

	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA: 1 de 8

26.

FECHA	jueves, 30 de noviembre de 2017
--------------	---------------------------------

Señores
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
 BIBLIOTECA
 Ciudad

UNIDAD REGIONAL	Sede Fusagasugá
------------------------	-----------------

TIPO DE DOCUMENTO	Trabajo De Grado
--------------------------	------------------

FACULTAD	Educación
-----------------	-----------

NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO	Pregrado
---	----------

PROGRAMA ACADÉMICO	Licenciatura en Matemáticas
---------------------------	------------------------------------

El Autor(Es):

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS	No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN
Prada Leal	Johans Camilo	1069744060

	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA: 2 de 8

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS
Forero Díaz	Néstor Orlando

TÍTULO DEL DOCUMENTO
Análisis de algún método numérico para solución numérica de ecuaciones Diferenciales ordinarias.

SUBTÍTULO (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciatura en matematicas

AÑO DE EDICION DEL DOCUMENTO	NÚMERO DE PÁGINAS
30/11/2017	37

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
ESPAÑOL	INGLÉS
1.Diferencias divididas	Split differences
2.Ecuaciones diferenciales ordinarias	Ordinary differential equations
3.Metodo Euler	Euler Method
4.Metodo de series de Taylor en varias variables	Method of Taylor series in several variables
5.	
6.	

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000
www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co
NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad
Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAR113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA: 3 de 8

RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS

(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

Se establece un método por diferencias divididas, con el fin, de hallar soluciones aproximadas de un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial. Para aproximar ecuaciones diferenciales numéricas ordinarias no lineales se aplican métodos como Euler o Runge kutta, series de Taylor y serie de Taylor en varias variables, entre otros. Aquí se establece un método con el fin, de hallar soluciones aproximadas de un problema de valor inicial a partir del método de Euler, series de Taylor de varias variables, y diferencias divididas; esto se estudia por la simplicidad de la formulación, puesto que se obtiene por derivación numérica y la estimación del error es fácil de hacer.

En este trabajo primero se deducen dos métodos para una variable y se cómo se puede hallar el error; después se deduce en varias variables \mathbb{R}^3 y se muestran los diagramas de fase de los sistemas.

Luego los métodos A y B se implementaron en Octave, y se pueden ejecutar en Matlab, se aplicaron a diferentes sistemas dinámicos primero a uno lineal, una espiral, no lineal, en este caso los osciladores de Rossler y Lorenz. Las gráficas muestran cada oscilador aproximado por método A y B respectivamente. Estos sistemas son autónomos, si se quiere llevar a un sistema no autónomo la deducción del método se hace en \mathbb{R}^4 .

Los métodos son:

Método A

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \left(4f(x_{n+1}, y_{n+1}) - \left(f(x_n, y_{n+1}) + f(x_{n+1}, y_n) \right) \right) \frac{h_x}{2}$$

Método B

$$y_{n+2} = y_{n+1} + f(x_{n+1}, y_{n+1})h_x + \left(\frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_{n+1})}{h_x} + \frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_n)}{h_y} \right) f(x_{n+1}, y_{n+1}) \frac{h_x^2}{2}$$

A method is established for divided differences, in order to find approximate solutions to a problem of ordinary differential equations with initial value.

To approximate ordinary non-linear numerical differential equations, methods such as Euler or Runge kutta, Taylor series and Taylor series are applied in several variables, among others. Here a method is established, 'in order to find approximate solutions to a problem of initial value from the Euler method', Taylor series of several variables, and divided differences; this is studied by the simplicity of the formulation, since it is obtained by numerical derivation and the estimation of the error is easy to do.

In this paper we first deduce two methods for a variable and know how the error can be found; after deduces in several variables \mathbb{R}^3 and the phase diagrams of the systems are shown.

Then the methods A and B were implemented in Octave, and they can be executed in Matlab, they were applied to different dynamic systems first to a linear one, a spiral, non-linear, in this case the oscillators of Rossler and Lorenz. The graphs show each oscillator approximated by method A and B respectively. These systems are autonomous, if you want to carry a non-autonomous system the deduction of the method is done in \mathbb{R}^4 .



The methods are:
 Method A

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \left(4f(x_{n+1}, y_{n+1}) - \left(f(x_n, y_{n+1}) + f(x_{n+1}, y_n) \right) \right) \frac{h_x}{2}$$

Method B

$$y_{n+2} = y_{n+1} + f(x_{n+1}, y_{n+1})h_x + \left(\frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_{n+1})}{h_x} + \frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_n)}{h_y} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right) \frac{h_x^2}{2}$$

AUTORIZACION DE PUBLICACIÓN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una "X":

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.	x	



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA: 5 de 8

2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	x	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	x	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	x	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA: 6 de 8

artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “*Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

Información Confidencial:

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI** ___ **NO** x.

En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

LICENCIA DE PUBLICACIÓN

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente).

b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.

c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.

d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no

	MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
	PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
	DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
		PAGINA: 7 de 8

contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.

f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el “Manual del Repositorio Institucional AAAM003”

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia Creative Commons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.



j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia Creative Commons Atribución- No comercial- Sin derivar.



Nota:

Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).



MACROPROCESO DE APOYO	CÓDIGO: AAAr113
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO	VERSIÓN: 3
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	VIGENCIA: 2017-11-16
	PAGINA: 8 de 8

Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1.camilo prada.pdf	
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafo)
Prada Leal Johans Camilo	

12.1.50



Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1.camilo prada.pdf	
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafo)
Prada Leal Johans Camilo	

12.1.50

**ANÁLISIS DE ALGÚN MÉTODO NUMÉRICO PARA SOLUCIÓN
NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.**

**JOHANS CAMILO PRADA LEAL
CODIGO: 171211214**

**UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
2017**

**ANÁLISIS DE ALGÚN MÉTODO NUMÉRICO PARA SOLUCIÓN
NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.**

**JOHANS CAMILO PRADA LEAL
CODIGO: 171211214**

**Asesor:
NESTOR ORLANDO FORERO DÍAZ
Magister en Matemáticas**

**UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
2017**

*Tu guíaste mi destino,
tu te convertiste en fuente de mi vida
mi amiga, mi consuelo eres tu.
Tu eres una de las razón de vivir,
eso eres tu en mi vida, gracias por enseñarme y guiarme.
Dedicado a
mi madre.*

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a Dios primeramente por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por darme sabiduría, experiencias, felicidad y sobre todo amor.

A mi asesor de tesis Néstor Forero Díaz, Magister en matemáticas, por la orientación y ayuda que me brindo para guiar esta tesis, porque me brindo su amistad permitiéndome aprender, mucho más de lo estudiado en el presente proyecto.

Agradezco a mi esposa por confiar en mis decisiones; por ser parte importante en mi vida, apoyo incondicional en este camino; a mi madre por los valores que me han inculcado y las lecciones de vida, por haberme enseñado que con esfuerzo, trabajo y constancia todo se consigue y que en esta vida nadie regala nada; y a mis compañeros quienes de uno u otro modo me impulsaron en este proyecto con su carisma y acompañamiento.

A la universidad de Cundinamarca; por permitir enriquecer mi conocimientos y principios impercederos de calidad educativa.

Y no sin menos importancia a todos los docentes quienes aportaron con sus conocimientos en mi proceso de formación.

Índice general

Objetivos	7
1. Preliminares	1
1.1. Series de Taylor	1
1.2. Series de Taylor de varias variables	2
1.3. Metodo de Euler	2
2. Estimacion de los errores	3
2.1. Teorema de Existencia de Unicidad	3
2.2. Estimativa para el error de Euler	3
2.3. Demostración para obtener el método final	6
3. Método en varias variables	10
3.1. Proceso para obtener el método en varias variables	10
3.2. Explicación final del método en varias variables	12
4. Aplicaciones	19
4.1. Sistemas dinamicos	19
4.2. Metodos utilizados	20
4.3. Ejemplo numerico	21
5. Conclusiones	29
5.1. Conclusiones	29
Bibliografía	30

INTRODUCCIÓN

En análisis numérico se aplican métodos como, Euler, Runge kutta, series de Taylor y serie de Taylor de varias variables, entre otros, ofreciendo un aporte significativo en las matemáticas. En términos generales nos centraremos en el estudio de varios métodos numéricos, para aproximar un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Por otro lado se establece un método nuevo, con el fin, de hallar soluciones aproximadas de un problema de valor inicial apartir del método de Euler, series de Taylor y series de Taylor de varias variables, por esa razón se estudia por su simplicidad en la derivación de la fórmula y de la determinación del error. Además se hace una comparación entre los métodos de Euler y series de Taylor de varias variables, teniendo en cuenta que no todos los métodos son sencillos de desarrollar.

El trabajo consta de cinco capítulos; en el primero se dan las nociones básicas, conceptos necesarios para desarrollar el método; en el segundo se procede a plantear las condiciones iniciales que se dan en el método, y de este modo demostrar la aproximación del método que garantice un error más pequeño; en el tercer capítulo se plantea un sistemas de ecuaciones en dos variables, con el fin de analizar la convergencia de dicho proceso; en el cuarto capítulo se plantea varios sistemas dinámicos lineales y no lineales, los cuales se van estudiar para analizar su convergencia y poder comparar, el cual se va modelar en un software libre llamado Octave y para finalizar se concluye lo analizado, a partir del modelo.

Objetivos

Objetivo General

Hallar una estimativa para un error de un método numérico para ecuaciones diferenciales ordinarias, sugerido

Objetvos Especificos

- Analizar los métodos de Euler y runge kutta.
- Desarrollar varios métodos numéricos a partir de la serie de Taylor.
- Aplicar los métodos encontrados a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales y no lineales autonomas.

Capítulo 1

Preliminares

El presente capítulo tiene por finalidad, introducir los conceptos que serán necesarios para desarrollar el método de Euler, series de Taylor y series de Taylor de varias variables.

1.1. Series de Taylor

El teorema final en esta revisión del cálculo se describe los polinomios de Taylor. Estos polinomios se utilizan ampliamente en análisis numérico. [2]

Supongamos que $f \in C^n[a, b]$, existe que $f^{(n+1)}$ en $[a, b]$, y $x_0 \in [a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, Existe un número $\epsilon(x)$ entre x_0 y x con

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (1.1)$$

Donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \quad (1.2)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (1.3)$$

Luego el residuo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)} \quad (1.4)$$

1.2. Series de Taylor de varias variables

Supongamos que $f(x, y)$ y todas sus derivadas parciales de orden inferior o igual a $n + 1$ son continua en $D = [(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$, y dejar $(x_0, y_0) \in D$. Por cada $(x, y) \in D$, existe ϵ entre x y x_0 y entre y y y_0 con:

$$f(x, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y), \tag{1.5}$$

Donde,

$$P_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \left[(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] + \dots + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x - x_0)^{n-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \right]$$

Luego con el margen de error,

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n + 1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n + 1}{j} (x - x_0)^{n+1-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}(\xi, \mu) \tag{1.6}$$

La función $P_n(x, y)$ se llama el polinomio de Taylor enésimo en dos variables para la función f sobre (x_0, y_0) , y $R_n(x, y)$ es el término que resta asociado con $P_n(x, y)$. [3]

1.3. Metodo de Euler

Es la aproximación elemental para resolver problemas de valor inicial de. A pesar de que rara vez se utiliza en la práctica, la simplicidad de su derivación puede ser utilizada para ilustrar las técnicas involucradas en la construcción de algunos de las más avanzadas técnicas.

El objetivo del método de Euler es obtener aproximaciones al valor inicial bien planteado:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \tag{1.7}$$

Interpretando la E.D.O $y' = f(x, y)$ Como un campo de direcciones en el plano $x - y$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$ como un punto (x_0, y_0) de dicho plano, podemos aproximar la función solución $y(x)$ por medio de la recta tangente a la misma que pasa por ese punto:

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + R_n(x), \tag{1.8}$$

Para seguir estudiando un poco más en la aplicacion del metodo, lo encontramos acontinuación [3].

Capítulo 2

Estimacion de los errores

En este trabajo se va a revisar como converge este método:

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + \left(\frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - h, y_0)(x_0, y_0)}{h_x} + \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 - h)f(x_0, y_0)}{h_y} \right) \frac{(x - x_0)^2}{2}$$

Que se desarrolla con series de Taylor y series de Taylor de varias variables.

Las convergencia de este método esta garantizado por el teorema de existencia de unicidad de ecuaciones diferenciales.[4]

Aquí se mostraran las condiciones que se plantean, para poder demostrar paso a paso el método, que nos garantiza la convergencia bajo determinadas condiciones.

2.1. Teorema de Existencia de Unicidad

Sean las funciones y y $(\partial f)/(\partial y)$ continuas en algun rectangulo $\alpha < x < \beta$, $\varphi < y < \delta$ que contiene el punto (x_o, y_o) entonces en algun intervalo $x_o - h < x < x_o + h$ contenido en $\alpha < x < \beta$, existe una solución unica $y = \phi(x)$ del problema con valor inicial; $y = f(x,y); y(x_o) = y_o$; el cual se toma del libro Boyce Diprima.[4]

2.2. Estimativa para el error de Euler

Vamos a calcular el error para Euler, series de Taylor en varias variables, con el cual se va estimar los errores de cada metodo. Dada la ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

se va calcular el error del método Euler, teniendo en cuenta la condición dada en la ecuación diferencial.

DESARROLLO DEL METODO

luego de haber propuesto la ecuación inicial, se coje el método y se le agrega los errores a cada variable, donde $h_x = x_1 - x_0$ y $h_y = y_1 - y_0$. Luego se halla el método de forma finita utilizando el método de Euler y series de Taylor.

Un punto $P = (x_0, y_0)$ de dicho plano ($P \in (x, y)$). Se aproxima la función solución $y(x)$ por medio de la serie de Taylor en P :

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + R_2(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + R_2(x - x_0), \quad (2.1)$$

donde $R_n(h) = o(h^n)$, para mejorar la aproximación se toman más términos de la serie, para este caso hasta el segundo término, (recordar que $y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x)$)

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + \left(f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0) \right) \frac{(x - x_0)^2}{2} + R_3(x - x_0) \quad (2.2)$$

en este caso

$$R_3(x - x_0) = \left(f_{xx} + 2f_{xy}f' + f_{yy}f'^2 + f_x f_y + f_y^2 f' \right) (\epsilon_x, \epsilon_y) \frac{(x - x_0)^3}{3!} = M_2(\epsilon_x, \epsilon_y) \frac{(x - x_0)^3}{3!} \quad (2.3)$$

donde $(\epsilon_x, \epsilon_y) \in (x_0, x) \times (y_0, y)$, donde este es el error de la serie de Taylor en varias variables y se aplica la ecuación diferencial inicial para dejarlo solo en términos de $f(x, y)$, si esta función tiene segunda derivada continua R_3 queda acotado y por tanto se puede calcular el error del método.

Para las derivadas parciales se aproximan por diferencias divididas hacia atrás.

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - h_x, y_0)}{h_x} + R_{x,2}(h_x) \quad (2.4)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 - h_y)}{h_y} + R_{y,2}(h_y) \quad (2.5)$$

De modo que los errores para cada diferencia son:

$$R_{x,2}(h_x) = f_{xx}(\epsilon_x, y_0) \frac{h_x}{2} = M_{x,2} \frac{h_x}{2}$$

$$R_{y,2}(h_y) = f_{yy}(x_0, \epsilon_y) \frac{h_y}{2} = M_{y,2} \frac{h_y}{2}$$

donde otra vez se obtiene $(\epsilon_x, \epsilon_y) \in (x_0 - h_x, x_0) \times (y_0 - h_y, y_0)$, los cuales se hallan gracias al teorema de Taylor, luego se reemplazan (2.4) y (2.5) en (2.2)

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + \left(\frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - h_x, y_0)}{h_x} + \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 - h_y)}{h_y} f(x_0, y_0) \right) \frac{(x - x_0)^2}{2} + R_t(x - x_0) \quad (2.6)$$

$$\text{entonces, } R_t(x - x_0) = \left(R_{x,2}(h_x) + f R_{y,2}(h_y) \right) \frac{(x - x_0)^2}{2} + R_3(x - x_0) =$$

$$\left(f_{xx}(\epsilon_x, y_0) \frac{h_x}{2} + f f_{yy}(x_0, \epsilon_y) \frac{h_y}{2} \right) \frac{(x - x_0)^2}{2} + M_2 \frac{(x - x_0)^3}{3!} \quad (2.7)$$

donde M_2 es el dado en (2.3), al hacer esta primera aproximación se encuentra que R_t se puede calcular, de la ecuación (2.6), la cual genera dos metodos; el primero es tomando de;

$$h_y = y_{n+1} - y_n = y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + R(h_x) = f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + R(h_x) \quad (2.8)$$

y

$$h_x = x_{n+1} - x_n \quad (2.9)$$

donde

$$R(h_x) = (f_x + f_y f)(\epsilon_x, \epsilon_y) \frac{h_x^2}{2} \quad (2.10)$$

tomando a $x = x_2 = x_1 + h_x = x_0 + 2h_x$ y con la notación $y(x_n) = y_n$, reemplazando (2.8) (2.9) y cambiando x_0 por x_1 en la serie (2.6)

$$y(x_2) = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \left(f(x_1, y_1) - f(x_1 - h_x, y_1) + f(x_1, y_1) - f(x_1, y_1 - h_y) \right) \frac{(x_2 - x_1)}{2} + R_{t2}(x_2 - x_1)$$

$$y(x_2) = y_1 + f(x_1, y_1)h_x + \left(f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1) + f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) \right) \frac{h_x}{2} + R_{t2}(h_x)$$

luego simplificando

$$y(x_2) = y_1 + 2f(x_1, y_1)h_x - \left(f(x_0, y_1) + f(x_1, y_0) \right) \frac{h_x}{2} + R_{t2}(h_x)$$

se tiene que el (método A) queda de la forma;

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \left(4f(x_{n+1}, y_{n+1}) - \left(f(x_n, y_{n+1}) + f(x_{n+1}, y_n) \right) \right) \frac{h_x}{2}. \quad (2.11)$$

y el error es

$$R_{t2} = \frac{h_x R(h_x) \Delta_y f}{2(h_x f + R(h_x))} + R_t(h_x)$$

donde $\Delta_y f = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)$, R_t es el que esta dado en (2.7) y R es el dado en (2.10). Se evidencia que el método tiene un error grande, este depende de $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, h_x^3$ tiene 4 partes y se acumula mas con cada interacción, luego el metodo es facil de implementar pero el error no se deja manejar facilmente ademas que es grande, tambien se observa que si $|2(fh_x + R)| < |h_x R \Delta_y f|$ el método explota. La otra opcion es dejar el método por diferencias (2.6) (metodo B)

$$y_{n+2} = y_{n+1} + f(x_{n+1}, y_{n+1})h_x + \left(\frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_{n+1})}{h_x} + \frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_n)}{h_y} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right) \frac{h_x^2}{2} \quad (2.12)$$

el error de este método es el que esta dado en R_t (2.7), la implementación es mas dificil que la del (metodo A) y su error es menor (comparando método A y B) aunque se sigue acumulando en cada iteracion.

Las convergencias de estos métodos hacia la solución de la e.d. estan garantizadas por el teorema de existencia de unicidad de ecuaciones diferenciales. Para que el método numerico converja la particion tiene que ser pequeña, porque cada sustitución que se hace se acumula un error; y_1 se obtiene aplicando método de Euler. La estabilidad para el "método B."en este caso depende de que la función y todas las derivadas hasta segundo orden esten acotadas, para el "método A" puede explotar si se toma mal h_x (por la restricción $|fh_x + R| < |h_x R \Delta_y f|$).

2.3. Demostración para obtener el método final

Acontinuación mostraremos como obtenemos la parte final del metodo, apartir de series de Taylor.

En primera instancia vamos hallar la derivada para X y Y mas un error, el cual llamaremos R_1 , luego para hallar los errores se saca las segunda derivada respectivamente para R_1, R_2 y R_3 , despues de hacer esto se suman todos los errores y nos da R el error del método, la cual se muestra acontinuación.

$$y' = f(x_1, y_1) + f_x(x_1, y_1)h_x + f_y(x_1, y_1)h_y + R_1 \quad (2.13)$$

luego se aplica Series de Taylor y se obtiene,

$$y' = f(x_1, y_1) + \left[\frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)}{h_x} \right] h_x + \left[\frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)}{h_y} \right] h_y + R_2 h_x + R_3 h_y \quad (2.14)$$

Los errores que se obtiene son los siguientes:

$$R_1 = [f_{xx}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x^2 + 2f_{xy}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x h_y + f_{yy}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_y^2] \frac{1}{2} \quad (2.15)$$

$$R_2 = \frac{f_{xx}(\epsilon, y_1)}{2} h_x^2 \quad (2.16)$$

$$R_3 = \frac{f_{yy}(x_1, \epsilon)}{2} h_y^2 \quad (2.17)$$

donde;

$R = R_1 + R_2 + R_3$, los cuales se suman todos y se obtiene el error del metodo;

$$R = [f_{xx}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x^2 + 2f_{xy}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x h_y + f_{yy}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_y^2] \frac{1}{2} + \frac{f_{xx}(\epsilon, y_1)}{2} h_x^2 + \frac{f_{yy}(x_1, \epsilon)}{2} h_y^2 \quad (2.18)$$

ahora de realiza las operaciones respectivas y se reemplaza en el método obtenido,

$$y' = f(x_1, y_1) + [f(x_1, y_1) - f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)] + [f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)] + R \quad (2.19)$$

luego de hacer todos los calculos se saca las tres partes del método, y el error de Euler.

ERROR DE EULER

Primero vamos a encontrar el error de Euler, para asi mismo ver que tanto converge dicho método, teniendo en cuenta que $\frac{y_1 - y_0}{h} + R = f(x_0, y_0)$, con su correspondiente error;

$$R_3 = f_x(\epsilon_1, y_0)h_x + f_y(x_0, \epsilon_2)h_y \quad (2.20)$$

donde,

$$h_x = x_1 - x_0, h_y = y_1 - y_0 \tag{2.21}$$

luego de hacer las cuentas respectivas se obtiene el error de Euler para el método propuesto

$$\frac{y_2 - y_1}{h_x} + R_3 = 3f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1) + R \tag{2.22}$$

$$y_2 = [3f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1)] h_x + [R - R_3] h_x + y_1 \tag{2.23}$$

la cual $R_4 = [R - R_3] h_x$ y se reemplaza en el método y por ultimo se obtiene el método;

$$y_{n+2} = y_{n+1} + [3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_n) - f(x_n, y_{n+1})] h + R_4 \tag{2.24}$$

y ahora se realizara un ejemplo aplicando el método.

Ejemplo

$y' = x + y$, se toma como condición inicial

$y(0) = 1$

$y(2) = ?$ y la partición es: $h = 2$

	x_n	y_n	
x_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	y_1
x_2	$\frac{4}{5}$	$\frac{91}{5}$	y_2
x_3	$\frac{6}{5}$	$\frac{39999}{5}$	y_3
x_4	$\frac{8}{5}$	$\frac{3168522027}{625}$	y_4
x_5	2	$\frac{1012896389452\dots}{15126562500\dots}$	y_5

El primer termino lo hallamos con el método de Euler, teniendo en cuenta la siguiente aclaración que h tiene un intervalo de 0 a 2

$h = [0, 2]$

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, método de Euler

$y_1 = 1 + \frac{2}{5}(0 + 1) = \frac{7}{5}$, Euler aplicando las respectivas operaciones.

luego aplicamos el método propuesto:

$y_2 = [3f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1)] h + y_1$

$$\begin{aligned}
 y_3 &= [3f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2)] h + y_2 \\
 y_4 &= [3f(x_3, y_3) - f(x_3, y_2) - f(x_2, y_3)] h + y_3 \\
 y_5 &= [3f(x_4, y_4) - f(x_4, y_3) - f(x_3, y_4)] h + y_4
 \end{aligned}$$

ahora se reemplaza en cada de ellos, para cada partición:

$$y_2 = \left[3\left(\frac{2}{5} + \frac{7}{5}\right) - \left(\frac{2}{5} + 1\right) - \left(0 + \frac{7}{5}\right) \right] \frac{2}{5} + 1$$

$$y_2 = \frac{91}{5}$$

$$y_3 = \left[3\left(\frac{4}{5} + \frac{91}{5}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{91}{5}\right) \right] \frac{2}{5} + \frac{91}{5}$$

$$y_3 = \frac{39999}{625}$$

$$y_4 = \left[3\left(\frac{6}{5} + \frac{39999}{625}\right) - \left(\frac{6}{5} + \frac{91}{5}\right) - \left(\frac{4}{5} + \frac{39999}{625}\right) \right] \frac{2}{5} + \frac{39999}{625}$$

$$y_4 = \frac{3168522027}{388750}$$

$$y_5 = \left[3\left(\frac{8}{5} + \frac{3168522027}{388750}\right) - \left(\frac{8}{5} + \frac{39999}{625}\right) - \left(\frac{6}{5} + \frac{3168522027}{388750}\right) \right] \frac{2}{5} + \frac{3168522027}{388750}$$

$$y_5 = \frac{1012896389452\dots}{15126562500\dots}$$

En conclusión se tiene que todos los métodos se parecen, pero el segundo se aproxima mas, aun así teniendo un gran error.

Capítulo 3

Método en varias variables

En este capítulo se aplicaran los resultados analizados anteriormente a un modelo en varias variables, que se diseñó en Octave, un programa considerado el equivalente libre de MATLAB. Entre varias características que comparten, se puede destacar que ambos ofrecen un intérprete, permitiendo ejecutar órdenes en modo interactivo. Sino que está orientado al análisis numérico, este se analiza como un proceso y se evalúa su convergencia dadas las condiciones para que tenga un buen funcionamiento; se acota un sistema que se planteó en el trabajo anterior, dando un resultado específico.

3.1. Proceso para obtener el método en varias variables

Se tomara la siguiente ecuación diferencial de varias variables de la forma $x' = f(x)$, con x una función paramétrica se tiene, encuentra que f se va desarrollar con series de Taylor en varias variables y se obtiene que;

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)h + R \quad (3.1)$$

$$= x_n + f(x_n)h + Df(x_n)h^2 + R; \quad (3.2)$$

se aplica series de Taylor;

$$= x_n + f(x_n)h + \begin{bmatrix} \partial x_1 f_1 & \partial x_1 f_1 & \partial x_1 f_1 \\ \partial x_2 f_2 & \partial x_2 f_2 & \partial x_2 f_2 \\ \partial x_3 f_3 & \partial x_3 f_3 & \partial x_3 f_3 \end{bmatrix} h^2 + R \quad (3.3)$$

luego, la solución de una ecuación diferencial en varias variables, es una función de la forma $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, es decir, una curva parametrizada.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), y(t), z(t)) \\ f_2(x(t), y(t), z(t)) \\ f_3(x(t), y(t), z(t)) \end{bmatrix}$$

junto con la condición inicial de

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

reescribiendo lo anterior utilizando la notación $X_n = (x_n, y_n, z_n)^t$ y $F = (f_1, f_2, f_3)^t$ con $h_t = t_{n+1} - t_n$ la e.d. toma la forma

$$\begin{aligned} X'(t) &= F(X(t)) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Operando de forma similar como se obtuvo método A se aplica (2.11) en

$$X_{n+2} = X_{n+1} + \frac{h}{2}(5F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n)) \tag{3.5}$$

Este método aunque es facil de implementar y corregir, es mucho mas inestable en las particiones que se deben tomar y tiene mucho error en su convergencia. El segundo método se obtiene por diferencias de forma similar al método B aplicando

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= X_{n+1} + h_t F(X_{n+1}) + \\ &+ \frac{h_t^2}{2} \left(\left(\frac{F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1})}{x_{n+1} - x_n} \right) f_1(X_{n+1}) + \right. \\ &+ \left(\frac{F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1})}{y_{n+1} - y_n} \right) f_2(X_{n+1}) + \\ &+ \left. \left(\frac{F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n)}{z_{n+1} - z_n} \right) f_3(X_{n+1}) \right) \end{aligned}$$

el error de este método es similar al error de una variable

$$R_{t,3}(x - x_0) = \left(f_1 F_{xx}(h_x) + f_2 F_{yy}(h_y) + f_3 F_{zz}(h_z) \right) \frac{h_t^2}{2} + R_3(x - x_0)$$

Este método es mas estable y mantiene mas la forma, tiene un poco menos error que el método-A, mostrado anteriormente y es un poco mas difícil de programar, aunque cada vez que se incrementa la dimensión se aumenta el error.

Error para el "Método-A"

$$\frac{h_x R_1(h_x) \Delta_x F}{2(h_x f_1 + R_1(h_x))} + \frac{h_y R_2(h_y) \Delta_y F}{2(h_y f_2 + R_2(h_y))} + \frac{h_z R_3(h_z) \Delta_z F}{2(h_z f_3 + R_3(h_z))} + R_{t,3}(x - x_0)$$

con

$$R_i(h_{x_i}) = \partial_t f_i(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z) \frac{h_{x_i}^2}{2}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, es el error en cada variable, otra vez este método es inestable si $|2(f_i h_{x_i} + R_i)| < |h_{x_i} R \Delta_{x_i} f_i|$ para cada i , $R_{t,3}$ es el error de Taylor; cada vez que se aumente la dimensión, se aumenta el error.

$$R_{t,3} = ((D^2 F \cdot F)F + DF(DF \cdot F))(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z) \frac{h_t^3}{3!}$$

3.2. Explicación final del método en varias variables

Se debe tener en cuenta que una ecuación diferencial de varias variables de la forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, es decir, una curva parametrizada y $f_1 : R \times R \rightarrow R$ y $f_2 : R \times R \rightarrow R$ con derivada continua, con el cual se arma la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), y(t)) \\ f_2(x(t), y(t)) \\ f_3(x(t), y(t)) \end{bmatrix}$$

junto con la condición inicial de

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

este problema se va a aproximar por diferencias divididas simplificando la notación, se va a tomar;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix} = F(x, y, z) \quad (\text{ed-1})$$

En la cual se toma la ecuación diferencial (ed-1), y se obtiene;

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix}$$

para simplificar y usando notación vectorial $X = (x, y, z)^t$, teniendo en cuenta las condiciones dadas;

$$\begin{aligned} X' &= F(x) \\ X_0 &= X(t_0) \end{aligned}$$

para hacer la aproximación se va hacer la serie de taylor en varias variables de $f(x, y, z)$ alrededor de $(x_0, y_0, z_0)^t$ es decir la función se puede escribir de la forma;

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x_0, y_0, z_0) + \\ &(\partial_x F(x_0, y_0, z_0)x' + \partial_y F(x_0, y_0, z_0)y' + \partial_z F(x_0, y_0, z_0)z') + R(h^2) \quad (d) \end{aligned} \quad (3.6)$$

la aproximación de la solución de la ecuación diferencial por serie de taylor es;

$$X(t) = X_0 + X'(t_0)(t - t_0) + X''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + R(h^2) \quad (3.7)$$

reemplazando en la ecuación diferencial

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))(t - t_0) + D_x F(X(t_0))X'(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + R(h^2) \quad (3.8)$$

ahora lo que se obtiene anteriormente lo llamaremos (serie) y aplicamos serie de taylor, se obtiene la ecuación;

$$D_x F(X(t_0))X'(t_0)(t - t_0) = D_x F(X(t_0))(X - X_0) + R = F(X(t_1)) - F(X(t_0)) + R(h) \quad (3.9)$$

se deriva y se reemplaza en la (serie) con $X(t_1) = X_1$ y $X(t_2) = X_2$

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))(t - t_0) + (F(X_1)) - F(X_0))\frac{(t - t_0)}{2} + R(h^2) \quad (3.10)$$

reemplazando en cada una de las condiciones, $t = t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$, se tiene que;

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (F(X_1)) - F(X_0))h + R(h^2) \quad (3.11)$$

con la ecuación anterior se obtiene el (metodo 1) y la formula se puede aproximar de varias formas, por ejemplo;

$$\begin{aligned} D_x F(X(t_0))X'(t_0)(t_1 - t_0) &= D_x F(X(t_0))(X - X_0) + R(h) \\ &= \partial_x F(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + R(h) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ahora aplicando diferencias divididas para poder obtener la serie;

$$\partial_x F(x_0, y_0) = \frac{F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1)}{x_1 - x_0} + R_1(h^2) \quad (3.13)$$

, y para

$$\partial_y F(x_0, y_0) = \frac{F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0)}{y_1 - y_0} + R_2(h^2) \quad (3.14)$$

la ecuación queda de la forma;

$$\begin{aligned} D_x F(X(t_0))X'(t_0)(t_1 - t_0) &= \frac{F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + \frac{F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0)}{y_1 - y_0}(y_1 - y_0) + R(h) \\ &= 2F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0) - F(x_0, y_1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

reemplazando en la (serie) queda de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} X(t) &= X_0 + F(X_0)(t - t_0) + (2F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0) \\ &\quad - F(x_0, y_1))\frac{(t - t_0)}{2} + R(h^2) \end{aligned} \quad (3.16)$$

teniendo en cuenta que $t = t_2$ y sin olvidar las condiciones iniciales.

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (2F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0) - F(x_0, y_1))h + R(h^2) \quad (3.17)$$

así que el (método 2) nos permite obtener el método en 3 dimensiones, el cual funciona de la siguiente manera;

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (3F(x_1, y_1, z_1) - F(x_0, y_1, z_1) - F(x_1, y_0, z_1) - F(x_1, y_1, z_0))h + R(h^2) \quad (3.18)$$

y si la función depende claramente del parametro que se toma que en este caso es t , y así obtenemos el siguiente método que lo denominaremos, (método 3).

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (4F(x_1, y_1, z_1, t_1) - F(x_0, y_1, z_1, t_1) - F(x_1, y_0, z_1, t_1) - F(x_1, y_1, z_0, t_1) - F(x_1, y_1, z_1, t_0))h + R(h^2) \quad (3.19)$$

la iteración n -ésima quedaria para el caso de (método 3), que se obtuvo anteriormente.

$$X_{n+2} = X_n + (F(X_n) + F(X_{n+1}))h \quad (3.20)$$

y para el caso del (método 2) se tiene en cuenta lo siguiente;

$$X_{n+2} = X_n + F(X_n)2h + (2F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n) - F(x_n, y_{n+1}))h \quad (3.21)$$

Ejemplo: Para la siguiente Ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -0,1x + 150y \\ -150y - 0,1x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X_1 se aproxima por Euler y se busca tener $X = (0,1)$ con 200 iteraciones por el (método 1) obteniéndose la grafica, de otra forma su aproximación, seria aplicando la siguiente ecuación;

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))(t - t_0) + D_x F(X(t_0))X'(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + R(h^2)$$

se reemplaza $X'(t_0)$

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))(t - t_0) + D_x F(X_0)F(X_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + R(h^2) \quad (\text{serie2})$$

y se aproximan las derivadas con las diferencias divididas

$$X(t) = X_0 + F(X_0)(t - t_0) + \left[\left[\frac{F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1)}{x_1 - x_0} \right] f_1(x_0, y_0) + \left[\frac{F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0)}{y_1 - y_0} \right] f_2(x_0, y_0) \right] \frac{(t-t_0)^2}{2}$$

y se hace $t = t_2$

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + \left[\left[\frac{F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1)}{x_1 - x_0} \right] f_1(x_0, y_0) + \left[\frac{F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0)}{y_1 - y_0} \right] f_2(x_0, y_0) \right] 2h^2$$

el método en general queda de la siguiente forma;

$$X_{n+2} = X_n + F(X_n)2h + \left[\left[\frac{F(x_{n+1}, y_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1})}{x_{n+1} - x_n} \right] f_1(x_n, y_n) + \left[\frac{F(x_{n+1}, y_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n)}{y_{n+1} - y_n} \right] f_2(x_n, y_n) \right]$$

y todo el método se multiplica por $2h^2$, para así poder obtener un método más exacto. Luego, X_1 se aproxima por el método Euler y se busca tener $X = (0, 1)$ con 200 iteraciones por el (método 1) obteniéndose la gráfica, que se muestra a continuación;

Ahora utilizando el (método 2), con 200 iteraciones, se puede obtener la siguiente gráfica que se muestra a continuación.

Luego se hace una comparación con los métodos trabajados, el cual mostraremos a continuación;

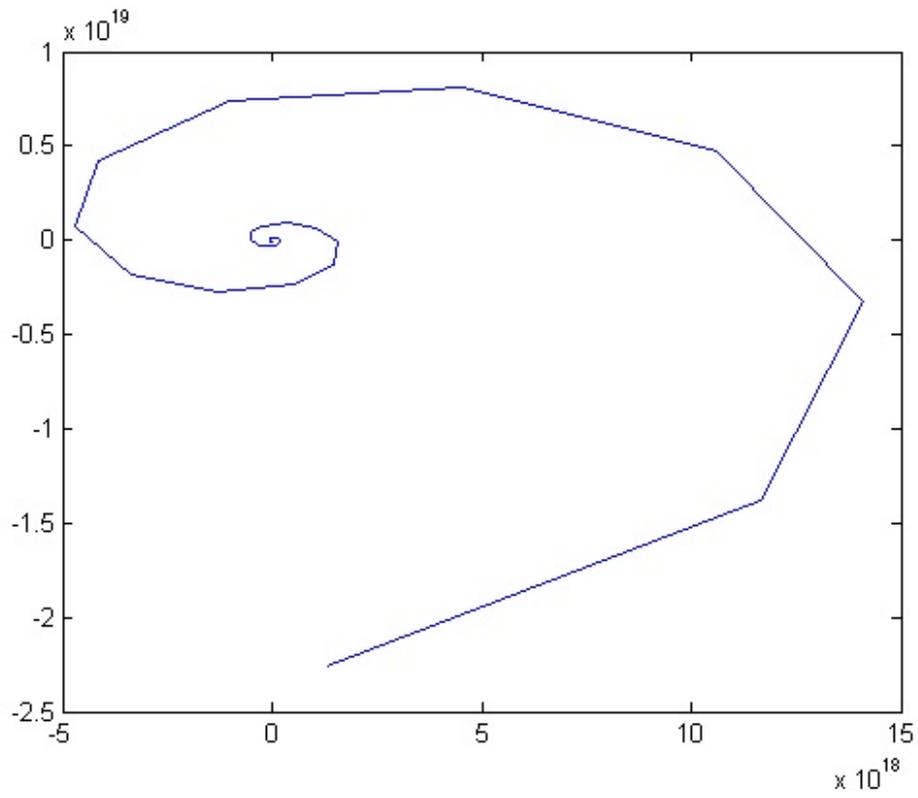


Figura 3.1: Caption for OLZ3WY02-1

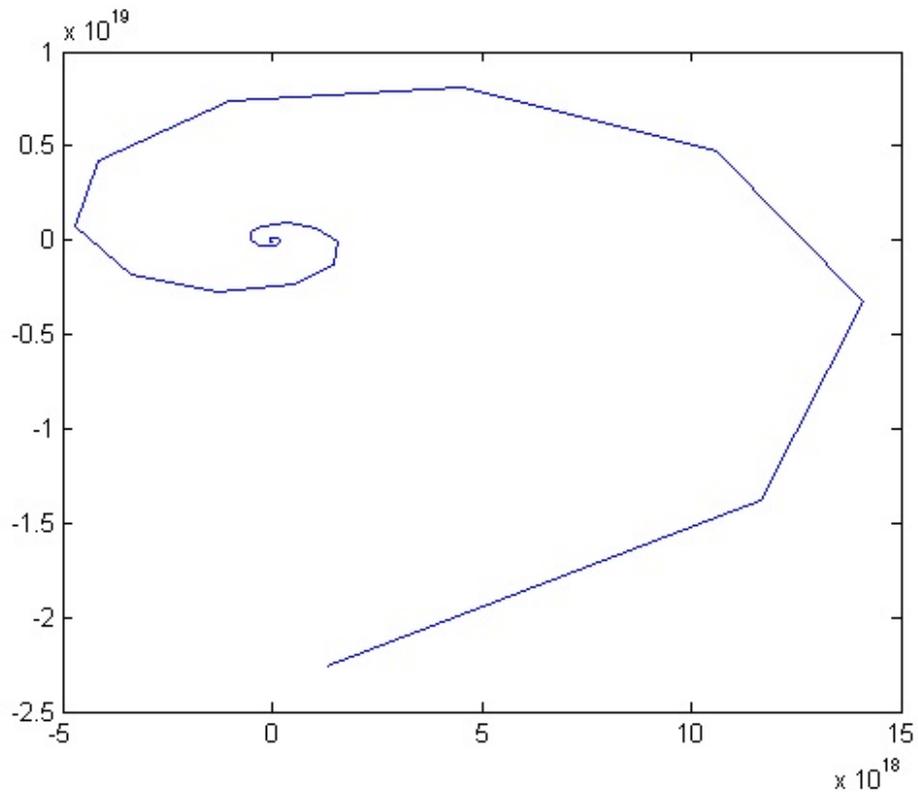


Figura 3.2: Caption for OLZ3WY03-1

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo se aplicaran los resultados analizados anteriormente con ejemplos de sistemas dinámicos lineales y no lineales, que se diseñaron en Octave, es un programa libre para realizar cálculos numéricos. Este software permite ejecutar órdenes en modo interactivo, el cual nos permite ver la convergencia de cada simulación, utilizando el método sugerido en este trabajo.

4.1. Sistemas dinámicos

Para evaluar la teoría asociada al método de Euler y series de Taylor de varias variables, desarrollado en el presente trabajo se planteo varios sistemas dinámicos, que se plantea para evaluar el desempeño de cada error, mediante ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, a partir de un proceso de modelación, en el software Octave.

Octave, como su nombre lo indica es un equivalente libre de MATLAB. Desarrollé aquí los sistemas dinámicos el cual me permite realizar a cada sistema su propio código y poderlo ver en 3D.

La Espiral, muestra un sistema lineal, el cual se muestra cada una de sus gráficas la cual denominamos (espiral-1) y (espiral-2). Se puede expresarse también como una ecuación polar simple.

$$\begin{aligned}x' &= -y - z; \\y' &= x + ay; \\z' &= -b + z(x - c); \end{aligned}$$

Lorenz, es un sistema determinista, el cual mostraremos sus respectivas gráficas, las denominamos (Lorenz-1) y (Lorenz-2). Lo que significa que si se conocen los valores iniciales exactos de sus variables, en teoría, se puede determinar sus valores futuros a medida que cambian con el tiempo. Se empieza por la elección de este modelo algunos valores para x , y , z , y luego hacerlo de nuevo con

diferentes valores, entonces se llega rápidamente a los resultados.

$$\begin{aligned} a &= 10; , b = 28, c = 8/3; \\ x' &= a(-x + y); \\ y' &= x(b - z) - y; \\ z' &= xy - cz; \end{aligned}$$

Rossler, es un sistema dinamico simples de 3 dimensiones continuas, el cual mostraremos sus graficas respectivas, las denominamos (Rossler-1) y (Rossler-2). Las ecuaciones se derivaron originalmente para describir la cinética química lejos del equilibrio, x , y , z representan las cordenadas. El término no lineal mínimo es el último término de la tercera ecuación del sistema mostrado acontinuación.

$$\begin{aligned} a &= 0,2; , b = 0,2; , c = 5,7; \\ x' &= -y - z; \\ y' &= x + ay; \\ z' &= b + z(x - c); \end{aligned}$$

4.2. Metodos utilizados

La siguiente notación, son las condiciones iniciales para desarrollar cada método;

$$X_n = (x_n, y_n, z_n) \tag{4.1}$$

El primer método que aplicamos es:

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= X_{n+1} + h(4F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}) \\ &\quad - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Este método aunque es facil de implementar y corregir, pero es mucho mas inestable en las particiones que se deben tomar y tiene mucho error en sus convergencia.

El segundo método que se aplica es el que mostraremos acontinuación:

$$\begin{aligned} X_{n+2} &= X_{n+1} + h(F(X_{n+1}) + (((F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}))) / (x_{n+1} - x_n)) F1(X_{n+1}) \\ &\quad + ((F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1})) / (y_{n+1} - y_n)) F2(X_{n+1}) + ((F(X_{n+1}) \end{aligned}$$

$$- F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n) / (y_{n+1} - y_n) F^3(X_{n+1}) h \tag{4.3}$$

Este método es más estable y mantiene más su forma, pero tiene más error que el primer método mostrado anteriormente y es un poco más difícil de programar.

4.3. Ejemplo numérico

Los métodos A y B se implementaron en Octave, y se pueden ejecutar en Matlab, se aplicaron a diferentes sistemas dinámicos primero a uno lineal, una espiral, no lineal, en este caso los osciladores de Rössler y Lorenz. Las gráficas muestran cada oscilador aproximado por los métodos A y B respectivamente, estos sistemas son autónomos, si se quiere llevar a un sistema no autónomo, la deducción del método se hace en R^4

Se aproxima el oscilador de Lorenz

$$\begin{aligned} x' &= -y - z; \\ y' &= x + ay; \\ z' &= b + z(x - c); \end{aligned}$$

con los parámetros $a = 0,2$; $b = 0,2$; $c = 5,7$; y datos iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ este sistema es caótico y, por ser no lineal, muy sensible al error del método numérico; se hicieron 200 iteraciones para aproximar los valores (x, y, z) en $t = 10$ (con $n = 200$) primero por Euler y por los métodos A y B, en las siguientes tablas se presentan las últimas 5 iteraciones.

Método de Euler

n	x_n	y_n	z_n
196	1,3813	1,3427	0,0490
197	1,3117	1,4252	0,0484
198	1,2380	1,5050	0,0478
199	1,1603	1,5820	0,0471
200	1,0789	1,6558	0,0464

Método A

n	x_n	y_n	z_n
196	1,4647	-3,3381	0,0411
197	1,6295	-3,2983	0,0424
198	1,7923	-3,2498	0,0437
199	1,9526	-3,1927	0,0452
200	2,1100	-3,1270	0,0467

Método B

n	x_n	y_n	z_n
196	1,3331	-2,5881	0,0412
197	1,4596	-2,5440	0,0422
198	1,5836	-2,4930	0,0433
199	1,7049	-2,4354	0,0444
200	1,8231	-2,3712	0,0456

A continuación se mostraran las graficas obtenidas:

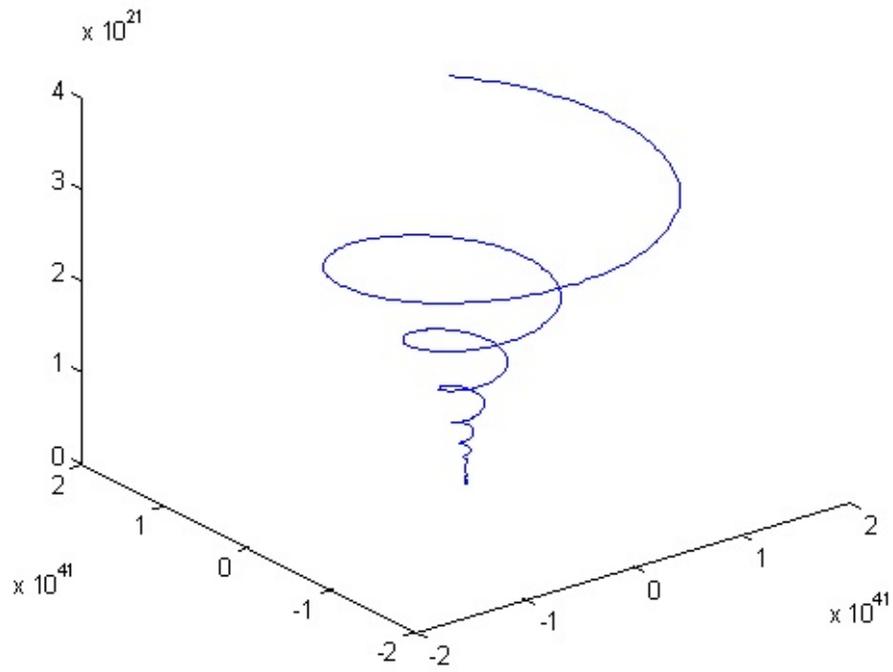


Figura 4.1: Espiral-1

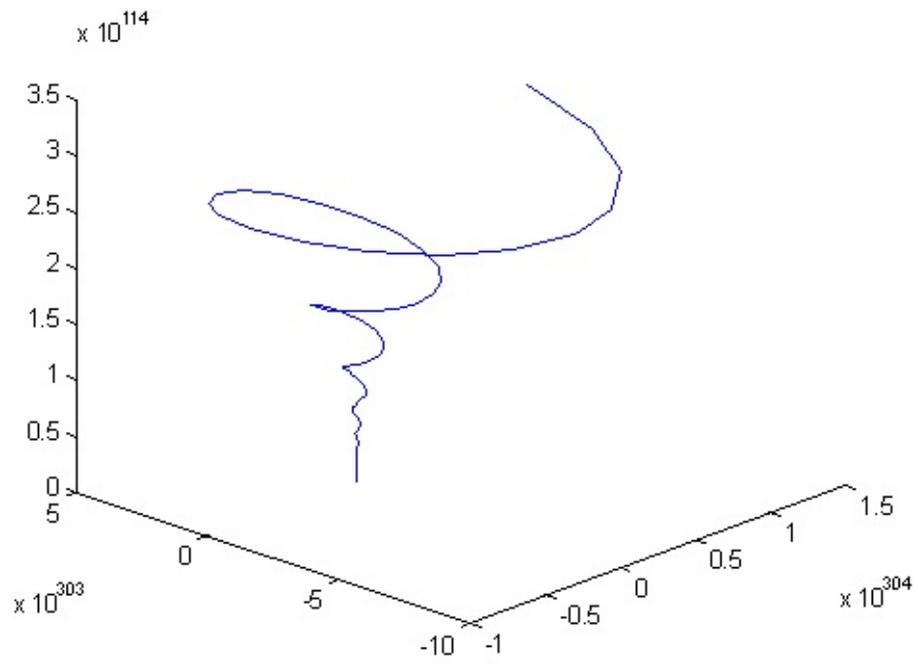


Figura 4.2: Espiral-2

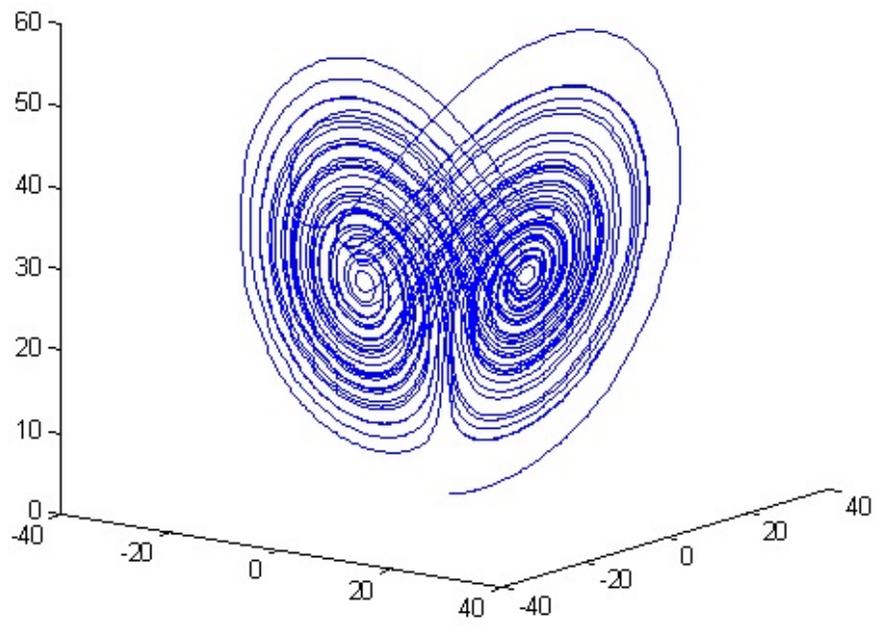


Figura 4.3: Lorenz-1

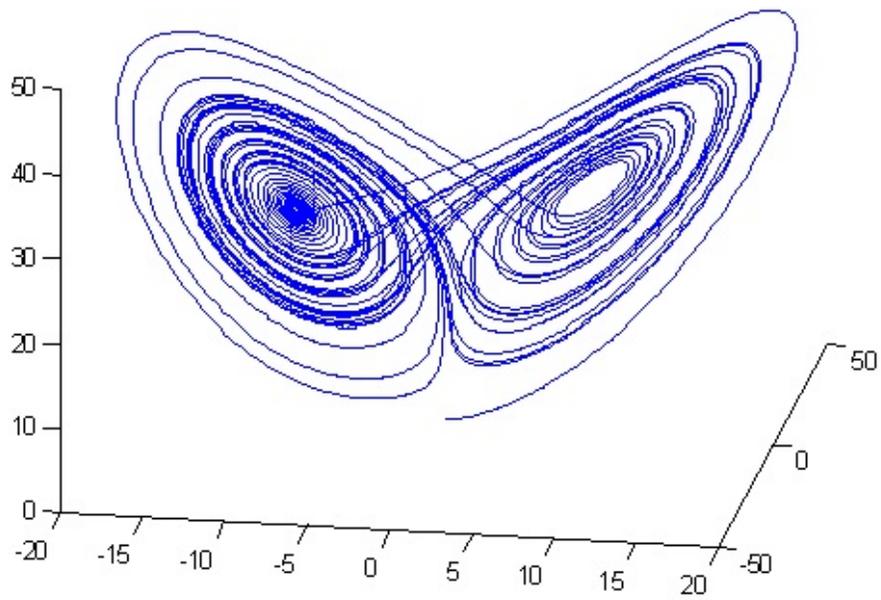


Figura 4.4: Lorenz-2

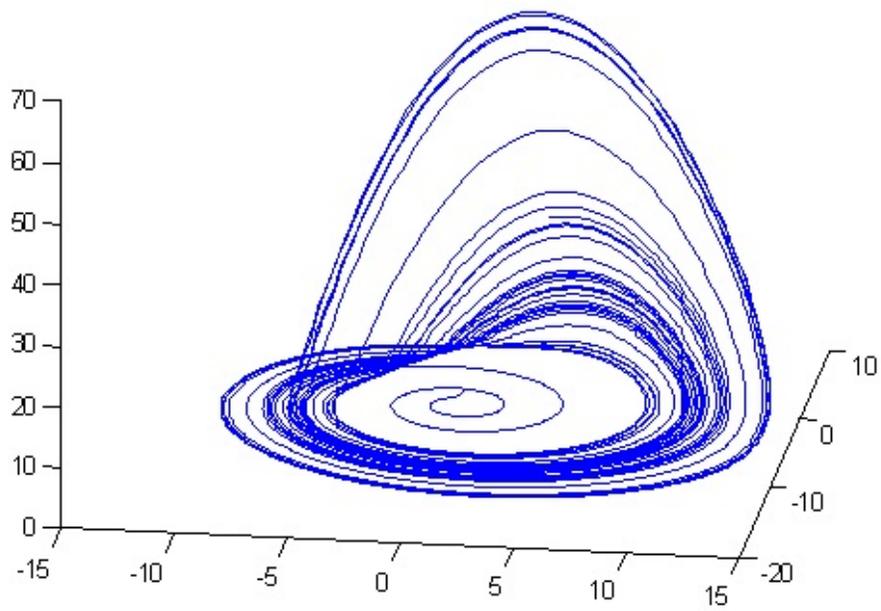


Figura 4.5: Roosler-1

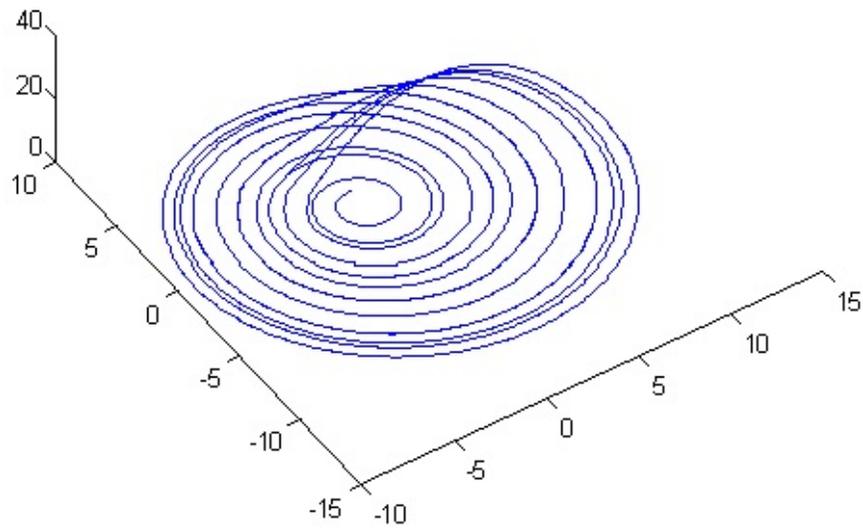


Figura 4.6: Roosler-2

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo, se recopiló métodos para poder así aplicar los diferentes sistemas dinámicos lineales y no lineales y de este modo aplicar el método propuesto en este trabajo.

5.1. Conclusiones

- El primer método aunque tiene menos operaciones, ahí el error es más grande, por lo tanto el problema es en la partición que se debe tomar n muy grande.
- Con los dos métodos se obtienen resultados parecidos, aunque en el primero acumula un error más grande que en el segundo.
- Si el sistema es caótico y el método está mal estructurado no va a converger.

Bibliografía

- [1] 21 R. G. Bartle D. R.(1990). Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una Variable* . Ed. Limusa..
- [2] Richard I. burden., J.Douglas.Faires-N.A.(2011). *Numerical Analysis*. Ed. 9.pag 10, pag 283.
- [3] Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* Ed. 6. International Thomson Editores.
- [4] Boyce Diprima *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* Ed. 4.pag 54. Teorema 2.4.1