	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAa113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA:1 de 7

26.

FECHA	09 de julio del 2018
--------------	----------------------

Señores
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
 BIBLIOTECA
 Ciudad

UNIDAD REGIONAL	Sede Fusagasugá
------------------------	-----------------

TIPO DE DOCUMENTO	Trabajo De Grado
--------------------------	------------------


FACULTAD	Educación
-----------------	-----------

NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO	Pregrado
---	----------

PROGRAMA ACADÉMICO	Licenciatura en Matemáticas
---------------------------	------------------------------------

El Autor(Es):

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS	No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN
Baquero Torres	Sergio Alejandro	1069755815

	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAar113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA:2 de 7

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS
Forero Diaz	Néstor Orlando

TÍTULO DEL DOCUMENTO
LIMPIEZA DEL RUIDO EN UNA IMAGEN POR MEDIO DE <u>FFT</u> CON FUNCIÓN DE <u>GAUSS</u>

SUBTÍTULO (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciado en Matemáticas

AÑO DE EDICIÓN DEL DOCUMENTO	NÚMERO DE PÁGINAS
2018	39

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
ESPAÑOL	INGLÉS
1.Transformada rápida de Fourier	Fast Fourier Transform
2.Filtro de media Gaussiana	Gaussian mean filter
3.Procesamiento Digital de Imágenes	Digital Image Processing
4.suavizado de imágenes	smoothing of images
5.Metodos de Domino espacial	Spatial domain methods
6.Transformada de Fourier	Fourier transform



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA:3 de 7

RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS

(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

Resumen. Se trabajó la FFT (Transformada Rápida de Fourier) sobre imágenes y media gaussiana, combinando los dos métodos; buscando suavizar o definir la imagen según el caso, se revisó la teoría y se le aplicó a imágenes en escala de grises; además de efectos de limpieza y definición se logró compresión de la imagen.

Abstract. the FFT was worked on images and Gaussian average, combining the two methods; seeking to soften or define the image according to the case, the theory was revised and applied to grayscale images; In addition to cleaning and definition effects, compression of the image was achieved.

AUTORIZACION DE PUBLICACIÓN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una "X":



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA:4 de 7


AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.	X	
2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	X	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	X	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000
www.ucundinamarca.edu.coE-mail: info@ucundinamarca.edu.co
NIT: 890.680.062-2

	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAa113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA:5 de 7

del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “*Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

Información Confidencial:

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI __NO_X__.**

En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

LICENCIA DE PUBLICACIÓN

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

- a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente).
- b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.
- c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.
- d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca
 Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000
 www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co
 NIT: 890.680.062-2



MACROPROCESO DE APOYO
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL
REPOSITORIO INSTITUCIONAL

CÓDIGO: AAAR113
VERSIÓN: 3
VIGENCIA: 2017-11-16
PAGINA:6 de 7

de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.

f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el “Manual del Repositorio Institucional AAAM003”

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia CreativeCommons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.



j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia CreativeCommons Atribución- No comercial- Sin derivar.



Nota:

Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA:7 de 7

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).

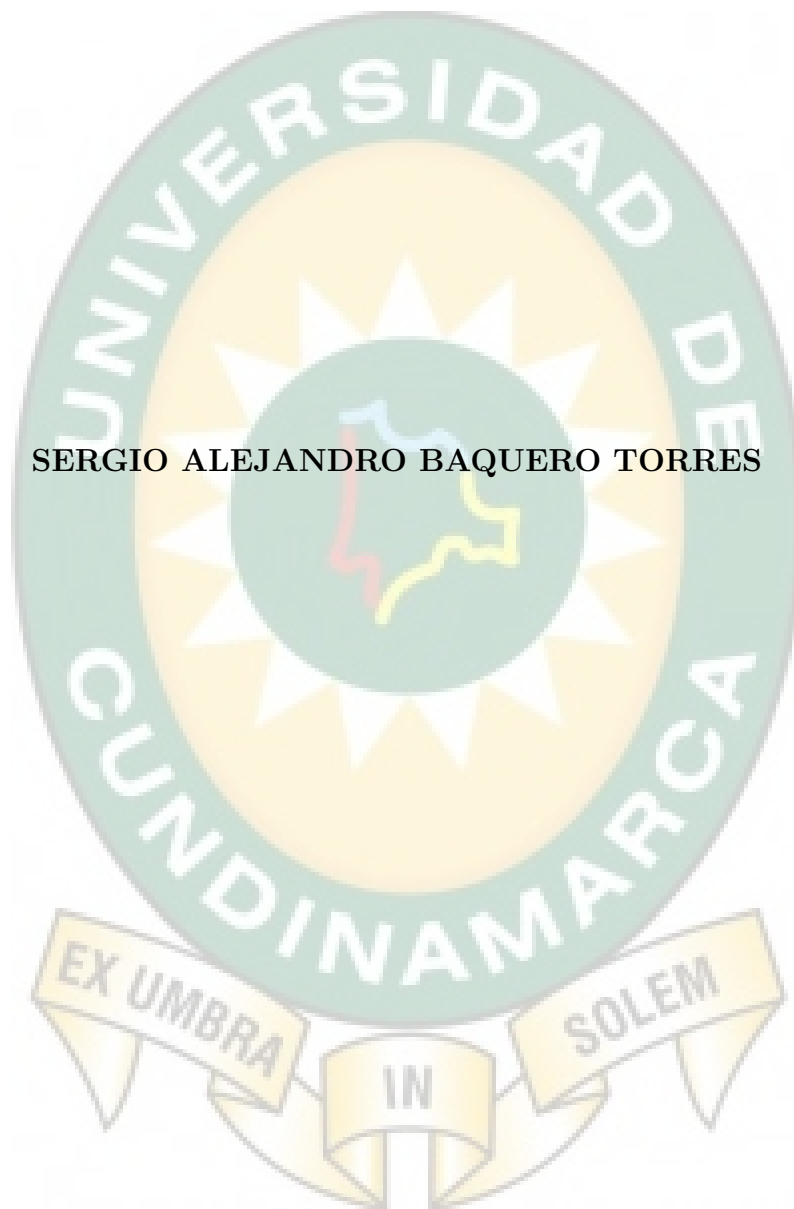
Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1.	
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafo)
Baquero Torres Sergio Alejandro	<i>Sergio Alejandro Baquero</i>

12.1.50

**LIMPIEZA DEL RUIDO EN UNA IMAGEN POR MEDIO DE FFT CON
FUNCIÓN DE GAUSS**



SERGIO ALEJANDRO BAQUERO TORRES

**UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
FUSAGASUGÁ
2018**

**LIMPIEZA DEL RUIDO EN UNA IMAGEN POR MEDIO DE FFT CON
FUNCIÓN DE GAUSS**

SERGIO ALEJANDRO BAQUERO TORRES

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de: Licenciatura
en Matemáticas

Director: Nestor Orlando Forero
Magister en Matemáticas

**UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
FUSAGASUGÁ
2018**

El análisis matemático es tan extenso como la naturaleza misma; define todas las relaciones sensibles, mide el tiempo, los espacios, las fuerzas, las temperaturas: su atributo principal es la claridad; no tiene en absoluto signos para expresar nociones confusas. Relaciona los fenómenos mas diversos y descubre las analogías secretas que los une.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por brindarme la capacidad física e intelectual con la cual logre culminar con éxito mi carrera profesional, a mi madre que desde el cielo siempre me ha acompañado en cada una de mis decisiones, a mis abuelos quienes me apoyaron tanto moral como económicamente, a mis hermanos por siempre brindarme consejo en los momentos críticos de mi vida. A mi asesor el docente Nestor Orlando Forero Diaz por su colaboración en la elaboración de este proyecto, entrega constante, disponibilidad ante cualquier interrogante y en general a todas las personas que me han ayudado de una u otra manera en este proceso.

Índice general

	Página
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
OBJETIVOS	3
1. MARCO TEÓRICO	4
1.1. Estado Del Arte	4
1.2. ¿ Qué Son Imágenes ?	7
1.3. Representación Digital De Una Imagen	8
1.3.1. Muestreo	9
1.4. Métodos De Dominio Espacial	10
1.4.1. Suavizado de Imágenes	11
1.4.2. Filtro Gaussiano	12
1.5. Transformada de Fourier	13
1.5.1. Serie de Fourier	13
1.5.2. Integral de Fourier	14
1.5.3. Transformada de Fourier	15
1.5.4. Transformada Rapida de Fourier	16
1.6. Marco Metodológico	21
1.6.1. Linea y Tipo de Investigación	21
2. RESULTADOS	22
2.1. Algoritmo	22
2.2. Análisis	23
3. CONCLUSIONES	35
ANEXO	36
BIBLIOGRÁFICA	39

RESUMEN

Con el avance acelerado de la tecnología los filtros se han convertido en un elemento indispensable, para las ciencias médicas y aplicaciones tecnológicas por esto el interés de mostrar una aplicación de la Transformada de Fourier a problemas reales mediante el procesamiento digital de imágenes.

En el presente trabajo se elaboró un filtro de limpieza del ruido por medio de Transformada Rápida de Fourier y un filtro suavizante con media gaussiana, como respuesta al interrogante ¿cómo mejorar la calidad de una imagen utilizando el procedimiento de limpieza del ruido y Transformada Rápida de Fourier?.

El proceso que se llevo acabo es el siguiente:

Primeramente se aplicó una limpieza del ruido en una imagen, es decir, reducir el deterioro que sufre como resultado de una reproducción alterada del color, la luminosidad, al proceso de compresión o la tarjeta de memoria.

En segundo lugar se elaboró un filtro con Transformada Rápida de Fourier, el cual se fundamenta en una transformación a una función bidimensional y la inversa de ella misma.

En tercer lugar se diseñó un filtro suavizante con media gaussiana, en el cual se usaron los métodos de dominio espacial, procedimientos que operan directamente sobre los píxeles. La operación de suavizado de imágenes que se utilizo para disminuir los efectos negativos que se pueden presentar en una imagen digital, como consecuencia de un sistema de muestreo pobre o el canal de transmisión, puntualmente se toma un píxel y se efectúa el reemplazo de los pixeles vecinos por una media gaussiana.

Por ultimo se unió el filtro con Transformada Rápida de Fourier y el filtro suavizante con media gaussiana.

Se recomienda que las variaciones de las particiones y proporciones no son estrictamente las mismas para todas las imágenes a tratar, ya que cada imagen tiene sus propias características de información, también es importante aclarar que el filtro esta diseñado para todas las imágenes, pero en este proyecto el tratamiento se realizo únicamente en escala de grises.

INTRODUCCION

La transformada de Fourier es una herramienta muy poderosa que tiene infinidad de aplicaciones en diversas ramas de la ciencia, en especial la transformada rápida de Fourier, ya que reduce las operaciones necesarias a la hora de aplicar el operador a la función, lo que la hace una herramienta muy eficaz para los procesos computacionales, como el procesamiento digital de imágenes.

En concreto se realizara un filtro con Transformada rápida de Fourier y media gaussiana con el fin de responder ¿ cómo mejorar la calidad de la imagen utilizando el procedimiento de limpieza del ruido y Transformada Rápida de Fourier?.

De acuerdo a este proyecto se quiere hacer un acercamiento al procesamiento digital de imágenes en la licenciatura en Matemáticas, por esto este trabajo tiene el propósito mostrar una aplicación de la teoría de Fourier a un problema de la vida real. Para cumplir este objetivo Se trabajaron dos fases que son:

En la primer capítulo se consulto en fuentes primarias y secundarias donde se expone las teorías de trasfondo del filtro, como la trasformada de Fourier, su interpretación matemática y computacional, el filtro gaussiano y como opera directamente al pixel.

En el segundo capítulo se da una descripción del filtro realizado, se muestra los resultados del filtro el histograma correspondiente a cada imagen filtrada y se efectúa una breve descripción de los efectos encontrados.

En el trabajo se observara efectos de limpieza, suavizados, contrastado, compresión y aclarado, que se notaran en las diferentes imágenes, así como se tomaron los histogramas, lo cual es parte fundamental del trabajo; En estos se percibe la compresión y el realce de los tonos de acuerdo a las particiones y a los efectos buscados.

OBJETIVOS

Objetivo General

Elaborar un filtro de limpieza ruido por medio de Transformada Rápida de Fourier con media gaussiana utilizando el programa MATLAB

Objetivos Específicos

- Indagar en fuentes primarias y secundarias la teoría de la transformada de Fourier.
- Identificar los procesos de la limpieza del ruido en una imagen.
- Ejecutar la limpieza de ruido con media gaussiana de una imagen con MATLAB.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

1.1. Estado Del Arte

- Revisando la literatura se encontró el trabajo transformada de Fourier en procesamiento digital de imágenes -funciones de variable compleja en este documento se observa la utilización de la transformada de Fourier para el procesamiento digital de imágenes en los televisores de alta definición y cámaras digitales. Para cumplir con el estudio indago sobre procesamiento digital de imágenes, filtros de frecuencia como filtro paso bajo, filtro paso alto, filtro paso banda y otras aplicaciones para su posterior aplicación. Por último el autor concluye que la aplicación de la Transformada de Fourier en el procesamiento digital de imágenes es un método muy efectivo y simple que se puede utilizar en cualquier programa Franco vela.(2013) *Transformada de Fourier en Procesamiento Digital de imágenes -Funciones de Variable Compleja*. Universidad nacional del sur, Bahía blanca, Argentina.
- El trabajo sobre el diseño de sistema de reconocimiento de placas utilizando MATLAB donde se plasma la implementación de algoritmos en las herramientas de procesamiento de imágenes. Con el fin de diseñar un sistema para el reconocimiento automático de matriculas vehiculares, capaz de procesar una imagen para posteriormente tomar la información de la misma, y poder ser almacenada en una base de datos coherente, utilizando sistemas de reconocimientos de imágenes y filtros para la detección de bordes. Obteniendo los siguientes resultados: La utilización de los elementos estructurales, definidos en MATLAB es una herramienta poderosa para simplificar los procedimientos cuando trabajamos con imágenes y debemos eliminar estructuras y objetos irrelevantes al objetivo propuesto. No es aconsejable utilizar elementos estructurales y propiedades morfológicas si el objetivo es implementar el código en otro compilador o programa diferente al de MATLAB, pero por facilidad y economía de tiempo se podría utilizar para tener un conocimiento inicial de los pasos que se deben realizar, para cumplir con el objetivo Hidalgo, Flores, Zavaleta y Martinez.(2009). *diseño de sistema de reconocimiento de placas utilizando MATLAB*(tesis de pregrado).Instituto Politecnico Nacional, Ciudad de México, MÉXICO.

- El autor presento el trabajo que denomino procesamiento y análisis digital de imágenes mediante dispositivos lógicos programables en el cual expone el diseño de una herramienta para el ámbito académico y de investigación enfocada al área de procesamiento y análisis digital de imágenes sobre circuitos digitales específicamente. El autor se propuso diseñar e implementar un sistema de procesamiento y análisis digital de imágenes, cuya unidad de procesamiento se encuentra montada sobre los recursos de compuertas programables, en este trabajo describe técnicas del procesamiento digital de imágenes métodos necesarios para armar un sistema de lenguaje de descripción de hardware, el cual facilita el modelado o descripción de un sistema digital, utilizando uno de los lenguajes descriptivos mas populares cuya característica mas importante es de ser un lenguaje estandarizado. Concluyendo el diseño, el modelado y la implementacion de un procesador de aplicación específica, enfocado al procesamiento y análisis de imágenes sobre compuertas programables maneja una arquitectura abierta, es decir, el procesador fue diseñado para facilitar el modelo e integración de nuevos algoritmos de una manera simple Mendoza, M.A .(2009). *procesamiento y análisis digital de imágenes mediante dispositivos lógicos programables*(tesis de pregrado). Universidad tecnológica de la mixteca, oaxaca, México.

- El trabajo realizado por la autora se denomina trasformada de Fourier y su aplicación en procesamiento digital de imágenes donde plantea como objetivo, presentar una revisión del estado del arte de los antecedentes de la trasformada de Fourier y su transformada inversa, desarrollar de forma general algunas aplicaciones de la transformada de Fourier, mostrar la aplicación de la trasformada de Fourier en el procesamiento digital de imágenes, fijando nuestra atención en imágenes de microscopia de fluorescencia.
El trabajo tiene temas muy específicos como primer tema Fourier desde su origen hasta lo que conocemos hoy en una breve reseña; El segundo tema se muestra formalmente la transformada de Fourier y sus propiedades, el tercer tema se mencionan de forma general algunas aplicaciones de la transformada de Fourier, se hace énfasis en el procesamiento digital de imágenes como una aplicación y el cuarto tema se muestra resultados numéricos de imágenes de microscopia de fluorescencia, procesadas numéricamente aplicando un filtro pasa banda. La autora concluye la importante que fue la teoría de Fourier para la historia, además resalta la aplicación de la transformada de Fourier para el procesamiento digital de imágenes Trinidad Torres, F.A.(2017). *Trasformada de Fourier y su aplicación en procesamiento digital*(tesis de pregrado). Universidad Autonoma de puebla, México.

- Este docente investigador realizo un trabajo sobre la Restauración de Imágenes a partir de Transformada de Fourier. Donde expresa que la restauración es un proceso que ha atraído a muchos científicos con la necesidad de salvaguardar el patrimonio fotográfico, con el fin de analizar el comportamiento de tres fotografías del carnaval de barranquilla, usando tratamiento digital de imágenes con Transformada de Fourier y otras técnicas de mejoramiento de imágenes usando MATLAB. En el trabajo se experimentan diferentes técnicas de mejoramiento de imágenes, donde el autor pudo afirmar que la calidad y resolución de estas mejoro en algunos aspectos, pero no todos los requeridos, debido a que algunos de los métodos empleados no se ajustaron a las necesidades de recuperación de las fotografías, se le hizo necesario ampliar el barrido del estado del arte en técnicas de tratamiento digital de imágenes, resalta la utilidad del programa para el tratamiento de imágenes ya que en lo que corresponde a las técnicas de estiramiento lineal, filtrado de cany y filtro paso- bajo ideal para el efecto buscado Varela, E.(2011). *Restauración de Imágenes a partir de Transformada de Fourier*. Universitaria De La Costa, Barraquilla, Colombia.

BASES TEÓRICAS

1.2. ¿ Qué Son Imágenes ?

En el sentido más amplio posible, las imágenes son una forma de registrar y presentar información visualmente. las imágenes son importantes para nosotros, ya que pueden ser un medio extraordinariamente eficaz para el almacenamiento y la comunicación de información. considera el ejemplo familiar de la fotografía. utilizamos la fotografía en la vida cotidiana para crear un registro permanente de nuestras experiencias visuales y para ayudarnos a compartir esas experiencias con otras. Al mostrarle a alguien una fotografía, evitamos la necesidad de una larga, tediosa y, con toda probabilidad, ambigua descripción verbal de lo que se ve. Esto enfatiza el hecho de que los humanos son principalmente criaturas de visula. Confiamos en nuestros ojos para la mayoría de la información que recibimos concentrando nuestro entorno, y nuestros cerebros son particularmente expertos en el procesamiento de datos visuales. Esta es una base científica para el conocido dicho de que üna imagen vale más que mil palabras” [3].



Figura 1.1: Fotografía
Pellicer Nicolás Juan A ,6 de Noviembre de 2008,
recuperado de <http://www.artelista.com/obra/6109516867516953-arbolxii.html>

1.3. Representación Digital De Una Imagen

Un sistema bidimensional, en su forma más general, es simplemente un mapeo de algunos conjunto de entrada de funciones bidimensionales $F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_N(x, y)$ a un conjunto de salida funciones bidimensionales $G_1(x, y), G_2(x, y), \dots, G_M(x, y)$, donde $-\infty < x, y < \infty$ denota las variables espaciales continuas e independientes de las funciones. Este mapeo puede ser representado por los operadores para $O_m = 1, 2, \dots, M$, que relacionan el entrada al conjunto

$$\begin{pmatrix} G_1 = O_1 F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_N = (x, y) \\ \vdots \\ G_m = O_m F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_N = (x, y) \\ \vdots \\ G_M = O_M F_1(x, y), F_2(x, y), \dots, F_N = (x, y) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

En casos específicos, la asignación puede ser de muchos a pocos, de pocos a muchos o de uno a uno. El mapeo de uno a uno se define como.

$$G(x, y) = OF(x, y) \quad (1.2)$$

Para continuar con una discusión de las propiedades de los sistemas bidimensionales, es necesario para dirigir el discurso hacia tipos específicos de operadores [6].

Una imagen analógica puede ser representada en forma aproximada por una serie de muestras igualmente espaciadas, a este proceso se le conoce como discretización; Una imagen digital es la discretización tanto en coordenadas como en tonos de gris de una imagen analógica. Entonces, una imagen puede ser definida por una función $f(x, y)$, donde los valores x y y son coordenadas espaciales, y el valor de f en (x, y) es conocido como intensidad

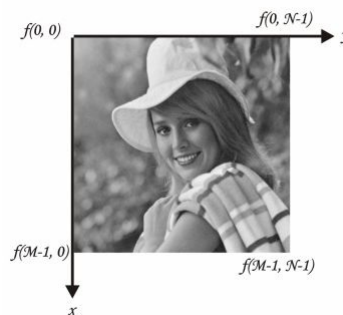


Figura 1.2: arreglo de una imagen

MENDOZA, M.A. (2009) PROCESAMIENTO Y ANÁLISIS DIGITAL DE IMÁGENES
MEDIANTE DISPOSITIVOS LÓGICOS PROGRAMABLES (PP.12)

o nivel de gris de la imagen en ese punto; se habla de una imagen digital cuando x , y y los valores de f son cantidades finitas y discretas. Una imagen digital esta

compuesta por un numero finito de elementos que tienen posición y valor particulares. Estos elementos son conocidos como elementos de la imagen, pels o píxeles . Para representar una imagen digital se emplea una matriz de M renglones y N columnas, cuyo contenido son cantidades discretas:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \dots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \dots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \dots & f(M - 1, N - 1) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Las posiciones de los píxeles de una imagen se representan con el uso de coordenadas; Por convención el origen de la imagen se encuentra en el extremo izquierdo superior, denotado por la coordenada $(x, y) = (0, 0)$, que indica que se encuentra en el primer renglón y en la primera columna; La siguiente coordenada del primer renglón es $(x, y) = (0, 1)$ como se muestra en (1.3).

Durante el proceso de digitalización de la imagen se toman decisiones respecto a M, N y a la cantidad discreta de niveles de gris permitidos para cada píxel, denotado por L ; El valor de L se restringe a potencias de $L = 2^k$.

donde k representa el numero de bits necesarios para representar un valor de L . Los niveles de gris están espaciados por igual y se encuentran en el intervalo $[0, L]$ conocido como rango dinámico de una imagen.

El numero de bits que se necesitan para almacenar una imagen digital de $M \times N$ con L diferentes niveles de gris es:

$$M \times N \times K \quad (1.4)$$

Así para una imagen típica de 512×512 con 256 niveles de gris ($k = 8$) se necesitan 2,097,512 bits o 262,144 bytes [8].

1.3.1. Muestreo

Muestreo es el proceso de tomar el valor de la función $f(x,y)$ en intervalos discretos de espacio, es decir, tomar muestras de la intensidad de luz en la imagen de tono continuo en lugares específicos formando un arreglo rectangular, como se muestra en la figura 2.2. Cada muestra corresponde a una pequeña área cuadrada de la imagen conocida como píxel y se le asigna unas coordenadas (x, y) , donde x indica la columna en la que se encuentra y y indica la línea [3].

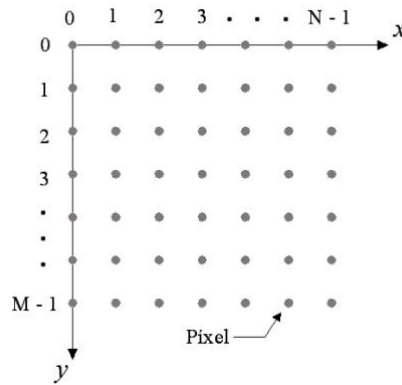


Figura 1.3: Esquema de una Imagen muestreada

JIMÉNEZ, P.(2009)IMPLEMENTACIÓN DE UN COMPRESOR

DESCOMPRESOR DE IMÁGENES CON JPEG200 EN UN DSP(PP.6)

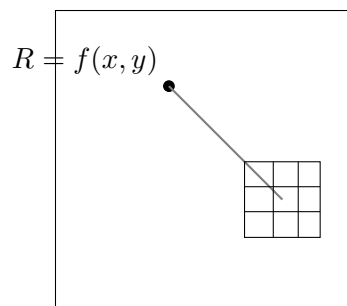
1.4. Métodos De Dominio Espacial

El termino dominio-espacial se refiere al conjunto de puntos que componen una imagen y los métodos en el dominio espacial son procedimientos que operan directamente sobre los pixels. Las transformaciones de procesamiento de imágenes en el dominio espacial se pueden expresar como:

$$g(x, y) = \tau[f(x, y)]$$

donde $f(x, y)$ es la imagen de entrada, $g(x, y)$ es la imagen procesada, y τ es el operador definido sobre alguna vecindad del punto (x, y) . La principal técnica usada para definir una vecindad de (x, y) es usar una subimagen cuadrada centrada en (x, y) . La manera mas simple de definir a T, es cuando los vecinos tomados en cuenta son una matriz de 1×1 , de esta forma $g(x, y)$ depende únicamente de (x, y) , que es el píxel que se esta procesando. La función de transformación o también llamada mapping queda de la siguiente manera:

$$s = T(R)$$



que por simplicidad se usa R para representar al píxel que se está procesando, s para definir al píxel resultante. El conjunto de píxeles vecinos al píxel actual suele llamarse kernel, ventana o plantilla [4].

1.4.1. Suavizado de Imágenes

Las operaciones de suavizado se utilizan para disminuir los efectos negativos que se pueden presentar en una imagen digital como consecuencia de un sistema de muestro pobre o del canal de transmisión. Por ejemplo ruido.

Promedio de vecinos

Dada una imagen $F(x, y)$ de tamaño $N \times N$, el valor del nivel de gris de la imagen suavizada $g(x, y)$ en el punto (x, y) se obtiene promediando los valores de nivel de gris de los puntos de f contenidos de una cierta vecindad de (x, y) .

$$g(x, y) = \frac{1}{M} \sum_{(n, m) \in S} f(n, m) \quad (1.5)$$

donde $x, y = 0, 1, \dots, N - 1$. S es el conjunto de coordenadas de los puntos vecinos a (x, y) incluyendo el propio (x, y) y M es el número de puntos de la vecindad. por ejemplo, imaginemos la subimagen y la máscara siguientes.

		\vdots		
	$(x - 1, y - 1)$	$(x, y - 1)$	$(x + 1, y - 1)$	
\vdots	$(x - 1, y)$	(x, y)	$(x + 1, y)$	\vdots
	$(x - 1, y + 1)$	$(x, y + 1)$	$(x + 1, y + 1)$	
		\vdots		

y que queremos reemplazar el valor de $f(x, y)$ por el promedio de los puntos en una región de tamaño 3×3 centrada en (x, y) , es decir, queremos asignar el valor promedio a $f(x, y)$:

$$g(x, y) = \frac{1}{9} [f((x - 1), (y - 1)) + f(x, y - 1) + f(x + 1, y - 1) + f(x - 1, y) + f(x, y) + f(x + 1, y) + f(x - 1, y + 1) + f(x, y + 1) + f(x + 1, y + 1)]$$

Esta operación se puede realizar de forma general centrando la máscara en (x, y) y multiplicando cada punto debajo de la máscara por el correspondiente coeficiente de la máscara y sumando el resultado [4].

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

1.4.2. Filtro Gaussiano

El filtro gaussiano se tomó la matriz $A = \{a_{ij}\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0i} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j0} & a_{j1} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

se traslada a un vector $V = \{v_k\} = \{a_{ij}\}$, con $k = i + j$

$$V = \{a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0i}, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1i}, \dots, a_{j0}, a_{j1}, \dots, a_{ij}\} \quad (1.7)$$

Primero se cuenta con i después con j .

Al vector se le halla media y varianza

$$\mu = \frac{a_{00} + \dots + a_{ij}}{k} \quad \mu^2 = \frac{V^2}{k} \quad \sigma = \sqrt{\mu^2 - \mu^2} \quad (1.8)$$

y después se escoge los datos que se van a tomar de acuerdo al efecto que se busque.

Para este caso μ : promedio y σ : desviación los datos se escogen por

$$\mu \pm k\sigma/prop$$

$k = 1, 2, 3, \dots$, prop se escoge desacuerdo al efecto que se busque.

Después se aplica la función

$$f(x) = \frac{e^{-(\mu-x)^2/(2\sigma^2)}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \quad (1.9)$$

A cada v_i para normalizarla.

1.5. Transformada de Fourier

1.5.1. Serie de Fourier

Sea f una función Riemann integrable en $[-L, L]$, la serie:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right] \quad (1.10)$$

se denomina la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ con a_0, a_n, b_n coeficientes de Fourier en $[-L, L]$ donde sus coeficientes tienen valores de:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (1.11)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.12)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.13)$$

1.5.2. Integral de Fourier

La integral de Fourier surgió de la necesidad de tratar funciones no periódicas y que se extienden sobre todo el eje x . Si se supone que f está definida para toda t con periodo T entonces se hace tender T al infinito y se busca una función f_T con la propiedad:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = f(t) \quad (1.14)$$

En $[-T/2, T/2]$, f_T puede ser representada por una serie de Fourier haciendo $T \rightarrow \infty$ entonces se obtiene

$$f_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t] \quad (1.15)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T$ los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\xi) d\xi \quad (1.16)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\xi) \cos(n\omega_0 \xi) d\xi \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.17)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\xi) \sin(n\omega_0 \xi) d\xi \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.18)$$

sea

$$w_n = n\omega_0 = \frac{2n\pi}{T} = \frac{n\omega_0}{\pi} = \frac{2\pi}{T} \quad (1.19)$$

$$\Delta w_n = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T} \quad (1.20)$$

$$\frac{2}{T} = \frac{\Delta w_n}{\pi} \quad (1.21)$$

Con estas consideraciones podemos afirma

$$\int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)]dw \quad (1.22)$$

donde

$$A(w) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\xi)\cos(w_n\xi)d\xi \quad (1.23)$$

$$B(w) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\xi)\sen(w_n\xi)d\xi \quad (1.24)$$

1.5.3. Transformada de Fourier

La variable x puede representar una cantidad física, como el tiempo o la frecuencia, que es esencialmente unidimensional, o puede ser la coordenada en un sistema físico unidimensional, como una cuerda estirada o una línea de transmisión eléctrica. Sin embargo, en casos que son dos dimensiones: antenas de membranas estiradas y matrices de antenas, lentes y difracción, rejillas, imágenes en pantallas de televisión, etc. Se aplican fórmulas más generales. Una función bidimensional $f(x, y)$ tiene una transformación bidimensional $F(u, v)$ y entre las dos existen las siguientes relaciones

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (1.25)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v)e^{-i2\pi(ux+vy)} dudv \quad (1.26)$$

estas ecuaciones describen un análisis de la función bidimensional $f(x, y)$ en componentes de la forma $e^{i2\pi(ux+vy)}$, ya que cualquiera de estos componentes se puede dividir en coseno y seno partes.

1.5.4. Transformada Rápida de Fourier

En 1965, un artículo de J. W. Cooley y J. W. Tukey en la revista Matemáticas de La computación, describió un método diferente para calcular las constantes en la interpolación polinomio trigonométrico. Este método requiere solo multiplicaciones $O(m \log_2 m)$ y $O(m \log_2 m)$ adiciones, siempre que m se elija de una manera apropiada. Por un problema con miles de puntos de datos, esto reduce el número de cálculos de millones a miles. El método había sido descubierto varios años antes del Cooley. Apareció el papel Tukey, pero había pasado desapercibido. (*Burden, 2011, pp 548*)

El polinomio interpolador al ser minimizado reduce el error.

$$E(S_m) = \sum_{j=0}^{2m-1} (y_j - s_m(x_j))^2 \quad (1.27)$$

Se reescribe el polinomio de manera que el polinomio interpole de manera equitativamente grandes cantidades de datos .

$$a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos(kx_j) \text{ para } k = 0, 1, \dots, m, \quad (1.28)$$

$$b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin(kx_j) \text{ para } k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.29)$$

Este calculo directo requiere aproximadamente $2m^2$ multiplicaciones y $2m^2$ adiciones. El procedimiento de la transformada rápida de fourier calcula los coeficientes c_k en lugar de evaluar directamente a_k y b_k , teniendo que

$$c_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} c_k e^{ikx} \quad (1.30)$$

y

$$a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k \quad (1.31)$$

La función de reducción de la operación de la transformada rápida de Fourier resulta del cálculo los coeficientes c_k en acumulación, y usa como una relación básica el hecho de que para cualquier entero n

$$e^{n\pi i} = \cos(n\pi) + i\sin(n\pi) = (-1)^n \quad (1.32)$$

si m es un entero positivo , tenemos que

$$c_k + c_{m+k} = 2 \sum_{j=0}^{m-1} y_2^j e^{ik\pi 2j/m} \quad (1.33)$$

En consecuencia de la ecuación anterior el indice m ha sido remplazado $m/2$ a lo que equivale a una reducción de las operaciones, la cual al principio de la seccion se menciona que las operaciones al evaluar directamente a_k y b_k son $(2m)^2$ multiplicaciones y $(2m)^2$ adiciones ahora las operaciones fueron reducidas a $O(m\log_2 m)$ multiplicaciones y $O(m\log_2 m)$ adiciones [2].

En 1965, un método de cálculo de la transformada fourier discreta se hizo ampliamente conocido (cooley y tukey, 1965) y revolucionó muchos campos donde la informática onerosa era un impedimento para el progreso. Buenas fuentes de información histórica son las transacciones IEEE en audio y electroacústica. Hay varias formas de entender esta trasformada rápida de Fourier, una de ellas, que atraerá a ciertas personas en términos de factorización de la matriz trasformada. A partir de la definición, podemos escribir la relación DFT (para $N = 8$) en forma de un producto de matriz

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix}$$

donde $W = e^{-i2\pi/N}$. La cantidad W es una raíz N de la unidad, ya que $W^N = e^{-i2\pi} = 1$. se puede considerarse como un complejo número cuyo módulo es la unidad y cuya fase es $-(1/N)$ turnos

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & W^0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix} \quad (1.34)
\end{aligned}$$

Esta factorización deja solo dos elementos distintos de cero en cada fila. En la primera matriz hay N^2 multiplicaciones por factor si usamos la segunda matriz, y el número de factor M está dado por $2^M = N$ si no contamos reordenamiento por lo tanto, las multiplicaciones totalizan $2N \log_2 N$. El examen del factor muestra que debemos prestar atención a los detalles. Estamos mejor por un factor de las órdenes $N/\log_2 N$, que se convierte en muy importante para los grandes valores de N de un tren de datos a gran escala con imágenes bidimensionales digitalizadas como fotografías. Aquí hay otro método para entender la transformación rápida de Fourier. Una secuencia de N elementos se puede dividir en dos secuencias más cortas de elementos $N/2$ cada uno colocando los elementos pares en la primera secuencia y los impares en la segunda. Por ejemplo, $[8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 1]$ se puede dividir en $[8 \ 6 \ 4 \ 2]$ y $[7 \ 5 \ 3 \ 1]$. Cada uno de estos posee un DTF. a partir de estos dos DFT ¿cómo podría uno obtener el DFT de secuencia más larga? La respuesta se obtiene escribiendo

$$\{8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1\} = \{8 \ 0 \ 6 \ 0 \ 4 \ 0 \ 2 \ 0\} + \{0 \ 7 \ 0 \ 5 \ 0 \ 3 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1\}$$

vemos que la DFT deseada puede obtenerse utilizando los teoremas de estiramiento y desplazamiento. A partir del teorema de estiramiento, sabemos que si

$$\{8 \ 6 \ 4 \ 2\} \supset \{A \ B \ C \ D\} \quad (1.35)$$

Entonces

$$\{8 \ 0 \ 6 \ 0 \ 4 \ 0 \ 2 \ 0\} \supset \frac{1}{2} \{A \ B \ C \ D \ A \ B \ C \ D\} \quad (1.36)$$

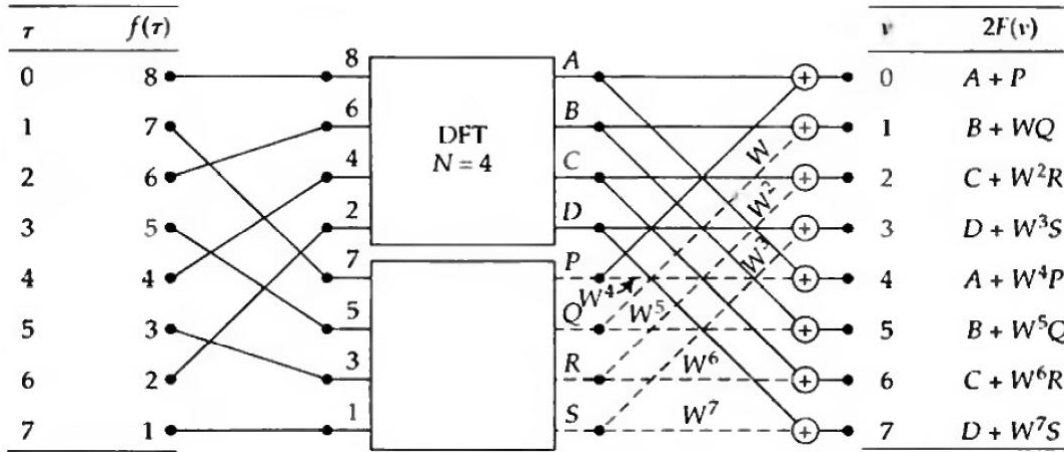


Figura 1.4: Reducción de DFT de ocho elementos a dos DFT de cuatro elementos

BRACEWELL,R.(2000)*The Fourier Transform and its Aplications*(PP.277)

un fenómeno que puede ser familiar a partir de los coeficientes de series de Fourier para funciones periódicas. Del mismo modo. Si

$$\{7\ 5\ 3\ 1\} \supset \{P\ Q\ R\ S\} \tag{1.37}$$

Entonces

$$\{0\ 7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\} \supset \frac{1}{2}\{P\ Q\ R\ S\ P\ Q\ R\ S\} \tag{1.38}$$

ahora aplicamos el teorema de cambio para encontrar que

$$\{0\ 7\ 0\ 5\ 0\ 3\ 0\} \supset \frac{1}{2}\{P\ WQ\ W^2R\ W^3S\ W^4P\ W^5Q\ W^6R\ W^7S\} \tag{1.39}$$

La multiplicación por W significa la rotación en una décima de revolución en el plano complejo, por lo que el efecto del cambio consiste en aplicar un retardo de fase que aumenta progresivamente.

A lo largo de la secuencia de elementos $[P\ Q\ R\ S\ P\ Q\ R\ S]$. Añadiendo 1.36 y 1.39 el resultado de la transformada discreta de Fourier de la larga secuencia. Por lo tanto, la transformación $N = 8$ se ha dividido en dos transformaciones con $N = 4$, lo que representa potencialmente un ahorro de tiempo del 50 por ciento, ya que el número de multiplicaciones en la transformada discreta de Fourier realizadas según la primera matriz es N^2 . Para ver cómo esta ruptura se puede tomar aún más, referimos la fig(1.4). Comenzando con la secuencia dada a la izquierda, la reorganizamos en las dos secuencias cortas $[8\ 6\ 4\ 2]$ y $[7\ 5\ 3\ 1]$ que forman las entradas a dos transformadores con $N = 4$ cuyos resultados son $\{A\ B\ C\ D\}$ y $\{P\ Q\ R\ S\}$, respectivamente. Las líneas de flujo interrumpidas muestran que A, B, C y D se transfieren a los nodos de salida para entregar $\{A\ B\ C\ D\ A\ B\ C\ D\}$, Las líneas de flujo rotas se etiquetan con factores que hacen que se entreguen P, WQ, W^2R , etc. Como en (1.39) a los mismos nodos de salida, donde tiene lugar la adición. La siguiente figura ahora muestra una reducción adicional de las transformaciones de cuatro elementos en transformadores de dos y dos elementos, y la figura siguiente muestra la reducción total de las multiplicaciones y adiciones. Finalmente, los pasos se pueden resumir como sigue. Primero, reorganizamos la secuencia dada en

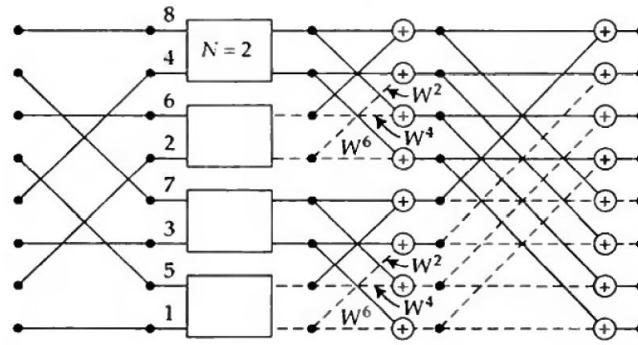


Figura 1.5: Reducción a cuatro de los elementos

BRACEWELL,R.(2000) *The Fourier Transform and its Applications*(PP.277)

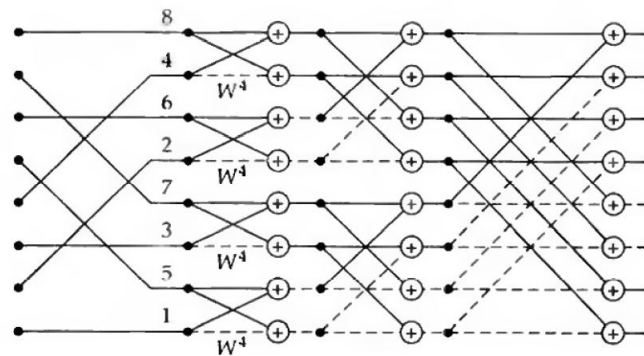


Figura 1.6: Reducción a cuatro de los elementos

BRACEWELL,R.(2000) *The Fourier Transform and its Applications*(PP.278)

[8 7 6 5 4 3 1] una operación que corresponde exactamente a la multiplicación por la primera matriz cuadrada (1.47) y, a veces, de forma vaga, como cambio del bit.

Luego, se calculan ocho nuevos números como combinaciones lineales de varios pares de datos re ordenados, exactamente como lo indica la segunda matriz cuadrada (1.34). Estos números son las salidas de la columna de la izquierda de los sumadores en la fig(1.6). Hay dos más etapas similares, haciendo un total de tres de tales operaciones en total (M , en general, donde $2^M = N$). Por supuesto, no todas las 48 multiplicaciones por W^4 , que es simplemente un cambio de signo. Además W^2 y W^6 son bastante simples de manejar. Vemos así que la figura 1.6 es una representación íntima de las cuatro multiplicaciones matriciales de (1.34), y las consideraciones que conducen a la construcción de la figura 1.6 podrían ser la base de un descubrimiento paso a paso del factor que estaba en el teorema sin derivación. Si la cantidad de elementos no puede ser reducida a la mitad indefinidamente (N no es expresable como 2^M), un algoritmo rápido puede ser hecho a la medida. la reducción final podría incorporar transformadores de tres componentes si, por ejemplo, N fue divisible por 3. Tales algoritmos no son tan rápidos [1].

1.6. Marco Metodológico

1.6.1. Línea y Tipo de Investigación

En el presente trabajo se encarga de la limpieza de una imagen mediante Transformada Rápida de Fourier y un filtro suavizante con media gaussiana, por medio del programa MATLAB.

El proyecto se realizó en base de una metodología donde se muestra histogramas y imágenes filtradas, con el fin de comparar los resultados cualitativamente y cuantitativamente con la información original de la imagen.

Como primer paso se revisó fuentes bibliográficas con conceptos como transformada rápida de Fourier, filtros suavizantes y técnicas de limpieza del ruido, para dar un tratamiento a las imágenes como lo mencionamos anteriormente.

También se consultó sobre los antecedentes, que se basaron en la transformada de Fourier y procesamiento digital de imágenes. Posteriormente, se realizó un filtro con media gaussiana y un filtro con Transformada rápida de Fourier con la meta de combinarlos y buscar el efecto propuesto en el objetivo. Así, la investigación que se implementó en la ejecución de este proyecto fue de tipo descriptiva y aplicada. Descriptiva porque se especificó las variaciones del programa y se caracterizó cada parte donde podíamos encontrar algún tipo de cambio del mismo.

Aplicada porque se realizó en una temática hacia una aplicación para mejorar las imágenes a través de MATLAB, poco conocida en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca Sede Fusagasuga, con el propósito de mostrar una aplicación de la transformada de Fourier a problemas reales mediante Procesamiento Digital de Imágenes.

Capítulo 2

RESULTADOS

2.1. Algoritmo

Se realiza un filtro gaussiano con transformada rápida de Fourier para el estudio del mejoramiento de imágenes utilizando un filtro con media gaussiana y la transformada de Fourier, el código numérico se genera en el ambiente de *Matlab*. Tomando en cuenta las propiedades de un filtro con media gaussiana enunciado en el capítulo anterior, inicialmente se lee una imagen, estas son tomadas con cámara análoga y fueron escaneadas, no han sido modificadas, tienen errores de definición manchas y de resolución, no están suavizadas, esto para que no hallan ruido con otros efectos de computador, en seguida se transforma en a escala de grises para obtener una matriz que la representa, debido a que si fuese un imagen a color su representación discreta sería tres matrices, la cual su manipulación y tratamiento sería totalmente diferentes. Posteriormente se realiza una partición de la imagen, la cual se denomina n ; Esta realiza una división de la matriz original de la siguiente manera: X y Y son el tamaño original de la matriz luego $kh = X/n$ y $kv = Y/n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ donde se hace un corte a la matriz original, es decir, con el corte se forma una nueva matriz de tamaño kh y kv , consecutivamente esa nueva matriz se traslada a un vector C la cual se le hace las operaciones para realizar un filtro con media gaussiana como se realizó en la sección (1.4.2).

aplicamos la FFT, se genera un filtro gaussiano media

$$C = e^{-((M-C)/desv)^2/(desv*(2*\pi)^2)}$$

donde M es la media y $desv$ es la desviación estándar. Ahora se reemplazamos los pixeles que están por fuera del rango

$$M - 4 * desv/prop < C(iii, jjj) < M - desv/prop$$

y

$$M + desv/prop < C(iii, jjj) < M + 4 * desv/prop$$

Posteriormente se aplica la Transformada Inversa de Fourier y finalmente se obtiene la imagen de salida (imagen filtrada).

2.2. Análisis

El programa esta diseñado para cualquier tipo de imagen,preferiblemente tomaremos imágenes que estén deterioradas ; A continuación se muestra la primera parte donde código tiene dos variables que se pueden modificar n y $prop$,donde n es el numero entero en el que voy a dividir la imagen y $prop$ es la proporción por la cual voy a dividir el nuevo pixel , estas dos variables permitirán obtener diferentes resultados en el filtro .

Ahora se muestran las imágenes que vamos a procesar y su histograma.



(a)Fusagasuga casona san rafael

<http://www.noticiasdiaadia.com/cundinamarca/fusagasuga/12910-proponen-construir-nuevo-hospital-en-antiguo-san-rafael-del-centro-de-fusagasuga>



(b)Fusagasuga Parque Principal

recuperado:www.emserfusa.com.co/publicaciones/nuestra-historia_pub

Figura 2.1: Fotos a procesar

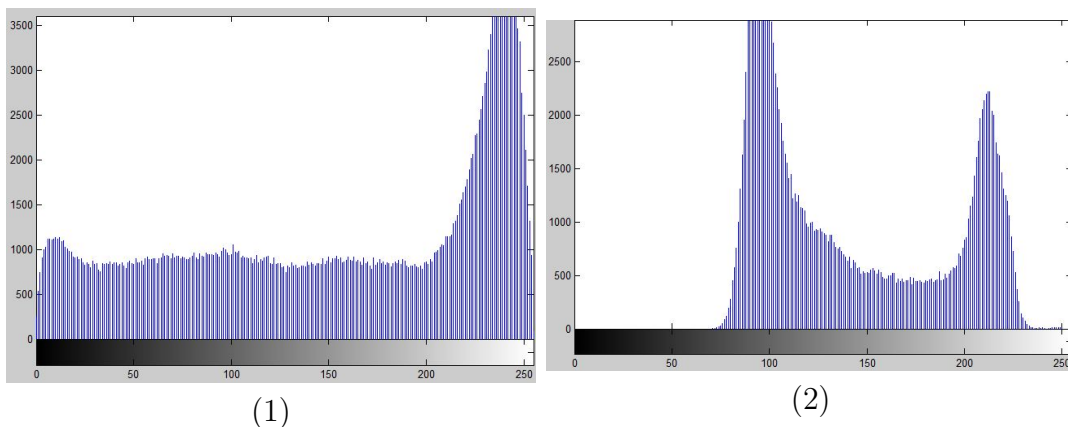


Figura 2.2: (1)Histogramas original de (a) de la Figura (3.1),(2)Histogramas original de (b) de la Figura (5.1).(2)

Ahora mostraremos, el resultado de procesar cada una de las imágenes de la Figura (5.1) variando n y $prop$.



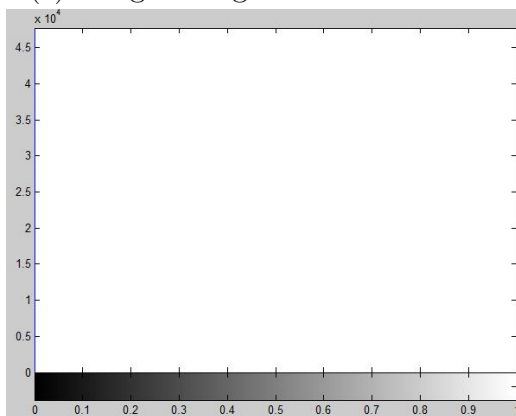
(a) Imagen Original

(b) Imagen filtrada

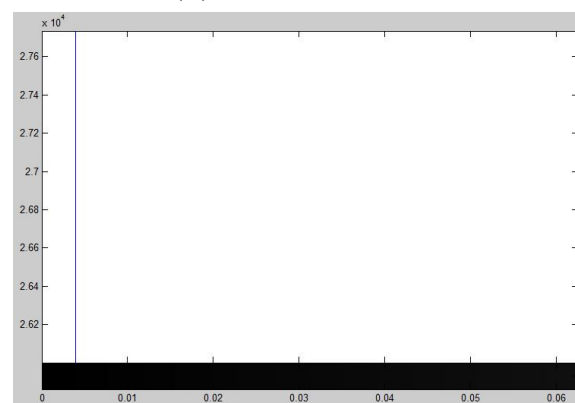


(c) Imagen Original

(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.3: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) solo con filtro gaussiano con $prop=1$ y con $n = 1$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b), (1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).

Las imágenes anteriores se trabajaron aplicando la función de gauss a cada partición, la función lleva todos valores a $[0, 1]$, esto se nota en el histograma donde se nota que lleva a todos los pixeles a un lumbral, tal que todos los pixeles correspondan al de la imagen, para este caso el efecto es resaltar los brillos y por tanto definir contornos y bordes.



(a) Imagen Original



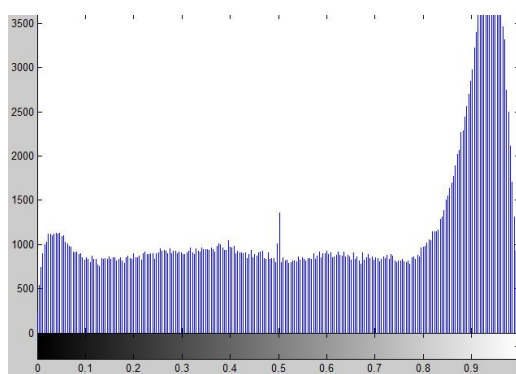
(b) Imagen filtrada



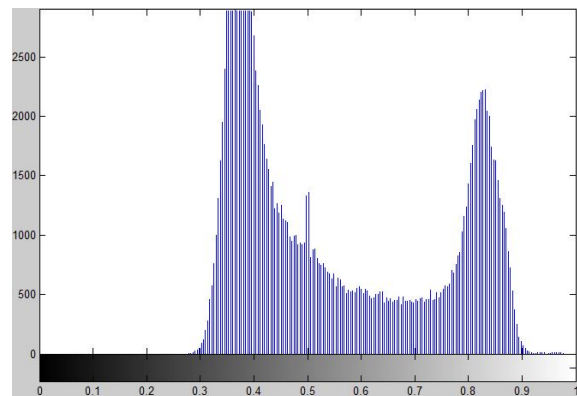
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.4: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) solo con FFT con $prop=1$ y con $n=1$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).

En las imágenes anteriores se homogeneiza el color y los tonos, y se suaviza un poco, en los histogramas se conserva más información donde se resalta los tonos que pertenecen a imagen, ya aparece un primer efecto de limpieza.



(a) Imagen Original



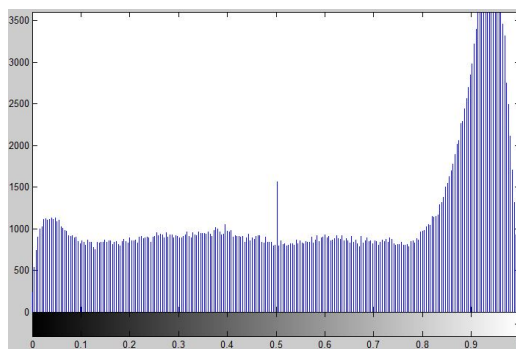
(b) Imagen filtrada



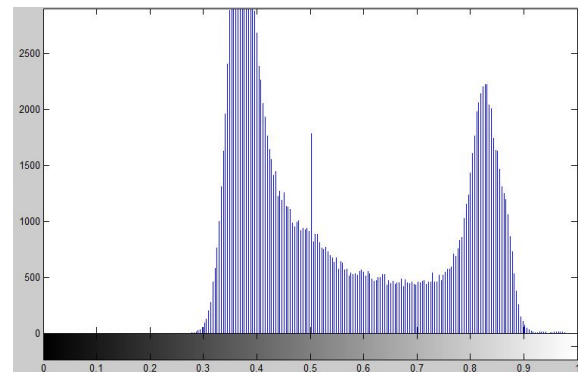
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.5: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=10$ y $n=1$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).



(a) Imagen Original



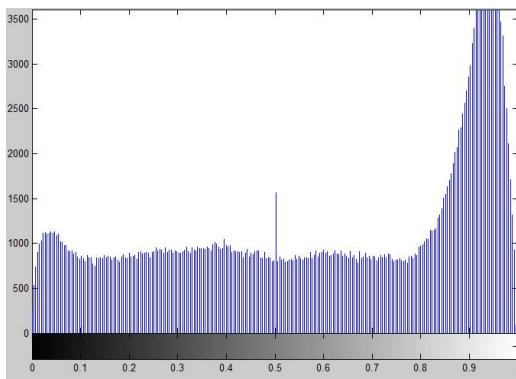
(b) Imagen filtrada



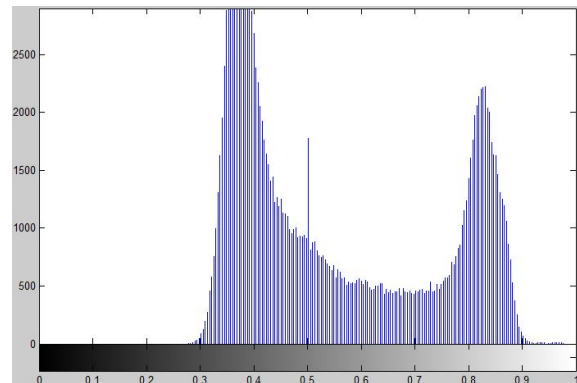
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.6: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=100$ y $n = 1$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).

En la imagen anterior se nota el efecto que se lleva a cabo en la imagen las partes más claras como es el cielo está mucho más limpias y se nota que hace parte de la imagen y que no, se observa también los errores, manchas y deterioros de la imagen.



(a) Imagen Original



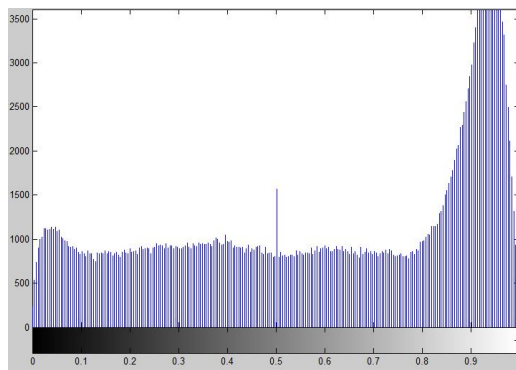
(b) Imagen filtrada



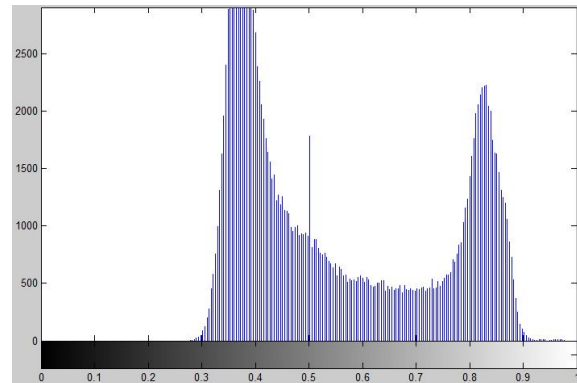
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.7: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=1000$ y $n=1$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).



(a) Imagen Original



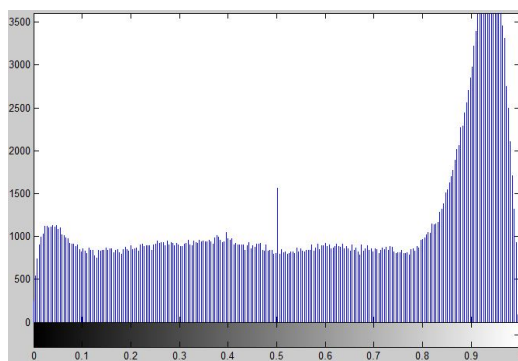
(b) Imagen filtrada



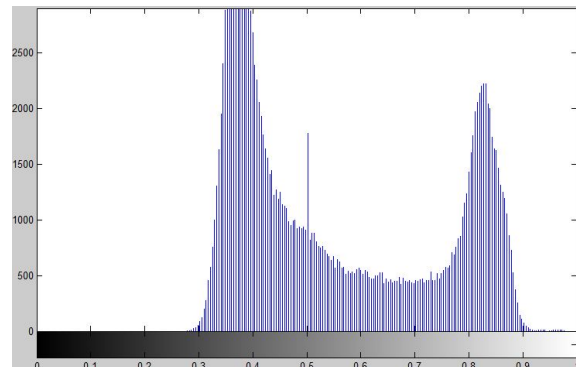
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.8: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=10000$ y $n = 1$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).

En las imágenes anteriores básicamente el efecto visualmente es el mismo, respecto a las figuras que solo se le cambia la proporción y se mantiene fijas las particiones; Pero la diferencia se debe a los histogramas ya que estos evidencian la eliminación de tonos diferentes.



(a) Imagen Original



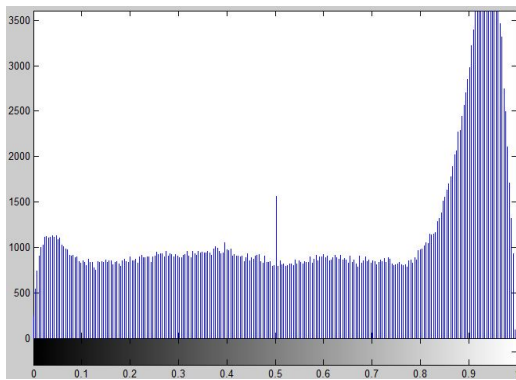
(b) Imagen filtrada



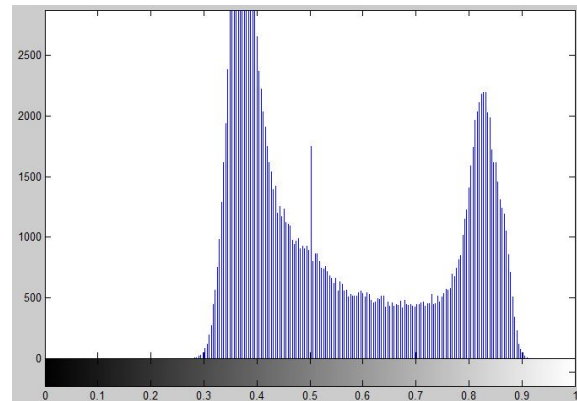
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.9: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=10$ y $n = 10$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).



(a) Imagen Original



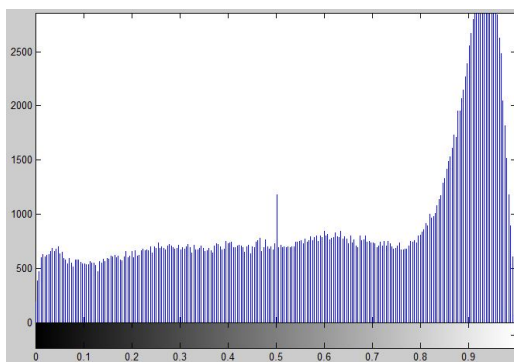
(b) Imagen filtrada



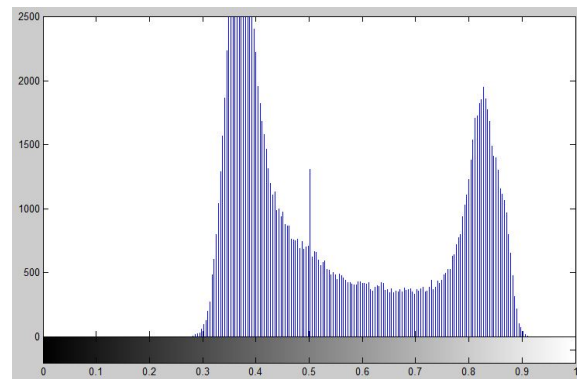
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.10: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=100$ y $n = 100$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).



(a) Imagen Original



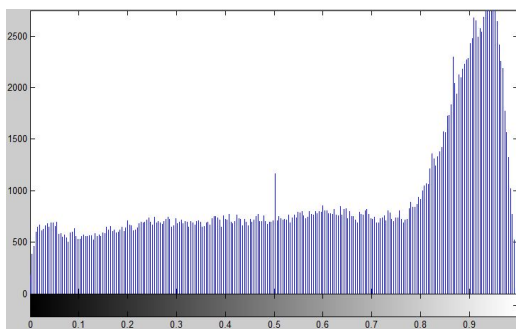
(b) Imagen filtrada



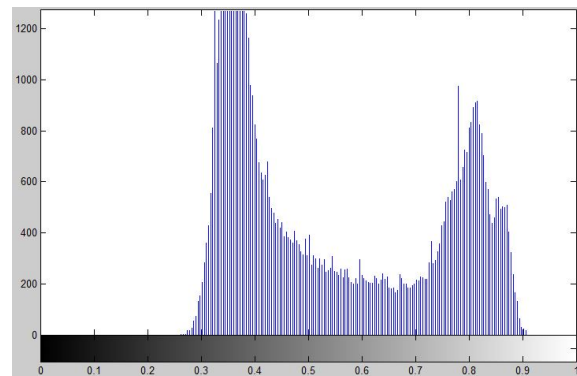
(c) Imagen Original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.11: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=200$ y $n = 200$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).

En esta imagen podemos ver el relleno que se le hace a la imagen, sin perder tanta información, es claro que en el histograma se demuestra en que partes comprime y en que partes resalta los tonos de manera no tan abrupta, exceptuando el tono principal.



(a) Imagen original



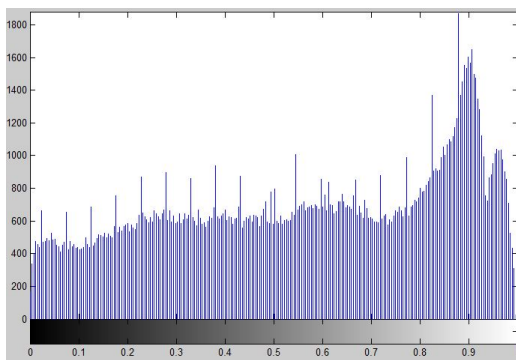
(b) Imagen filtrada



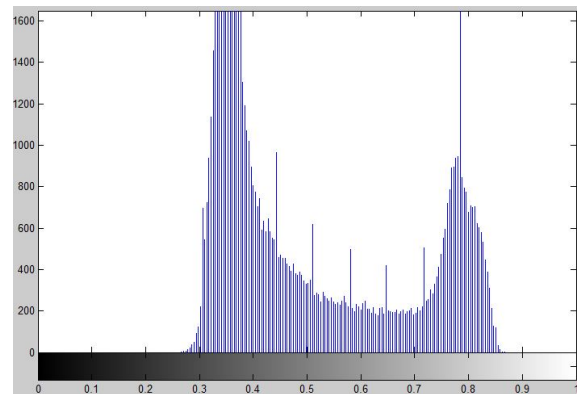
(c) Imagen original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.12: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=300$ y $n = 300$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).

En esta imagen se ve un efecto de compresión, por cada partición se tiene una media que resalta los tonos, son los picos que aparecen en el histograma; Se tiene un efecto de suavizante, y de homogeneidad del color, teniendo en cuenta que una imagen tiene un buen contraste si su histograma se extiende ocupando casi todo el rango de tonos.



(a) Imagen original



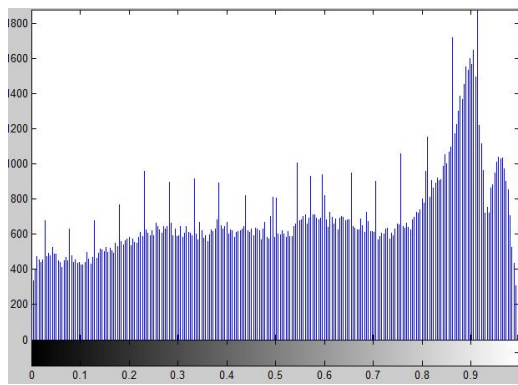
(b) Imagen filtrada



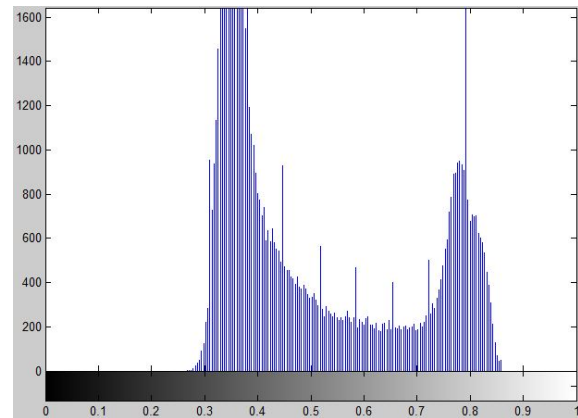
(c) Imagen original



(d) Imagen filtrada



(1)



(2)

Figura 2.13: Resultado de procesar la imagen de la figura (3.1), (a) Imagen original, (b) con $prop=1000$ y $n = 300$, (c) Imagen original, (d) Resultado de la imagen original procesada con el filtro mencionado en el inciso (b).

(1) Histogramas de la imagen (b), (2) Histogramas de la imagen (d).

En este efecto se nota la malla con la que se hizo el recorte de la imagen, en este caso la proporción es muy grande respecto a n , se alcanza apreciar el rellenado de la imagen, teniendo un efecto suavizante y contrastante.

Capítulo 3

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de tesis, se presentaron las siguientes apreciaciones:

El filtro obtenido muestra una gran cantidad de efectos de acuerdo a las cantidades de particiones y proporciones, de acuerdo de que efecto se quiere realizar si tomamos $n = 1$ y se modifica la *prop* obtenemos efectos tales como limpieza, y compresión. Si se modifica n obtenemos efectos de suavizado y contraste así como el relleno de la imagen tal y como muestra la figura(2.13).

Los histogramas manifiesta como es el proceso de compresión y los tonos que son relevantes en las diferentes modificaciones del filtro, cabe señalar que cada histograma es sumamente importante a la hora de observar que resultados se están obteniendo, debido que al ser visualizada no se logra apreciar claramente la diferencia lo cual podemos verificar con los datos arrojados por el histograma.

El proceso de compresión se refleja en las figuras donde se modifica las particiones donde se ve que la imagen es recortada de hay que se pierde información a la hora de modificar las particiones.

Se hace la aclaración que los efectos buscados son netamente de acuerdo a cada imagen, ya que cada imagen tiene sus propias características de información. Así como las diferentes modificaciones que se pueden realizar en el filtro. Se pueden implementar más funciones dentro del filtro, para buscar nuevos efectos; se puede realizar una aplicación para procesar imágenes.

ANEXO

El capítulo anexos contiene el código para realizar el filtro en el programa *MATLAB*, en el cual se especifica la sintaxis necesaria para el desarrollo del proyecto. código del filtro:

```
function imagen

'----- begin'
f=imread('rui.jpg'); %importa la imagen
g=rgb2gray(f);      %convierte la imagen en escala de grises
imshow(g)
figure
imhist(g)
xlabel('1')

[X,Y]=size(g);

X
Y

%tomamos n partes
n=200;

kh=floor(X/n)      % divide X en n partes
kv=floor(Y/n)      % divide Y en n partes

for(ii=0:n-1)
for(jj=0:n-1)

for(iii=1:kh)
for(jjj=1:kv)
C(iii,jjj)=g(iii+ii*kh,jjj+jj*kv);
end
end

C=defi(C);          % aplica en filtro
```



```

for(iii=1:kh)
for(jjj=1:kv)
g2(iii+ii*kh,jjj+jj*kv)=C(iii,jjj);      % une las n partes
end
end

end
end

imagesc(g2);          % muestra la imagen filtrada
colormap(gray);

figure
imhist(g2)           % muestra histograma de la imagen filtrada

'----- end'
end

function C=defi(C) % Filtro
C=double(C)/256;
C=fft2(C);          %aplicamos transformada rápida de Fourier
C1=C;

[kh kv]=size(C);
k=1;
for(iii=1:kh)
for(jjj=1:kv)
V(k)=C(iii,jjj);
k=k+1;
end
end

M=sum(V)/k;          %se obtiene la media
V2=V.^2;
M2=sum(V2)/k;
desv=(M2-M^2)^0.5;   %se halla la desviación estándar
C=exp(-((M-C)/desv).^2/2)/(desv*(2*pi)^0.5); %se aplica la media gaussiana
prop=2;             % proporción

for(iii=1:kh)
for(jjj=1:kv)

if(M-2*desv/prop<C(iii,jjj) && C(iii,jjj)<M-desv/prop)
C(iii,jjj)=M-desv/prop;
end
if(M-3*desv/prop<=C(iii,jjj) && C(iii,jjj)<=M-2*desv/prop)

```

```

    C(iii,jjj)=M-2*desv/prop;
end
if(M-4*desv/prop<=C(iii,jjj) && C(iii,jjj)<=M-3*desv/prop)
    C(iii,jjj)=M-3*desv/prop;
end
if(C(iii,jjj)<M-4*desv/prop)
    C(iii,jjj)=M-4*desv/prop;
end

if(M+desv/prop<=C(iii,jjj) && C(iii,jjj)<=M+2*desv/prop)
    C(iii,jjj)=M+desv/prop;
end
if(M+2*desv/prop<=C(iii,jjj) && C(iii,jjj)<=M+3*desv/prop)
    C(iii,jjj)=M+2*desv/prop;
end
if(M+3*desv/prop<=C(iii,jjj) && C(iii,jjj)<=M+4*desv/prop)
    C(iii,jjj)=M+3*desv/prop;
end
if(C(iii,jjj)>M+4*desv/prop)
    C(iii,jjj)=M+4*desv/prop;
end

end
end
C=(C1-0.1*C);
C=real(iff2(C)); %aplicamos transformada inversa de Fourier

end

```

Bibliografía

- [1] BRACEWELL, R.(2000). «*The Fourier Transform And Its Applications*» international McGRAW-HILL .
- [2] BURDEN R.L. , FAIRES J.D. y L. Eddins.(2011) «*Numerical analysis*».BROOKS/COLE.
- [3] EFFORD N.(2000) «*Digital Image Processing A Practical Introduction Using Java*» USA, Pearson Education.
- [4] GONZÁLEZ, R.C. y WINTZ, P.(1996). «*Procesamiento digital de imágenes*» Addison- Wesley .
- [5] ORTÍZ, M.M.(2013) «*Procesamiento Digital de Imágenes*».Facultad de Ciencias de la Computación ,Universidad Autonoma de Puebla.
- [6] PRATT y WILLIAM K.(2014), «*Introduction to Digital Image Processing*» , USA Taylor Francis Group.
- [7] RAFAEL C. GONZALEZ , WOODS, R. y L. Eddins.(2009). «*Digital Image Processing Using MATLAB*» Gatesmark Publishing .
- [8] RAFAEL C. GONZALEZ y RICHARD E. WOODS,(2007)«*Digital Image Processing* USA, Prentice Hall.