26.

FECHA	lunes, 9 de julio de 2018

Señores
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
BIBLIOTECA
Ciudad

UNIDAD REGIONAL	Sede Fusagasugá

TIPO DE DOCUMENTO	Tesis

FACULTAD	Educación

NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO	Pregrado

PROGRAMA ACADÉMICO	**Licenciatura en Matemáticas**

El Autor(Es):

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS	No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN
Jiménez García	Jose Miguel	1.069.743.650

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS
Gonzales Galeano	Andrei

TÍTULO DEL DOCUMENTO
UNA VISIÓN CATEGÓRICA DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS

SUBTÍTULO (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciado en Matematicas

AÑO DE EDICION DEL DOCUMENTO	NÚMERO DE PÀGINAS
12/06/2018	35

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
ESPAÑOL	INGLÉS
1. Categoría	Category
2. Homeomorfismo	Homeomorphism
3. Simetría	Symmetry
4. Igualadores	Equalizers
5. Productos	Products
6. Lipschitz	Lipschitz

RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS
(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

La elaboración de este material se realizó con el fin de estudiar los espacios métricos, junto con las aplicaciones a estos de la teoría de categorías. Dicha teoría en las últimas décadas ha sido parte de muchos estudios en los diferentes campos de la matemática, esto nos lleva a preguntarnos, ¿los espacios métricos se pueden estudiar a partir de la teoría de categorías?

The elaboration of this material was done with the purpose of studying the metric spaces, together with the applications to these of the theory of categories. This theory in recent decades has been part of many studies in different fields of mathematics, this leads us to ask, can metric spaces be studied from the theory of categories?

AUTORIZACION DE PUBLICACIÒN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una “X”:

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.	X	
2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	X	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.		X
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, *"Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores"*, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

Información Confidencial:

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI__NO**_X_.
En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

LICENCIA DE PUBLICACIÒN

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente).

b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.

c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.

d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.

f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el "Manual del Repositorio Institucional AAAM003"

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia CreativeCommons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.

j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia CreativeCommons Atribución- No comercial- Sin derivar.

Nota:
Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan

que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).

Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1.	
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafa)
Jimenez Garcia Jose Miguel	

12.1.50

UNA VISIÓN CATEGÓRICA DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS

JOSE MIGUEL JIMENEZ GARCIA

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACION
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
FUSAGASUGÁ
2018

UNA VISIÓN CATEGÓRICA DE LOS ESPACIOS MÉTRICOS

JOSE MIGUEL JIMENEZ GARCIA

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de: Licenciatura en Matemáticas

Director: Andrei Gonzales Galeano
Magíster en Matemática Aplicada

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACION
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
FUSAGASUGÁ
2018

Caballeros, esto es sin duda cierto, es absolutamente paradójico,
no podemos comprenderlo y no sabemos lo que significa,
pero lo hemos demostrado y, por lo tanto,
sabemos que debe ser verdad
Charles Sanders Peirce (1839-1914)

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia ya que ellos me apoyaron en cada paso dado, también agradezco a mi asesor, el docente Andrei Gonzales Galeano, por su colaboración y constante entrega, junto con su disponibilidad ante cualquier interrogante y constante guía, a Jessica Perez que con toda su forma de ser fue un gran aporte en mi vida como estudiante. Y agradezco a mis amigos que junto con mis compañeros me han ayudado de una u otra forma en este proceso.

Resumen

La elaboración de este material se realizo con el fin de estudiar los espacios métricos, junto con las aplicaciones a estos de la teoría de categorías.
Dicha teoría en las ultimas décadas a sido parte de muchos estudios en los diferentes campos de la matemática, esto nos lleva a preguntarnos, ¿los espacios métricos se pueden estudiar a partir de la teoría de categorías?.
El trabajo se realizo en dos capítulos fundamentalmente, el primer capitulo muestra las bases teóricas, definición de categorías, espacio métrico, igualadores y producto, teniendo en cuenta que se lista el total de definiciones a usar en el desarrollo de este.
La segundo capitulo de este consiste en la aplicación de la teoría de categorías a la definición de métrica, generando a partir de esto diferentes composiciones de resultados, desde aplicaciones a conjuntos, espacios de Lipschitz en la categoría Met_L, la categoría Met, espacios topologicos entre algunos resultados que se fueron dando a partir del desarrollo de la temática.
A partir de esto se muestra este primer material introductorio a la teoría de categorías, en general una aplicación de la teoría categórica a los espacios métricos.

Palabras claves
Teoría de categorías, topologia, funcion Lipschitz, espacio metrico, mapas de Lipschitz.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Dado un espacio métrico, hay una manera de observarla por la teoría de categorías. Esta nueva forma de describir estos espacios es nombrada como Met.
En este trabajo los espacios métricos son aplicados desde el punto de vista Met, la cual nos permite de diversas formas observar los tanto los espacios topológicos como las funciones de Lipschitz.

En la primera parte se realizó la consulta bibliográfica referente a los trabajos que han explorado ciertas ramas de dicha teoría, junto con las bases teóricas necesarias y definiciones, las cuales son utilizadas durante el desarrollo del documento. Sabiendo que las categorías tienen propiedades que deben cumplirse, objetos de la categoria, morfismos, isometría, productoria y coigualadores.

En la segunda parte del trabajo se expone el uso de las categorías en los espacios métricos. observando las propiedades de isometría y morfismos en los espacios métricos, topológicos, funciones de Lipschitz a través de Met.
Finalmente, el documento elaborado como introductorio a la teoría de categorías en los espacios métricos, da a conocer diferentes formas de observación, siendo Met la categoría utilizada.

Capítulo 2

Objetivos

2.1. Objetivo General

Describir la estructura de los espacios métricos por medio de la teoría de categorías.

2.2. Objetivos Específicos

- Relacionar los conceptos asociados a los espacios métricos con conceptos en teoría de categorías.
- Construir un material introductorio a la teoría de categorías.
- Desarrollar la teoría de conjuntos como un caso particular de la teoría de categorías.
- Construir una generalización de kernel y cokernel desde la teoría de categorías.

Capítulo 3

Marco teórico

3.1. Antecedentes

- Contexto de Morita para Categorías Abelianas. Estudio de Funtores Separables.
  Universidad de Almería (España).
  Varias han sido las teorías desarrolladas para obtener equivalencias entre diferentes tipos de categorías abelianas, como son subcategorías y categorías cocientes de comodulos y comodulos graduados sobre una coalgebra, un ejemplo es la teoría de K. morita sobre equivalencias entre categorías de módulos sobre anillos asociativos unitarios. esta teoría ha dado lugar a la noción de contexto de morita, que proporciona los "datos previos" a la obtención de la equivalencia (Castaño, 1996).

- Categorías de Modelos y Localización.
  Universidad de Buenos Aires (Argentina).
  A fines de los años 40 y comienzos de los 50, J.H.C. Whitehead introdujo los hoy llamados CW-complejos y demostró algunos de los resultados m´as importantes de la teoría de homotopía, entre ellos los teoremas de aproximación celular. Whitehead probó también que una equivalencia débil entre CW-complejos (es decir una función continua entre CW-complejos que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía) es una equivalencia homotópica. En lenguaje moderno, estos resultados se interpretan diciendo que la categoría homotópica de los espacios topológicos (es decir, la categoría que se obtiene invirtiendo las equivalencias débiles) es equivalente a la subcategoría plena de los CW-complejos cocientada por la relación de homotopía (Ottina, 2005, p.3).

- Una Introducción a la Teoría de Representaciones de Álgebras.
  Universidad de Antioquia Medellín (Colombia).
  En este trabajo se pretende describir dos de las técnicas que se volvieron esenciales a lo largo de los últimos años en el estudio de la teoría de representaciones de álgebras.
  La teoría de representaciones de álgebras ha avanzado bastante, hasta el punto en que hoy es una de las áreas más activas de investigación matemática. En Colombia esta teoría comienza a desarrollarse en el año 2001 con la llegada del profesor Alexander Zavadskij al Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá(Giraldo, 2015, p.1).

- Sobre las Subcategorías Reflexivas y Correflexivas de la Categoría de los Espacios Topológicos.
  Universidad Nacional de Colombia.
  En este trabajo se presentan las definiciones y algunos ejemplos de subcategorías reflexivas y correflexivas, se construyen ejemplos de estos dos conceptos en la categoría Top usando para ello los conceptos de topológias iniciales y finales de las categorías topológicas y con estos elementos se construyen elevadores y coelevadores de estructura.
  Es frecuente en el trabajo de ciertas áreas de la matemática construir objetos enriquecidos con propiedades universales a partir de objetos dados. Estas ideas motivan las definiciones de subcategorías Reflexivas y Correflexivas, nociones que expresan mejoramiento, optimización y densidad (Hernández, 2012, p.9).

- Nociones de Mejoramiento en Teoría de Categorías Subcategoría reflexiva - subcategorías correflexivas.
  Universidad Distrital Francisco José de Caldas-Colombia). En éste artículo se trabajan los conceptos de subcategorías reflexivas y correflexivas. El artículo presenta las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de subcategorías reflexivas, así como varios ejemplos en diferentes áreas de la matemática.
  Es frecuente en el trabajo de ciertas estructuras matemáticas construir objetos enriquecidos estructuralmente a partir de objetos dados. Por ejemplo, dado un espacio topológico, asociarle el mejor espacio compacto, dado un espacio pseudométrico construir a partir de él un espacio métrico, dado un grupo construirle el mejor grupo abeliano. Estas ideas conllevan las acciones de subcategorías reflexivas y correflexivas (Hernández y Montañés, 2004, p.1).

3.2. Bases teóricas

3.2.1. Definición de categoría

La teoría de categorías y funtores ha adquirido en los últimos años un desarrollo tal que se ha convertido en una rama del álgebra y la lógica con metodología y dinámica propias. Para un buen número de áreas de la matemática, entre ellas el álgebra, la teoría de categorías ha jugado un papel importante de lenguaje, a través del cual se presentan y obtienen resultados de una manera global y elegante [2].
Una categoría **C** consta de los siguientes:

- Un conjunto $Ob(\mathbf{C})$ de objetos, A, B,...

- Un conjunto $Mor(\mathbf{C})$ de morfismos f, g,...

- Una aplicación $d_0 : Mor(\mathbf{C}) \longrightarrow Ob(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in Mor(\mathbf{C})$ le asigna el objeto $d_0(f)$, al que denominamos el *dominio* de f.

- Una aplicación $d_1 : Mor(\mathbf{C}) \longrightarrow Ob(\mathbf{C})$ que a cada morfismo $f \in Mor(\mathbf{C})$ le asigna el objeto $d_1(f)$, al que denominamos el *codominio* de f.

- Una aplicación $id : Ob(\mathbf{C}) \longrightarrow Mor(\mathbf{C})$ que a cada objeto $A \in Ob(\mathbf{C})$ le asigna el morfismo id_A al que denominamos el morfismo *identidad* de x.

- Siendo $Mor(\mathbf{C}) \prod_{Ob(\mathbf{C})} Mor(\mathbf{C})$ el conjunto definido como:
  $$Mor(\mathbf{C}) \prod_{Ob(\mathbf{C})} Mor(\mathbf{C}) = \left\{(f, g) \in Mor(\mathbf{C})^2 \middle| \, d_0(f) = d_1(g) \right\}$$
  una aplicación $\circ : Mor(\mathbf{C}) \prod_{Ob(\mathbf{C}))} Mor(\mathbf{C}) \longrightarrow Mor(\mathbf{C}))$, que a cada par

  $(f, g) \in Mor(\mathbf{C}) \prod_{Ob(\mathbf{C})} Mor(\mathbf{C})$ le asigna el morfismo $f \circ g$, al que denominamos

  la *composición* de f y g.

Si A, $B \in Ob(C)$, entonces $Hom_C(A, B)$ es el conjunto de los morfismos de C cuyo dominio es A y cuyo codominio es B, es decir, el conjunto definido como:

$$Hom_C(A, B) = \{f \in Mor(\mathbf{C}) | \, d_0(f) = Ad_1(f) = B \}.$$

Convenimos que $f : A \longrightarrow B$ es sinónimo de $f \in Hom_C(A, B)$.
Estando estos datos sujetos a cumplir las siguientes condiciones:

1 Para cada $A \in Ob(\mathbf{C})$, $d_0(id_A) = A$ y $d_1(id_A) = A$.

2 Para cada par $(f, g) \in Mor(\mathbf{C}) \prod_{Ob(\mathbf{C}))} Mor(\mathbf{C})$, $d_0(f \circ g) = d_0(g)$ y $d_1(f \circ g) = d_1(f)$.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, bend left=60, "(h \circ g) \circ f"] \arrow[drr, bend right=60, "h \circ (g \circ f)"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}
$$

3 Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ son tres morfismos, entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, es decir, el diagrama conmuta.

4 Si $f : A \longrightarrow B$, entonces $f \circ id_A = f$ y $id_B \circ f = f$, es decir, los diagramas conmutan.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "id_B"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

En algunas ocasiones, para abreviar, denotaremos el conjunto de los objetos de una categoría $\mathbf{C}$, simplemente por $\mathbf{C}$, y si $A, B \in \mathbf{C}$, es decir, si $A, B \in Ob(\mathbf{C})$, entonces denotaremos por $Hom(A, B)$ o por $\mathbf{C}(A, B)$ de los morfismos de A en B.

3.2.2. Espacio métrico

Un espacio métrico es un conjunto X de puntos en los que esta definido la noción de distancia entre puntos. Podemos usar la función distancia o métrica para definir los conceptos fundamentales del análisis, tales como convergencia, continuidad y compacidad [5].

- $d(x, y) \geq 0$ si $x \neq y$

- $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$

- $d(x, y) = d(y, x)$

- $d(x, x) = 0$

- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$; $x, y, z \in X$

3.2.3. Función de Lipschitz

Una función $f : M \longrightarrow N$ entre espacios métricos (M, d_M) y (N, d_N) se dice que es lipschitziana (o se dice que satisface una condición de Lipschitz o que es Lipschitz continua) si existe una constante $K > 0$ tal que:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq K d_M(x, y), \forall x, y \in M$$

En tal caso, K es llamada la constante Lipschitz de la función. Para funciones definidas sobre espacios euclídeos la relación anterior puede escribirse:

$$\parallel f(x) - f(y) \parallel \leq K \parallel x - y \parallel, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Ejemplo La función $f(x) = x^2$ no es Lipschitz continua en $\mathbb{R}$

Demostracion. Razonando por contradicción supongamos que $L \geq 0$ y para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$\mid f(x_2 - f(x_1 \mid \leq L \mid x_2 - x_1 \mid .$$

Entonces para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ se debe cumplir la desigualdad

$$\frac{\mid f(x_2) - f(x_1) \mid}{x_2 - x_1} \leq L.$$

En particular si $x_1 = 0$ y $x_2 = n$ con un $n \in 1, 2, ...$ arbitrario, entonces

$$\frac{n^2 - 0}{n - 0} \leq L,$$

Entonces sea $n \leq L$. Pero n es arbitrario, y el numero L debe ser mayor o igual que cualquier número entero positivo n. No existe ningún L con esta propiedad, así llegamos a una contradicción.

3.2.4. Continuidad en un espacio métrico

Sean (X, d) e (Y, p) espacios métricos y $f : (X, d) \longrightarrow (Y, p)$ una función.

Definición: Si $a \in X$, se dice que f es *continua* en a, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\varphi = \varphi(a, \epsilon) > 0$ tal que para cada $x \in X$ verificando $d(x, a) < \varphi)$, es $p(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Observación: Si $(X, d) = (Y, p) = (\mathbb{R}, d_u)$, esta definición es precisamente la usual de continuidad del Análisis Real [3].

3.2.5. Igualadores y coigualadores

Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $f, g : X \longrightarrow Y$ morfismos de $\mathbf{C}$. Se dice que el morfismo $h : Z \longrightarrow X$ es un igualador de f y g si:

1 $f \circ h = g \circ h$

2 Para cada morfismo $k : W \longrightarrow X$ tal que $f \circ k = j \circ k$ existe un único morfismo $\phi : W \longrightarrow Z$ tal que $h \circ \phi = k$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "h"] & & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
& W \arrow[ul, "\exists!\phi"] \arrow[ur, "k"'] & &
\end{tikzcd}$$

Propiedad universal

Afirmación: h es un monomorfismo

Demostracion. En efecto sea $t, s : R \longrightarrow Z$ tal que $h \circ t = h \circ s$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
R \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "h\circ t"'] & &
\end{tikzcd}$$

Puesto que h es igualador de f y g, $f \circ h \circ t = g \circ h \circ t$, existe un único morfismo $\alpha : R \longrightarrow Z$ tal que, $h \circ \alpha = h \circ t$, con $\alpha = t$ y $\alpha = s$, satisfacen la igualdad por la unicidad de α, $t = s$ por lo tanto h es monomorfismo.

Afirmación: Si $k : W \longrightarrow X$ es un igualador de f y g solamente si $k \sim h$.

Definición. Se dice que **C** es una categoría con igualadores si todo par de morfismos con dominio y codominio comunes tiene igualador.

De manera dual se tiene la definición de coigualador y las propiedades duales.

A continuación, el siguiente ejemplo da una forma mas clara de la definición anterior:

En el siguiente ejemplo, contextualizamos la teoría anteriormente mencionada, teniendo en cuenta las dos observaciones siguientes y la presentación gráfica en la parte inferior.
Ejemplo. En la categoría de los conjuntos tiene igualador, sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones. Sean $I = \{x | \, f(x) = g(x)\, \}$.

$i : I \longrightarrow X$ la inclusión.

1 Claramente $f \circ i = g \circ i$.

2 Sea $k : W \longrightarrow X$ una función tal que $f \circ k = g \circ k$, sea $\phi : W \longrightarrow i$ definida por $\phi(w) = k(w)$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f", "g"'] & Y \\ W \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

$k(w) \in I$ pues $f \circ k = w = f(k(w))$, por lo tanto tenemos $f \circ k = w = g(k(w))$. Luego ϕ esta bien definido y ϕ es la única que verifica dicha igualdad (es monomorfismo).

1 En conjuntos f es monomorfismo si y solo si f es igualador si y solo si f es inyectiva.

2 En la categoría de conjuntos f tiene coigualadores.

Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "g"'] & Y \arrow[r, "\eta"] & Y/\bar{R} \end{tikzcd}$$

Sea $R = \{(f(a), g(a)) |\, a \in X\}$, entonces $f(a)Rg(a)$.

($\Rightarrow$) Sea $\bar{R}$ la relación de equivalencia generada por R.

Definición. $b\bar{R}b'$ si y solo si $b = b'$ o bien si existen $a_1, a_2, a3, ..., an, an+1$ cadena en Y tal que $b = a_1$ y $b' = a_{n+1}$ y para todo $1 \leq k \leq n$, $a_k R a_{k+1}$ ó $a_{k+1} R a_k$ $\eta(b) = \bar{b}$ claramente $\eta \circ f = \eta \circ g$.
Sea $h : Y \longrightarrow Z$ tal que $h \circ f = h \circ g$ entonces se define $\phi : Y/\bar{R} \longrightarrow Z$ así $\phi(\bar{b}) = h(b)$, ϕ esta bien definida, en efecto $\bar{b} = \bar{b}$, entonces por ($\Rightarrow$) $h(b) = h(a_1) = h(a_2) = ... = h(a_{n+1}) = h(b')$, ϕ es la que verifica la igualdad $\phi \circ \eta = h$ pues η es epimorfismo (sobre).

3.2.6. Productos y coproductos

Sea **C** una categoría, I un conjunto no vació, $\{x_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos de **C**. Un objeto X, junto con una familia de morfismos $\{p_i : X \longrightarrow x_i\}_{i \in I}$ es llamado un producto de la familia $\{x_i\}_{i \in I}$ si para cada objeto de Y y toda familia de morfismos $\{h_i : Y \longrightarrow x_i\}_{i \in I}$ existe un único morfismo $\phi : Y \longrightarrow X$ tal que $p_i \circ \phi = h_i$ $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd} & X \\ X_i \arrow[ur] & \\ & Y \arrow[ul, "h_i"] \arrow[uu, "\exists! \phi"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X_1 & & X_2 \\ & Y \arrow[ul, "h_1"] \arrow[ur, "h_2"'] \arrow[uu, "\exists! \phi"] & \end{tikzcd}$$

El objeto X se nota $\prod x_1$ cuando I es finito se nota $x_1 x_2 x_3 ... x_n$.
($\Rightarrow$) Si $\{h_i : Y \longrightarrow x_i\}$ es un producto de la familia ${}_i\}_{i\in I}$ entonces $X \cong Y$ se dice que **C** es una categoría con productos si toda familia no vacía de objetos tiene producto.
De manera dual se define el coproducto.

Afirmación: La categoría de los conjuntos tiene productos.

Demostración. En efecto sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos, se tiene que $\prod x_i = \{f : I \longrightarrow \cup x_i | \, f(i) \in x_i\}$ para cada $i \in I$.

Sea $p_i : \prod x_i \longrightarrow x_i$ definida por $p(f) = f(i)$. Si $\{h_i : Y \longrightarrow x_i\}_{i\in I}$ es una familia de fun-

ciones, se define $\phi : Y \longrightarrow \prod x_i$ por $\phi(y)$ así $\phi(y) : I \longrightarrow \cup x_i$, entonces $\phi(y)(i) = h_i(y)$. Claramente ϕ es la única que verifica la igualdad $p_i \phi = h_i$ eso es $\forall i \in I$ conjuntos $\phi(y) = (h_1(y), h_2(y))$.

Afirmación: La categoría de los conjuntos tiene coproductos.

Demostración. En efecto sea $\{x_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos continua, se define $\cup x_i = \cup_{i\in I}(x_i\{i\})$, $q_i x_i \longrightarrow \cup x_i$ por tanto $q_i(x) \longrightarrow (x, i)$ para cada $i \in I$.
Caso cuando $n = 2$.

$$\begin{tikzcd}
& x_1\{1\}\cup x_2\{2\} & \\
X_1 \arrow[ur, "a_1"] \arrow[dr, "n_1"'] & & X_2 \arrow[ul, "a_2"'] \arrow[dl, "n_2"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

$$q_1(x) = (x, 1)$$

$$\mathrm{q}_2(x) = (x, 2)$$

$$\phi = x_1 \cup x_2 \longrightarrow Y$$

$$\phi(x, 1) = h_1(x)$$

$$\phi(x, 2) = h_2(x)$$

Sigue si $\{h_i x_i \longrightarrow Y\}$ es una familia de funciones, se define $\phi = \cup x_i \longrightarrow Y\}$,
$\phi(x, i) \longrightarrow h_i(x)$.

3.2.7. Teorema del punto fijo de Banach

Sea (X, d) un espacio métrico completo y f una aplicación. Se dice que f es contractiva si existe una constante K con $0 < K < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in X$.Un punto fijo x_0 de f es un punto de X tal que $f(x_0) = x_0$.
Entonces el teorema del punto fijo de Banach dice:

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación contractiva en X. Entonces existe un único punto fijo de f. Stefan Banach

Además, el teorema establece que para todo punto x de X la sucesión $\{x, f(x), f(f(x)), ...\}$ converge a dicho punto fijo.

Demostración.
Existencia del punto fijo: La demostración se sigue de que la sucesión así definida es una sucesión de Cauchy por ser la función contractiva. Como X es completo, esta sucesión converge a un punto x_0 de X.

Unicidad del punto fijo: Supongamos que x_0 y y_0 son dos puntos fijos distintos de f situados a una distancia d uno del otro. Entonces, $0 < d = d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0))$ y, como f es contractiva, $d(f(x_0), f(y_0)) \leq Kd(x_0, y_0) < d(x_0, y_0) = d$ De lo anterior se sigue que $d < d$, pero esto es absurdo, por lo que f no puede tener dos puntos fijos distintos.

3.3. Definiciones

Para el siguiente capítulo, vamos a utilizar las siguientes definiciones, las cuales son necesarias en el desarrollo del mismo contenido.

3.3.1. Definición

Isometría

$$f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$$
$$d(x_1, x_2) = e(f(x_1), f(x_2))$$

La isometría, es una transformación geométrica que conserva las distancias existentes entre rectas, longitudes y ángulos.

3.3.2. Definición

Sean (X, d) y (Y, e) espacios métricos. definimos la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$, como un isomorfismo si, es isométrica y biyectiva.

3.3.3. Definición

Sea la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$ la función f es Lipschitz, si existe $\lambda \in R$ con $\lambda > 0$ tal que $e(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda d(x_1, x_2)$, $\forall X_1, x_2 \in X$.

3.3.4. Definición

Definimos la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$, y sea $x_0 \in X$, f es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$ existe un δ tal que $\forall x \in X$ si $d(x, x_0) < \delta \longrightarrow e(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

3.3.5. Definición

Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$ una función, que es, uniformemente continua, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall (x, y) \in X$, $d(x, y) < \delta$, entonces $e(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Si se tiene continuidad uniforme, entonces se tiene continuidad.

3.3.6. Definición

Sea la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$. La función f es contracción, si $e(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2)$, esto $\forall x_1, x_2 \in X$.

3.3.7. Definición

Sea la función $t : (X, d) \longrightarrow (X, d)$, es contracción si es Lipschitz, y la contante de Lipschitz es < 1. De manera que, existe $0 < \lambda < 1$, tal que

$$e(t(x_1, t(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2).$$

3.3.8. Definición

Sea x un conjunto y τ, τ_0 topologias sobre X, si $\tau_0 \subset \tau$, decimos que τ es mas fina ó τ_0 es menos fina que τ.

3.3.9. Definición

Una función biyectiva $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \varrho)$ es un homeomorfismo, si es biyectiva continua y f^{-1} es continua.

3.3.10. Definición

Sea (X, τ) un espacio topológico, con $A \subset X$, $\tau_A = \{A \cap O \mid O \in \tau\}$ es topología sobre A. Decimos que (A, τ_A) es subespacio del espacio topológico (X, τ).

Capítulo 4

Marco metodológico

4.1. Linea y tipo de investigación

En la presente monografía se desarrolla mediante el método exploratorio, ya que la información recolectada en el desarrollo del material se realizo de manera exhaustiva, de tal manera que las definiciones son concisas del tema.

La revisión bibliográfica se da a partir de artículos relacionados y libros que plantea definiciones, como ayuda a la elaboración del documento. Al observar los espacios métricos de forma categórica, con la utilización de Met para los espacios topológicos, funciones Lipschitz, epimorfismos y monomorfismos.

De esta manera el documento elaborado permite incentivar a continuar la investigación y la apertura de un curso introductorio de teoría de categorías en los espacios métricos.

4.2. Diseño de investigación

Esta monográfia, se realizo siguiendo la linea del curso de teoría de categorías, realizado por el profesor Reinaldo Montañés que hace parte de la Universidad Nacional de Colombia, sumándole a este curso, se tiene la indagación acerca del tema anteriormente mencionado.

Capítulo 5

Análisis e interpretación de resultados

En el presente capitulo, se dará interpretación y aplicación a las definiciones y teoremas enunciados en el marco teórico, teoría de categorías, espacios métricos, funciones de Lipschitz, continuidad, igualadores, productos, punto fijo de Banach y las definiciones listadas.

5.1. Categoría espacios métricos

Sea (X, d) un espacio métrico, decimos que $A \subseteq X$, siendo (A, d_A) un subespacio métrico de (X, d).

Dada la definición (3.3.1) que nos indica la estructura de una isometría y como esta transformación conserva distancias, longitudes y ángulos. Por lo cual nos da como consecuencia la siguiente propiedad.

Propiedad.
Si la función f es isometrica, entonces, f es inyectiva. Definimos a x_1 y x_2 tal que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, $0 = e(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \longrightarrow x_1 = x_1$.

En la definición (3.3.2) en la cual nos describe los espacios métricos como isomorfismos, por lo cual la función es isométrica y biyectiva. Dando paso a la siguiente propiedad.

Propiedad.
Si la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$ es isomorfismo, entonces $f^{-1} : (Y, e) \longrightarrow (X, d)$ es isomorfismo.

Demostración.
Sea y_1, $y_2 \in Y$ como f es biyectiva, existe x_1, $x_2 \in X$ unidos tal que:

$$f(x_1) = y_1 \longrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1)$$

$$f(x_2) = y_2 \longrightarrow x_2 = f^{-1}(y_2)$$

$$\begin{aligned}
d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) &= d(x_1, x_2) \\
d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) &= e(f(x_1), f(x_2)) \\
d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) &= e(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

La función es Lipschitz, según la definición (3.3.3), teniendo en cuenta la siguiente observación.

Observación:

1 Cada isometria es Lipschitz.

Propiedad.

Las funciones constantes son Lipschitz. Definimos la función

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$X \longrightarrow c \in Y$$

$x_1,\ x_2 \in X$; $e(f(x_1), f(x_2)) = e(c, c) = 0 \leqslant d(x_1, x_2)$

Observación: Las funciones constantes, en general, no son isomorficas, y tampoco son isometria.

Para la definición (3.3.4) tener en cuenta, que la función debe ser continua en el punto dado. Mientras que para la definición (3.3.5) la función debe ser uniformemente continua, que por esto se demuestra continuidad, lo cual veremos de forma mas clara en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. $(\mathbb{R}, usual)$ Tomando la función, como ya la hemos venido analizando. $d(x, y) = \mid x - y \mid$, esto esta dado $\forall x, y \in R$

$$f = (0, 1) \longrightarrow R$$

Con la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

La función f es continua:

$$f = (0, 1) \longrightarrow R$$

$$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

Sea $0 < x_0 < 1$, supongamos $\mid x - x_0 \mid < \delta$, de tal forma que

$$\mid f(x) - f(x_0) \mid$$

sustituyendo, tendremos:

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right|$$

al realizar la operación tendremos:

$$\left|\frac{x_0 - x}{xx_0}\right|$$

también lo podemos ver de esta forma:

$$|\ x - x_0\ | \cdot \left|\frac{1}{xx_0}\right|$$

· Notemos que la función f no es uniformemente continua.
Fijando $\varepsilon = 1$ dado un $\delta > 0$, tomamos $0 < x < \delta$. Para $y = \dfrac{x}{2}$ se tiene que:

$$(x, y) = \left|x - \frac{x}{2}\right| <|\ x\ |< \delta$$

tendríamos por consiguiente

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| > 1 = \varepsilon$$

Proposición. Sea la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$, si f es Lipschitz, entonces es uniformemente continua.

Demostración. Existe un $\lambda > 0$ tal que $\forall x_1, x_2 \in X$, entonces $e(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$, dado un $\varepsilon > 0$ definimos a $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$, si $d(x_1, x_2) < \delta = \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$, por lo tanto $e(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2) < \lambda\delta = \varepsilon$.

Propiedad.
La composición de funciones Lipschitz, es de nuevo Lipschitz.

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
(X, d) \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\
(Y, e) \arrow[r, "g"'] & (Z, h)
\end{tikzcd}$$

f es Lipschitz, entonces $e(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d(x_1, x_2)$.

g es Lipschitz, entonces $h(g(y_1), g(y_2)) \leq \mu e(y_1, y_2)$.

Al realizar la composición de la función f y g tendremos

$h(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \leq \mu e(f(x_1), f(x_2)) \leq \mu\lambda d(x_1, x_2)$.

Luego $g \circ f$ es Lipschitz, siempre y cuando las funciones f y g sean Lipschitz.

Propiedad.
Sea (X, d) un espacio métrico, entonces $id_{(X,d)}$, va de $(X, d) \longrightarrow (X, d)$, es Lipschitz.

5.2. Categoría $\mathbf{Met}_L$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Objetos: Espacios métricos} \\
Met_L \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Morfismos y función Lipschitz} \\
 & \text{Ley composición usual}
\end{tikzcd}
$$

Propiedad.
En la categoría Met_L los isomorfismos en el sentido métrico, no necesariamente, coinciden en el sentido categórico [4].
$A = [1, a] \subseteq \mathbb{R}$, y $B = [1, a^2[\subseteq \mathbb{R}$ donde $a \in \mathbb{R}$, con $a > 1$, de tal manera que la función f

$$f : A \longrightarrow B$$

$$x \longrightarrow x^2$$

y la función g

$$g : B \longrightarrow A$$

$$y \longrightarrow \sqrt{y}$$

· donde f es Lipschitz.
Definimos a x_1, $x_2 \in A$ tal que $1 \leq x_1, x_1 \leq a$.

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid = \mid (x_1)^2 - (x_2)^2 \mid = \mid x_1 - x_2 \mid\mid x_1 + x_2 \mid \leq 2a \mid x_1 - x_2 \mid$$

· donde g es Lipschitz, igualmente tomamos $x_1, x_2 \in B$, entonces $1 \leq x_1, x_2 \leq a^2$.

$$\mid g(x_1) - g(x_2) \mid = \mid \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \mid = \frac{\mid x_1 - x_2 \mid}{\mid \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2} \mid x_1 - x_2 \mid$$

tenemos que

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \geq 1$$

igualmente para

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 2$$

por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{1}{2}$$

por lo tanto es claro que, $f \circ g = id_A$, $g \circ f = id_B$, por lo tanto f, g no son isometria.

Esta definición (3.3.6) nos da una vision de la contracción, de tal manera que al aplicar la función en el rango se cada vez mas pequeña, teniendo en cuenta la siguiente observación de tal definición.

Observación: Como f es contracción , entonces es Lipschitz

5.3. Teorema punto fino de Banach

Sea (X, d), un espacio métrico completo, sea $t : (X, d) \longrightarrow (X, d)$ funciones, si t es contracción, entonces t tiene un único punto fijo.

Por definición (3.3.7), tenemos que es una contracción si es Lipschitz y esta constante es < 1, teniendo en cuenta las siguientes observaciones.

Observación:

1 La composición de contracciones, es también una contracción.

2 La identidad es contracción.

5.4. Categoría Met

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Espacios métricos} \\
Met \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Morfismos y Contracciones} \\
 & \text{Ley composición usual}
\end{tikzcd}$$

Propiedad. En la categoría Met, los isomorfismos, en el sentido métrico y categórico coinciden [4].

Demostración. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$ isomorfismos, en el sentido métrico, f es isometria biyectiva, entonces existe f^{-1} isometria biyectiva, por lo tanto f y f^{-1} son contracciones.

$$f \circ f^{-1} = id_{(X,d)}$$

y

$$f^{-1} \circ f = id_{(Y,e)}$$

Sea la función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, e)$ isomorfismo en el sentido categórico, existe una función $g : (Y, e) \longrightarrow (X, d)$, tal que

$$f \circ g = id_{(X,d)}$$

y

$$g \circ f = id_{(Y,e)}$$

Ahora veamos que f es isometría, sean $x_1, x_2 \in X$, tal que

$$e(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2) = d(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \leq e(f(x_1), f(x_2)),$$

luego

$$e(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$$

por tanto la función f es isometría, por tanto f es isometría en el sentido métrico.

5.5. Met

La Met es la aplicación de la categoría, teniendo en cuenta que tomamos como objetos iniciales los espacios métricos, contracciones junto con la composición usual

$$\begin{tikzcd} & \text{Espacios métricos} \\ Met \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Contracciones} \\ & \text{Composición usual} \end{tikzcd}$$

5.5.1. Objetos terminal (Y, e)

$$\forall (X,d) \xrightarrow{\exists ! \phi} (Y,e)$$

$$t : \{*\} \longrightarrow \overline{d}(x,x) = 0$$

Sea (X,d) cualquier espacio métrico, existe una única función

$$f_x : X \longrightarrow t$$

$$x \longrightarrow *$$

Si $x_1, x_2 \in X$, tal que $d(f(x_1), f(x_2)) = \overline{d}(*,*) = 0 \leq d(x_1,x_2)$.

Objetos iniciales en Met

$$(I,m) \xrightarrow{\exists ! \phi} \forall (Y,e)$$

Proposición. La categoría Met, no tiene como objeto inicial a un espacio métrico no vacío.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que (I,m), con $I \neq \phi$ es objeto inicial de Met.

$$(I,m) \xrightarrow{\phi} (I,m)$$

$$\phi : (I,m) \longrightarrow (I,m)$$

$\cdot$ y sea $c \in I$

$$\phi_c : (I,m) \longrightarrow (I,m)$$
$$c \longrightarrow c$$

son contracciones

$$\cdot \phi : (I,m) \longrightarrow (I,m)$$

es contracción, entonces por la unicidad, las funciones deben ser iguales, luego necesariamente $I = \{*\}$, y $m(*,*) = 0$.

Sea (X,d) un espacio métrico, tal que $\{a,b\} \subseteq X$, existe una unica contracción

$$\varphi : (I,m) \longrightarrow (X,d)$$

considerar

$$\varphi_a : (I, m) \longrightarrow (X, d)$$
$$* \longrightarrow a$$
$$\varphi_b : (I, m) \longrightarrow (X, d)$$
$$* \longrightarrow b$$

φ_a y φ_b son contracciones, pero $\varphi_a \neq \varphi_b$ por lo tanto, esto es una contradicción. $\longrightarrow\!\longleftarrow$

Observación. La Met tiene como objetos iniciales, al espacio métrico vacío.

5.6. Productos en Met

Sea $\{(X_i, d_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios métricos, supongamos que (X, d) es un espacio métrico, que juntado con $\{p_i : (X, d) \longrightarrow (X_i, d_i)\}$ proyecciones en el producto de la familia $\{(X_i, d_i)\}_{i\in I}$ [4].
Siendo p_i y q_i contracciones

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[rr, "p_i"] & & (X_i, d_i) \\
& \forall (Y,e) \arrow[ul, "\exists ! \phi"] \arrow[ur, "\forall q_i \longmapsto"'] &
\end{tikzcd}$$

Sea $(*, d_0)$ y sea $(a_i)_{i\in I}$, con I-tupla, tal que $a_i \in X_i$ esto para cada $i \in I$.

$$\widehat{a_i} = \{(*, d_0) \longrightarrow (X_i, d_i)\}$$

$$* \longrightarrow a$$

Se cumple la propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[rr, "p_i"] & & (X_i, d_i) \\
& (*,d_0) \arrow[ul, "\exists ! \phi"] \arrow[ur, "\widehat{a_i}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$p_i \circ \phi = \widehat{a_i}, \forall i \in I$$
$$p_i(\phi(*)) = \widehat{a_i}(*) = a_i$$

Si $a = \phi(*) \longrightarrow p_i(a) = a_i$ se tiene $\forall i$, existe una correspondencia biyectiva

$$\eta : X \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$$

$$a \longrightarrow (a_i)_{i\in I} = p_i(\phi(*))_{i\in I}$$

sin perdida de generalidad suponemos

$$x = \prod_{i\in I} X_i$$

sean $\overbrace{(a_i)_{i\in I}}^{a}$ y $\overbrace{(b_i)_{i\in I}}^{b}$ elementos en X

$$d_i(a_i, b_i) = d_i(p_i(a), p_i(b)) \leq d(a, b), \forall i \in I$$

Nota:
Una condición necesaria y suficiente para la existencia de $\prod_{i\in I}(X_i, d_i)$ una familia de espacios métricos $\{(X_i, d_i)_{i\in I}\}$, es que para cada par de i-tuplas $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ en $\prod_{i\in I} X_i$ el conjunto $\{d_i(a_i, b_i) \mid i \in I\}$ esta acotado superiormente.

Propiedad. La categoría Met no tiene productos.

Demostración. Supongamos que Met, tiene productos. Entonces sea $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, la familia dada por $X_n = \mathbb{R}$, $d_n = d_{usual}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elementos $\mathbb{R}^n$, definidos por

$$a_n = n \Rightarrow a = (1, 2, 3, ...)$$

$$b_n = -n \Rightarrow b = (-1, -2, -3, ...)$$

$$2n =\mid a_n - b_n \mid \leq \mid p_n(a) - p_n(b) \mid \leq d(a, b)$$

siendo $d(a, b)$ cota superior de $\mathbb{N}$. Contradicción $\longrightarrow\!\longleftarrow$

5.7. Coproductos en Met

Lezama O. (2014) "El producto y la suma directa externa permiten generalizaciones a categorías arbitrarias por medio de los objetos producto y coproducto, respectivamente"(p.39).

Los productos finitos existen, los coproductos no [4].

Propiedad. La categoría Met no tiene productos.

Demostración. Por contradicción
Sea $(\{*\}, d_0)$ un espacio unitario, definimos a (X, d) ser un espacio métrico, el coproducto $\{*\} \longrightarrow \{*\}$ con inyecciones $in_1, in_2 = (\{*\}, d) \longrightarrow (X, d)$.

Propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
\{*, d_0\} \arrow[r, "in_1"] \arrow[dr, "\forall h_1"'] & (X, d) \arrow[d, "\exists! \phi"'] & (*, d_0) \arrow[l, "in_2"'] \arrow[dl, "\forall h_2"] \\
 & \forall (Y, e) \forall h_2 &
\end{tikzcd}$$

Definimos para $n \in \mathbb{N}$, el siguiente espacio métrico $\varphi_n = \{a, b\}$

$$d_n(a, a) = d_n(b, b) = 0$$

$$d_n(a, b) = d_n(b, a) = n$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene (Y_n, d_n) espacio métrico. Ahora definimos

$$\widehat{a} : (*, d_0) \longrightarrow (Y_n, d_n)$$
$$* \longrightarrow a$$
$$\widehat{b} : (*, d_0) \longrightarrow (Y_n, d_n)$$
$$* \longrightarrow b$$

donde $\widehat{a}, \widehat{b}$ son constantes, entonces son contracciones.

$$\begin{tikzcd}
\{*, d_0\} \arrow[r, "in_1"] \arrow[dr, "\widehat{a}"'] & (X, d) \arrow[d, "\phi_n"'] & (*, d_0) \arrow[l, "in_2"'] \arrow[dl, "\widehat{b}"] \\
& (Y_n, d_n) &
\end{tikzcd}$$

Donde ϕ es la contracción. Por la propiedad universal, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $\phi_n : (X, d) \longrightarrow (Y_n, d_n)$ tal que, $\widehat{a} = \phi_n \circ in_1$, $\widehat{b} = \phi_b = \phi_n \circ in_2$.
Sean $x_1, x_[2 \in X$ tal que, tanto $x_1 = in_1(*)$, como $x_2 = in_2(*)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\phi_n(x_1) = \phi_n(in_1(*)) = \widehat{a}(*) = a;$$
$$\phi_n(x_2) = \phi_n(in_2(*)) = \widehat{b}(*) = b$$

luego, $d(x_1, x_2) \geq d_n(\phi(x_1), \phi(x_2)) = d_n(a, b) = n$, esto $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir $d(x_1, x_2)$ es cota superior para $\mathbb{N}$. Contradicción $\longrightarrow\!\longleftarrow$

5.8. Igualadores en Met

Sea (X, d) y (X, d') espacios métricos, sean $f, g : (X, d) \longrightarrow (X, d')$ contracciones, definimos a $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$, consideremos (E, d_E) ser un subespacio métrico de (X, d) [4].

$$\begin{tikzcd}
& (\overline{E}, \overline{d}) \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\text{contracción}", "h"'] & & \\
(E, d_E) \arrow[rr, "i"] & & (X, d) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (X, d')
\end{tikzcd}$$

Sea $i : (E, d_E) \longrightarrow (X, d)$, notar que i es isometria, y por lo tanto, es contracción y tenemos que $f \circ i = g \circ i$. Veamos que $i = eq(f, g)$.

Sea $(\overline{E}, \overline{d})$ un espacio métrico, y $h : (\overline{E}, \overline{d}) \longrightarrow (X, d)$ una contracción, tal que

$$f \circ h = g \circ h$$

sabemos que existe un único $\phi : (\overline{E}, \overline{d}) \longrightarrow (E, d_E)$, tal que $h = i \circ \phi$, lo cual se define $\phi(\overline{e}) = h(\overline{e})$, para cada $\overline{e} \in \overline{E}$.
Veamos que ϕ es contracción. Sean $\overline{e}_1, \overline{e}_2 \in E$.

$$d_E(\phi(\overline{e}_1), \phi(\overline{e}_2)) = d_E(h(\overline{e}_1), h(\overline{e}_2)) \leq \overline{d}(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$$

También funciona en Met y mas categorías.

5.9. Espacios topologicos

Afirmamos que $A \in \tau$ si y solo si, A es vecindad para todo $x \in A$, existe $O_x \in \tau$, $x \in O_x \subset A$, $A \supseteq \cup_{x \in X} O_x$, para $x \in A$ entonces $\exists x$, tal que $x \in O_x$, luego $A \subseteq \cup O_x$ así $A = \cup O_x \in \tau$.

Afirmación. Una función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_0)$, es continua si y solo si, dado $O \in \tau_0$, entonces $f^{-1}(O) \in \tau$.

Demostración. $(\longrightarrow)$ Sea $O \in \tau_0$, consideremos el conjunto $f^{-1}(O)$ y $x \in f^{-1}(O)$, tenemos que $f(x) \in O$, (O) es vecindad de $f(x)$, como f es continua, existe U_x tal que $f(U) \subseteq O$, $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(O)$, esto quiere decir que, $f^{-1}(O)$ es vecindad de X luego $f^{-1}(O) \in \tau$.

$(\longleftarrow)$ Sea $x \in X$, V una vecindad de $f(x)$ arbitraria, tenemos que $f^{-1}(V) \in \tau$ en particular una vecindad de X, y así $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$, luego f es continua.

Ejemplo. Sea X un conjunto.

1 $\tau_d = P(x)$

2 $\tau = \{X, \phi\}$

Si $f : (X, \tau_d) \longrightarrow (Y, \tau_0)$, entonces es continua.

Afirmación. La composición de funciones continuas, es continua.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Objetos: Espacios topologicos} \\
Top \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{Morfismos y funciones continuas} \\
 & \text{Composición usual}
\end{tikzcd}$$

$i_x = [(X, \tau), (X, \tau)]$

Esta definición (3.3.8) nos indica cuando una topología es mas fina que otra.

5.10. Monomorfismos

En topologia, los morfismos son exactamente la funciones continuas uno a uno $(1-1)$.

Demostración. Sea la función $f : X \longrightarrow Y$, continuas y $(1-1)$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

tal que $f(g) = f(h)$.

Sea un $z \in Z$, $f(g(z)) = f(h(z))$, entonces $g(z) = h(z)$, teniendo en cuenta que "f es $(1-1)$", es decir f es monomorfismo.

· Sea la función $f : X \longrightarrow Y$ monomorfismo y f no es uno a uno$(1-1)$. Sean $x_1, x_2 \in X$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$, con $x_1 \neq x_2$.

$$g : (X, \tau_d) \longrightarrow (X, \tau)$$

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ cuando } x \neq x_1 \\ x_2 \text{ cuando } x = x_1 \end{cases}$$

$$(X, \tau_d) \xrightarrow[id_x]{g} (X, \tau) \xrightarrow{f} (Y, \varrho)$$

Si $x \neq x_1$ tenemos $f(g(x)) = f(x) = f \circ id_x$, entonces $f \circ g = f \circ id_x$.
Si $x = x_1$, tenemos $f(g(x_1)) = f(x_2) = f(x_1) = f \circ id_x$, entonces $f \circ g = f \circ id_x$. Así f no seria monomorfismo, pues $id_x \neq g$ luego f es $(1-1)$.

5.11. Epimorfismo

En topologia los epimorfismos, son las funciones continuas y sobre.
Sea la función $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y sobre. Consideremos $g, h : Y \longrightarrow Z$, tal que $g \circ f = h \circ f$. También definimos a $y \in Y$, como f es sobre, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$

$$g(y) = g(f(x)) = h(f(x)) = h(y),$$

por lo tanto $g = h$ y f es epimorfismo.
· Sea la función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \varrho)$ un epimorfismo, entonces es continua. Supongamos que

$$f$$

no es sobre, así existe $y_0 \in Y$ tal que $f(x) \neq y_0$, $\forall x \in X$.
Sea $y_1 \in Y$ con $y_0 \neq y_1$, consideremos la función $g : (Y, \varrho) \longrightarrow (Y, \tau_g)$

$$g(y) = \begin{cases} y \text{ si } y \neq y_0 \\ y_1 \text{ si } y = y_o \end{cases}$$

$g(f(x)) = f(x) = id_x(f(x))$, es decir $g \circ f = id_x \circ f$, luego f es sobre.

Observación. Las construcciones en Set[1], funcionan en topologia dotando a los conjuntos de topologias convenientes.

Definición (3.3.9) por la cual si una función es biyectiva, es un homeomorfismo, si es biyectiva continua, f^{-1} también es continua, podemos afirmar lo siguiente.

Afirmación. En topologia los isomorfismos son los homeomorfismos.
Sea la función $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau)$ un isomorfismo, asi existe un monomorfismo g :

[1]Notación de teoría de conjuntos

$(Y,d) \longrightarrow (X,\tau)$, tal que $g\circ f = id_x$, $f \circ g = id_y$, la función g es continua $g = f^{-1}$. f es biyectiva por ser monomorfismo y epimorfismo, f^{-1} continua, luego es homeomorfismo.
Sea la función $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\varrho)$, un homeomorfismo, así f es continua, f es morfismo en topologia, f es biyectiva y por tanto f^{-1} es continua. $f \circ f^{-1} = id_y$, $f \circ f^{-1} = id_x$, es decir f es isomorfismo.

Observación. Consideremos un conjunto X con dos topologias τ, ϱ, con $\varrho \subseteq \tau$, $id_x : (X,\tau) \longrightarrow (X,\varrho)$ es continua. id_x uno a uno, luego es monomorfismo. id_x sobre, luego es epimorfismo. $(id_x)^{-1}$ no es continua, luego no es homeomorfismo.

5.12. Tipos de objetos en topología

Objetos iniciales $= \phi$ es inicial en topologia, si (Y,τ)

$$\phi = \phi \longrightarrow (Y,\tau)$$

objeto final $\{x\}$ es final en topologia, $\tau = \{\{x\},\phi\}$.
Sea (Y,ϱ), para

$$f_x : (Y,\varrho) \longrightarrow (\{x\},\tau_x)$$
$$y \longrightarrow x$$

objeto cero no hay.

Por la definición (3.3.10) podemos afirmar que no hay objeto cero, ya que dado un espacio topológico X, con $A \subset X$ se puede crear una topología sobre A y generar un subespacio topologíco, de lo cual podemos dar la siguiente afirmación.

Afirmación. La topologia tiene igualadores.

Demostración. Sea $f,g : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau)$

$$(X,\tau) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (Y,\tau)$$

$I = \{x \mid f(x) = g(x)\}$
Consideremos así $(I,\tau_E) \longrightarrow (X,\tau)$, sea $A \in \tau$, $j^{-1}(A) = I \cap A \in \tau_I$, así j^{-1} es continua y morfismo en topologia.

$$(I,\tau) \longrightarrow (X,\tau) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (Y,\varrho)$$

Sea $a \in I$, $f \circ j(a) = f(a) = g(a) = g \circ i(a)$, luego $f \circ i = g \circ i$. Sea $h : (W,\tau) \longrightarrow (X,\tau)$, tal que $f \circ h = g \circ h$ continua.

$$\begin{tikzcd}
(I,\tau_I) \arrow[r, "j"] & (X,\tau) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (Y,\varrho) \\
(W,\tau) \arrow[u, "\phi"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Consideremos $\phi : (W, \tau) \longrightarrow (I, \tau_I)$.

$$\phi(w) = h(w)$$

$$j \circ \phi = h$$

;$h^{-1} = (\phi)^{-1} \circ (j)^{-1}$Sea $U \in \tau_I$, $O = I \cap U = j^{-1}(a)$, con $U \in \tau$

$$(\phi)^{-1}(O) = (\phi)^{-1}(I \cap U)$$

$$(\phi)^{-1}(O) = (\phi)^{-1}(j^{-1}(u))$$
$$(\phi)^{-1}(O) = (\phi)^{-1} \circ j^{-1}(a)$$
$$(\phi)^{-1}(O) = h^{-1}(a) \in \tau$$

Luego ϕ es continua. Unicidad = si $(\phi)'$ es tal que $j \circ (\phi)' = h = j \circ \phi$, entonces $\phi = (\phi)'$ por lo tanto, la topologia tiene igualadores.

Capítulo 6

Conclusiones

Se obtuvo una comprensión de los espacios métricos a partir de categorías, aunque al principio el manejo de la temática fue un tanto difícil, ya que las definiciones durante el documento fue un tanto tedioso y complicado por la interpretación de cada una de estas. A partir de las interpretaciones obtenidas, con esta teoría se puede obtener resultados nuevos en los espacios métricos.

Ademas se logro obtener el documento base, que servirá como apoyo en curso de introducción a la teoría de categorías.

Bibliografía

[1] Apostol T. M. (1996). *Mathematical Analysis.* Massachusetts, U.S.A.: Addison-Wesley Publishing Company.

[2] Lezama O. (2014). *Cuaderno de álgebra No. 7. Categorías.* Universidad Nacional de Colombia.

[3] Macho M. (2009/2010). *Topología de Espacios Métricos* Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, España.

[4] Montañes R. *Teoría de Categorías* Bogotá, Colombia.

[5] Rudin W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis 3ed Edition.* Madison,U.S.A. Mac Graw Hill.

[6] Spivak D. I. (2013). *Category Theory for Scientists* U.S.A.