas provenientes de la física y otras áreas de las ciencias naturales.

III. El estudio de la función a partir de hechos concretos de otras áreas del conocimiento.

IV. El empleo por parte de los docentes de técnicas de trabajo que incluyan metodologías científicas.

V. La generación de documentos por parte de los docentes en los cuales se muestren las experiencias en torno a la enseñanza de una matemática y física integrada.

VI. La elaboración de ensayos de carácter epistemológico procedentes de la acción docente en la matemática y la física.

VII. La conformación de grupos de investigación en docencia de la matemática y la física.

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

Bibliografía

Bachelard, G. (1982). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo.* Bogotá, D. C.: Siglo Veintiuno Editores.

Campbell, N. (1994). En medición*. Sigma,* Tomo 5*.* Barcelona: Grijalbo.

Einstein, A. (1993). *La evolución de la física.* Barcelona: Biblioteca Científica Salvat.

French, A. P. (1978). *Mecánica newtoniana.* Barcelona: Reverté.

Galilei, G. (1994). *Paper. Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano.* Madrid: Alianza Editorial.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Madrid: Alianza Editorial. Versión española de Mariano Martínez Pérez.

Hecht, E. (1987). *Física en perspectiva.* Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

Hewitt, P. G. (1995). *Física conceptual.* Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana.

Hull, L. W. (1984). *Historia y filosofía de la ciencia.* Barcelona: Ariel.

Jourdain, P. E. (1994). La naturaleza de la matemática. Comienzos de la aplicación de la matemática a la ciencia natural*. Sigma,* Tomo I*.* Barcelona: Grijalbo.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.

Kuhn, T. (1992). *Estructura de las revoluciones científicas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Keler, V. (1968). *El universo de los físicos.* Buenos Aires: Cartago.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Editorial.

Laudan, L. (1979). *El progreso y sus problemas. Hacia una teoría del conocimiento científico.* Madrid: Encuentro.

Méndez, C. E. (1989). *Metodología. Guía para elaborar diseños de investigación.* Bogotá: McGraw-Hill.

Mojica, F. (1991). *La prospectiva. Técnicas para visualizar el futuro.* Bogotá: Legis. Fondo Editorial.

Newman, J. R. (1994). Comentario sobre Galileo Galilei. *Sigma,* Tomo 2. Barcelona: Grijalbo.

Sadosky, M. (1980). Variables críticas en la educación matemática. *Lecturas matemáticas, 1*(2).

Smoot, G. (1994). *Arrugas en el tiempo.* Madrid: Plaza & Janés.

Vives, T. (2006). *Espacio y tiempo. La evolución del conocimiento del universo*. Madrid: Equipo Sirius.

Editorial
UCundinamarca
UDEC
UNIVERSIDAD DE
CUNDINAMARCA