CARTILLA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS SECCIONES CÓNICAS.

CRISTIAN ALEXANDER DAZA GUERRERO

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

2023

CARTILLA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS SECCIONES CÓNICAS.

CRISTIAN ALEXANDER DAZA GUERRERO

Director: Juan David Firigua Bejarano

Magister en Educación

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

2023

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES.

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas es un verdadero reto hoy en día y más aún cuando se unen varios pensamientos como es el caso de la geometría analítica, que involucra el pensamiento geométrico y el pensamiento numérico-algebraico, al momento de la comprensión puede plantear desafíos para los estudiantes. Para abordar esta problemática, se logró la creación de una cartilla interactiva basada en el uso de recursos digitales, como GeoGebra, para enseñar las secciones cónicas; el objetivo de esta cartilla es mejorar la actitud de los estudiantes hacia la geometría analítica al proporcionar un contenido interactivo, mediante la enseñanza para la comprensión. La metodología utilizada consistió en un análisis digital de libros y artículos relacionados con la enseñanza de la geometría analítica, lo que llevó a la consolidación de una propuesta que integra elementos de GeoGebra para su aplicación en colegios de Colombia, donde se busca brindar apoyo a los estudiantes en la comprensión de las secciones cónicas, utilizando recursos interactivos y el uso de GeoGebra como recurso digital. Se espera que los estudiantes mejoren su actitud hacia la geometría analítica y que el docente pueda adaptar esta cartilla a diferentes contextos educativos.

Palabras claves: Actitud, Actitud hacia la matemática, Geometría analítica, enseñanza para la comprensión.

ABSTRACT

The teaching of mathematics is a real challenge today and even more so when several thoughts come together, such as analytical geometry, which involves geometric thinking and numerical-algebraic thinking, at the time of understanding it can pose challenges for the students. To address this problem, the creation of an interactive primer based on the use of digital resources, such as GeoGebra, was achieved to teach conic sections; The aim of this primer is to improve students' attitudes towards analytic geometry by providing interactive content, through teaching for understanding. The methodology used consisted of a digital analysis of books and articles related to the teaching of analytical geometry, which led to the consolidation of a proposal that integrates elements of GeoGebra for its application in schools in Colombia, where it seeks to provide support to students. students in the understanding of conic sections, using interactive resources and the use of GeoGebra as a digital resource. It is expected that students improve their attitude towards analytical geometry and that the teacher can adapt this primer to different educational contexts.

Keywords: Attitude, Attitude towards mathematics, Analytical Geometry, teaching for understanding.

1. INTRODUCCIÓN.

Al momento de enseñar matemáticas una de las grandes preocupaciones es la comprensión de la geometría analítica puesto que al tener una interacción entre pensamiento geométrico y el pensamiento numérico-algebraico se deben desarrollar múltiples competencias en los estudiantes, sin embargo, este aprendizaje a veces no se lleva de la mejor manera debido a que no hay rutas metodológicas claras para poder enseñar estas temáticas es por ello es que se propone la creación de una cartilla basada en la enseñanza para la compresión y la integración de recursos digitales como lo es GeoGebra para el aprendizaje de las secciones cónicas.

Por medio de la creación de la cartilla también se quiere lograr que los estudiantes mejoren su actitud hacia la enseñanza de la geometría analítica, por ello se buscó que el contenido sea interactivo por medio de la utilización de GeoGebra, de colores y del procedimiento para que el estudiante cuando la esté desarrollando pueda interactuar con estos elementos y poder analizar el contenido que se le está mostrando.

La metodología que se utilizo fue un análisis digital donde se revisaron múltiples libros y artículos referente a la enseñanza de la geometría analítica y frente a esto se logró consolidar una propuesta integrando elementos de GeoGebra para ser aplicada en los diferentes colegios de Colombia.

2. OBJETIVOS.

2.1. Objetivo General.

- Diseñar una cartilla para la enseñanza de la Geometría Analítica para estudiantes de grado decimo por medio de la enseña para la compresión.

2.2. Objetivos específicos.

- Realizar una revisión documental sobre la actitud al momento de enseñar matemáticas.
- Describir el panorama actual sobre las actitudes frente a la matemática mediante una investigación de trabajos de grados.
- Consolidar una cartilla de enseñanza-aprendizaje basado en los referentes teóricos.

3. ANTECEDENTES

En el año 2022 Tatiana González realizo una investigación para el mejoramiento de las actitudes de la geometría analítica específicamente de la circunferencia, donde desarrollo una secuencia didáctica, basada en un pretest en la escala tipo leiker por medio entrevistas, encuestas y observaciones para recolectar la información, la investigación se realizó en el colegio gimnasio maría auxiliadora con una muestra de 17 estudiantes del grado decimo entre los 14 y 17 años.

"en la anterior investigación se obtuvo como resultado que los estudiantes se tomaran la confianza para decir que les decepcionaba al momento de aprender la geometría analítica (circunferencia), que contaran todo lo que han vivido a través de los años. Se notó un cambio de manera positiva en el transcurso que se iba desarrollando cada sesión de la secuencia didáctica, también se avanzó en el trabajo autónomo y de equipo, donde pocas veces se necesitó la intervención del docente". González (2022)

Los autores Granados y Padilla en el año 2021 realizaron una investigación donde se buscó el desarrollo de la modelación de la recta tangente con 35 estudiantes del grado decimo utilizando el software GeoGebra, donde se indago las debilidades a fortalecer por medio de pretest, esta modelación se realizó utilizando las siguientes etapas:

Se observó un gran avance entre pretest y el postest; donde solo el 5% de los estudiantes aprobaron el examen, debido a que los estudiantes manifestaban que ya habían visto la temática pero que no les había quedado del todo claro, después de aplicar la enseñanza por medio del software GeoGebra y aplicar un postest hubo un incremento al 89% de alumnos que aprobaron el examen, se concluyó que no solo es necesario que los docentes tengan conocimiento en su respectiva área, sino que también sean capaces de ser creativos al momento de compartir dicho conocimiento, ya sea por medio de herramientas tecnológicas o mediante de didácticas.

Rojas realizo una investigación donde se quería indagar en la implementación de un currículo donde los profesores tengan clara la información que van a enseñar y la logren sistematizar, se implementó en la localidad de Usme en Bogotá en el Colegio Estanislao Zuleta en el grado decimo, se realizó una investigación mixta donde se hizo un análisis estadístico en el cual se evidencio la poca motivación de los estudiantes al querer aprender esta temática, también se dio un enfoque cualitativo donde se escuchó las opiniones de los estudiantes de cómo les gustaría que se les impartiera las clase.

La metodología de la investigación se concentró en que el estudiante fuese autónomo al momento de adquirir el aprendizaje de las secciones cónicas, consto de 8 actividades de aprendizaje donde se pudo trabajar en grupos y se buscó desarrollar la memoria auxiliar, para profundizar lo aprendiendo se les asigno un total de 9 talleres para así lograr la construcción del tema y el aprendizaje de este.

Como conclusión se avanzó del 50% al 68% de las personas que respondieron correctamente el examen, aunque no hubo un avance significativo si se logró que los estudiantes mediante la metodología de secuencia didáctica se interesaran por desarrollar el total de las actividades y los talleres, también la mayoría comenzaron a manifestar un agrado por las matemáticas.

Lepineux-Arias, C. A. (2021). Realizaron una investigación de los procesos del pensamiento matemático y geométrico de las secciones cónicas por medio de aplicaciones móviles en estudiantes de grado decimo de la institución educativa Alfonso López del municipio de la dorada en un grupo confirmado por 25 estudiantes con una media de edad de 16 años, para la realización de la metodología se hicieron 4 fases, la primera fase fue de diagnóstico, la segunda de diseño de las unidades didácticas, que consto de 6 pasos desde la identificación de elementos hasta la resolución del proceso algebraico para lograr la formula general, la tercera fase fue la implementación de la secuencia didáctica y para finalizar se realizó una cuarta fase donde se evaluó el proceso de los estudiantes.

Se concluyó que los estudiantes se motivan más hacia el aprendizaje de las matemáticas implementado herramientas tecnológicas, donde el aprendizaje se vuelve más autónomo por partes de los estudiantes ya que ellos mismo se dan cuenta que la forma de aprender no solo se limita a un aula de clase si no que hay variedad de aplicaciones o herramientas en las que se pueden apoyar para lograr comprender una temática especifica con respecto a la matemática.

4. MARCO CONCEPTUAL

4.1. Actitud.

La actitud hace referencia a las experiencias que ha vivido una persona ante una situación, esas experiencias vividas son las que hacen actuar de diferente manera al individuo. Una actitud no lleva al comportamiento de la persona, pero el comportamiento si se relaciona con la actitud, es decir, una persona que tenga una actitud positiva ante una situación su conducta tiende a hacer más agradable y si su actitud es negativa todo lo contrario. Gómez, Repetto y Matinello (2012)

Tomado a Eagly, Chaiken (1998) La actitud es la disposición que tenga la persona antes de una situación esa puede ser positiva o negativa, así que, la actitud es una evaluación que el individuo que la persona ya ha realizado antes para esa situación, si el resultado es positivo así va a tender su actitud, pero si la evaluación es negativa su actitud también lo será, esto quiere decir, que la actitud va ligada a una evaluación que la persona ha realizado antes de una situación.

De forma similar para cárdenas 2008 la actitud es una predisposición que la persona realiza, esta predisposición influye de manera favorable o desfavorable, se compone de tres partes el cognitivo, es lo que el individuo conoce de dicha situación ya sea por la experiencia o porque las referencias que ha escuchado; el afectivo, este componente se basa en los sentimientos que tiene el sujeto puede ser de aprobación o de resistencia que tiene ante un evento.

Para fortalecer la idea sabater, (1989) dice que debemos de tener en cuenta 3 postulados los cuales son:

1) La actitud es la predisposición que tiene una persona que la obtienen por medio de la enseñanza, lo cual esto genera un comportamiento definido ante la situación que va a enfrentar.
2) Como la persona vaya dispuesta ante una situación esa forma de percibir la situación lo genera la mente, lo que quiere decir que nuestra mente envía toda la información para uno comportarse ante un evento.
3) La forma de nuestra mente percibir las cosas vienen ligadas a tres factores:

- Factor conductual, es la forma en que la persona se comporta ante diversas situaciones.
- Factor afectivo, es la motivación que el sujeto tiene ante ese event
- Factor Cognitivo, son las diferentes estructuras o algoritmos que uno ya tiene predispuestos para llevar a cabo cierta actividad.

Como axiomas de lo dicho anteriormente:

- Las actitudes pueden ser evaluadas de alguna manera en muchos de los casos son detectadas mediante la observación.
- Se puede intervenir para realizar las modificaciones de una persona casi que directamente, para que tenga una actitud más estable y así logre tener mejor disposición ante una situación.

4.2. Actitud hacia la matemática.

En las matemáticas el termino actitud tiene una definición con cierta carga emocional, es decir, que influye en la conducta del ser humano, de como este se relaciona con las personas y los objetos a su alrededor. La actitud se basa en tres aspectos básicos: la cognición, el afecto y una intención de conducta. Con lo anterior estos componentes enmarcan en la actitud de una persona hacia alguien o algo, de la actitud de una persona depende lo que está pensando, lo que siente y el cómo se comporta. (Flores, Escribano,2017)

Frente a las matemáticas se debe distinguir entre actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas. La actitud hacia las matemáticas va ligado a unos factores de valoración, aprecio, satisfacción, curiosidad e interés hacia la asignatura, así como también una importancia por parte del estudiante en su proceso de aprendizaje hacia esta disciplina, es decir, se habla más de un componente afectivo que cognitivo, debido al interés que despierta en el estudiante el aprender matemáticas dejando a un lado u omitiendo los desarrollos cognitivos en el proceso, el alumno aprende por gusto no por obligación u imposición por parte del maestro. (Flores, Escribano, 2017)

Por otro lado, la actitud hacia las matemáticas tiene que ver con la manera en que se utilizan las capacidades generales del estudiante, tales como la flexibilidad de pensamiento, apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad entre otras capacidades esenciales en el trabajo de la matemática, es decir, las actitudes hacia la matemática se centra más en un componente cognitivo hacía alusión a las habilidades que tienen los estudiantes para desenvolverse en situaciones problema planteadas en la asignatura. (Flores, Escribano,2017)

El termino de actitudes hacia la educación ha tenido varios significados a lo largo de los años, el siglo XX las definiciones de actitud conllevaban a un componente comportamental, es decir, el comportamiento de una persona obedecía a una fuerza motivacional en este caso la actitud, la actitud del sujeto iba a desencadenar en el comportamiento de este hacia su entorno y quienes lo rodean.

Inés González (2000) define la actitud en su libro “Matemática emocional” (pag. 203) como una tendencia evaluativa de conducta que enmarca en las intenciones personales del individuo e influye en su comportamiento. Este concepto no es alejado de lo dicho anteriormente puesto que el ser humano se comporta de acuerdo con cómo se siente en el ambiente que lo rodea, es decir, está en constate evaluación de sus entorno, influyendo en su conducta que se verá reflejado en su actitud.

La aparición de las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas obedece a sus experiencias con estas durante su proceso escolar, ya sean éxitos o fracasos estas actitudes serán negativas o positivas de acuerdo con sus vivencias, por ejemplo, algunos estudiantes pueden ver la asignatura como una fuente de inspiración, otro simplemente como una fuente de frustración, generando rechazo y repudio hacia esta disciplina. Con lo anterior se deja en evidencia que la actitud hacia las matemáticas donde de un factor emocional ligado a las experiencias individuales de los estudiantes en su entorno escolar. (Cardoso, Cerecedo, 2012)

Con lo anterior se debe tener en cuenta las experiencias de los individuos, en este caso estudiantes en su entorno escolar, puesto que aquí podríamos decir que de acuerdo con el tipo de institución y los docentes, se debe gran parte a la construcción de la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, es decir, que un estudiante desarrolle actitudes negativas o positivas hacia la asignatura también depende del tipo de institución, sea pública o privada, así como del manejo del docente para con las matemáticas en el aula. (Cardoso, Cerecedo, 2012)

Albarracín, Johnson y Zanna (2014) definen la actitud como una tendencia que se da ante una evaluación de algún evento o situación que se presente con un nivel de agrado o desagrado, es decir, el actuar de una persona ante las situaciones que se le presentan están fuertemente conectada a la actitud, que puede ser positiva o negativa de acuerdo con una evaluación previa del entorno. Estos conceptos no son tan alejados de los ya expuesto anteriormente puesto que como lo expresan los demás autores la actitud obedece principalmente a un factor comportamental del individuo. (Cardoso, Cerecedo, 2012)

Las actitudes se consideran predisposiciones que responden de manera positiva o negativa tanto a objetos, situaciones, conceptos o personas. En las actitudes se distingue entre cuatro componentes que forman el ser afectivo de la persona, estos son, las emociones, las actitudes, las creencias y los valores. Con lo anterior, es claro que la actitud de un individuo responde netamente a un componente afectivo, es decir, se toma cierta actitud frente a un suceso de acuerdo con cómo se siente la persona en ese entorno. (Estrada, Palomar, 2011)

Por otro lado, la construcción de actitud también se constituye desde el hogar, teniendo en cuenta que la actitud responde a un componente afectivo, la familia juega un papel importante en la construcción de este concepto, si en la familia se tiene un mal concepto de las matemáticas, como difíciles o enredadas lo más lógico es que este incida en el estudiante y este ya llegué con una actitud negativa hacia la asignatura, por lo que el concepto de actitud hacia las matemáticas se solidifica desde el hogar siendo los padres ejes estructurantes en el proceso de aprendizaje de los hijos. (Estrada, Palomar, 2011)

Una definición muy importante de actitud afirma que estas son adquiridas, es decir, no se nace con una predisposición negativa o positiva frente a una situación o contexto en particular, con las experiencias que el sujeto va viviendo su actitud va a variar, si un profesor de matemáticas enseña mal o no hace entenderse, se generara una mala actitud frente al núcleo temático, pero no solo la culpa caería en el docente, también se tiene en cuenta que la actitud se desarrolla de acuerdo al contexto, y en un contexto escolar el profesor es parte fundamental de este, sin embargo, lo estudiantes, materiales, la aula de clase entre otros elementos inciden en la actitud que tendrá el estudiante hacia la asignatura. (Muñoz, Mato, 2006)

Con lo anterior se deja en evidencia que la actitud hacia las matemáticas es un concepto que el estudiante desarrolla día a día involucrándose con las variables que hay a su alrededor, lo que quiere decir que estas actitudes varían y son inevitables, un día un estudiante puede tener una actitud negativa hacía las matemáticas, pero otro día al interactuar con el entorno y las personas a su alrededor tendrá una actitud favorable hacia las matemáticas, es decir, siempre se tomara una postura frente a los objetos o situaciones a los que la persona o estudiante este expuesto. (Muñoz, Mato, 2006)

4.2.1. Componente cognitivo.

Es la capacidad que tiene el ser humano para enfrentarse a diferentes escenarios, se basa en la forma de aprender y disponer procesos aprendidos anteriormente, esas configuraciones se pueden ir modificando a través que el individuo vaya aprendiendo. Cabas, D. M., de Durán, J. A., Reyes, L. M., & Leal, M. (2010).

Es toda la información adquirida anteriormente para saber enfrentarse a una situación, desarrollarla y concluirla, estos factores en algunos casos se pueden presentar por instinto en otros casos toca pensar más para llegar a la solución de dicho evento, se basa en la inteligencia que tiene la persona. Pérez & Vázquez. (2020)

Este componente hace énfasis en los pensamientos, conocimientos que tiene un individuo al momento de enfrentarse a una situación, su percepción esto va desde lo más sencillo, a lo más complejo. Es la capacidad de la persona para resolver un problema ya sea matemático o de la vida diaria por medio de conocimientos ya adquiridos anteriormente. Ávila, Cubillos, (2021) y Basan, Sotero, (1998)

4.2.2. Componente afectivo

Se presenta como un componente emocional, es la confianza que una persona se tiene para enfrentar una situación, como percibe el escenario, es lo que siente y el afecto que el individuo logra experimentar al desarrollar una actividad, esto tiene respuesta en el sistema nervioso mediante la expresión corporal. Caba, de Durán, Reyes, & Leal. (2010).

Este se basa en la evaluación emocional que hace la persona ante diferentes actividades a desarrollar influye mucho en los sentimientos que el individuo experimenta por las diferentes actividades que se pueden llegar a desarrollar referente a un tema de interés, estas valoraciones pueden ser de miedo, agrado, felicidad, entre otros. Pérez & Vázquez. (2020)

Este componente hace énfasis en todos los sentimientos (felicidad, miedo, angustia, etcétera), que la persona ha adquirido en su experiencia al momento de enfrentarse a problemas matemáticas, ya sea porque les parecen difíciles o porque simplemente no les gusta, el componente afectivo evalúa todo aquello que el estudiante siente por las matemáticas; estas evaluaciones pueden ser positivas o negativas. Basan, Sotero, (1998)

El componente afectivo está en continuo desarrollo, por una parte, está toda la experiencia que el estudiante ha tenido anteriormente y que le afecta al momento de aprender matemáticas, pero también todas esas creencias que el sujeto tiene es una consecuencia a su comportamiento al momento de asimilar contendidos; para ello influyen los padres, los profesores y los mismos estudiantes. Casante, Agüero A.t. (2019)

4.2.3. Componente conductual

Es el comportamiento especifico tiene el alumno para desarrollar una actividad en específico, este componente complementa los dos anteriores porque según su actitud cognitiva y afectiva puede influir en su comportamiento para enfrentar diferentes situaciones del tema a desarrollar. Pérez & Vázquez. (2020)

Este componente evalúa el comportamiento que el estudiante tiene para aprender matemáticas, sus intenciones, demuestra todo lo positivo que el estudiante puede llegar a aportar para el aprendizaje y como se va a comportar al momento de solucionar problemas matemáticos. Ávila, Cubillos, (2021)

4.3. Geometría analítica.

La historia de la geometría analítica se remonta al siglo XVII, cuando dos destacados matemáticos, René Descartes y Pierre de Fermat, hicieron contribuciones fundamentales que sentaron las bases de esta disciplina.

René Descartes, también conocido como Descartes, es considerado el padre de la geometría analítica. En su obra "La Géométrie" publicada en 1637, planteo el sistema de coordenadas cartesianas. Este sistema, también conocido como sistema de coordenadas rectangulares, permite representar puntos en un plano mediante pares ordenados de números. Descartes propuso la idea de asignar un eje horizontal (eje x) y un eje vertical (eje y) a un plano, y utilizar números para medir las distancias desde un punto de referencia. Así, cualquier punto en el plano podría ser identificado mediante sus coordenadas. Esta idea permitió una conexión profunda entre el álgebra y la geometría, ya que las ecuaciones algebraicas se podían interpretar geométricamente y viceversa. (Álvarez, 2000).

Pierre de Fermat, también realizó contribuciones significativas al desarrollo de la geometría analítica. Fermat aplicó métodos algebraicos para resolver problemas geométricos, utilizando ecuaciones para describir y analizar figuras geométricas. Introdujo el uso de ecuaciones polinómicas para representar curvas, lo que permitió un enfoque algebraico para abordar problemas geométricos. Fermat también trabajó en el cálculo de máximos y mínimos de las funciones y en el estudio de las tangentes a las curvas, sentando las bases del cálculo diferencial e integral. (Fernández, 2018).

En los siglos siguientes, matemáticos notables como Isaac Newton, Leonhard Euler y Carl Friedrich Gauss continuaron avanzando en la geometría analítica y expandiendo su alcance. Newton utilizó la geometría analítica para desarrollar el cálculo y la teoría de la gravitación universal, sentando las bases de la física moderna. Euler hizo contribuciones importantes en el estudio de las curvas y las superficies mediante ecuaciones algebraicas. Gauss, uno de los matemáticos más influyentes de todos los tiempos, trabajó en el desarrollo de geometría diferencial y realizó importantes contribuciones a la teoría de las superficies. (Pérez, 2017)

La geometría analítica no se limitó solo a dos dimensiones. Con el desarrollo de las coordenadas tridimensionales, se pudo extender a figuras y problemas en el espacio tridimensional. Esto permitió el estudio y la representación de objetos tridimensionales y su aplicación en campos como la física, la geometría descriptiva y la ingeniería. (Sainz, Valderrama, 1992).

Para concluir, la geometría analítica nació como la unión entre la geometría y el álgebra, gracias a las contribuciones de matemáticos como Descartes y Fermat. Su introducción del sistema de coordenadas cartesianas y el enfoque algebraico revolucionaron la manera de estudiar y describir figuras geométricas. A lo largo del tiempo, esta disciplina ha ido avanzando y se ha convertido en una herramienta esencial en el avance de las matemáticas y en la resolución de problemas en diversos campos científicos y técnicos.

La geometría analítica es una herramienta muy importante para la solución de problemas geométricos donde se desarrolla el pensamiento geométrico-algebraico, en donde se utilizan tanto las propiedades del algebra como las de la geometría, lo cual facilita una asociación entre curvas y planos para hacer una representación en el plano cartesiano. Boulos, Camargo (1987).

Tomando a Bompiani (1958) la geometría analítica es un estudio de las propiedades de las figuras geométricas y los elementos algebraicos para solucionar un problema de aplicación en la vida cotidiana, utilizando como referencia el plano cartesiano de coordenadas (x,y), esta solución se puede representar en el mismo; para una buena interpretación del problema se recomienda analizar los siguientes pasos:

- Transformar el problema geométrico a un problema analítico.
- Solución del problema con ayuda del algebra y el análisis.
- Interpretación geométrica del resultado.

En conclusión la geometría analítica es la unión de la geometría y el algebra, donde se pueden hacer uso de las diferentes propiedades para llegar a la solución de un problema geométrico, apoyándose desde el plano cartesiano y los métodos algebraicos para llegar a la solución de este.

4.3.1. Secciones cónicas

Las secciones cónicas son curvas obtenidas mediante la intersección de un plano con un cono. Estas curvas son conocidas como elipses, parábolas e hipérbolas, y han sido estudiadas por varios matemáticos a lo largo de la historia.

El matemático griego Apolonio de Perge, también conocido como Apolonio de Perga, fue uno de los primeros en estudiar y clasificar las secciones cónicas. En su obra "Cónicas" escrita alrededor del siglo III a.C., Apolonio dio una descripción detallada de las propiedades y características de las elipses, parábolas e hipérbolas. (Murillo, 2013).

Otro matemático importante en el estudio de las secciones cónicas fue René Descartes. En el siglo XVII, Descartes desarrolló la geometría analítica, que permitió describir las secciones cónicas mediante ecuaciones algebraicas. Su enfoque algebraico proporcionó una forma de entender y representar las curvas cónicas de manera más general. (Pinto, 2016)

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler también realizó contribuciones significativas al estudio de las secciones cónicas. Euler investigó las propiedades geométricas y algebraicas de estas curvas, y sus trabajos sentaron las bases para el desarrollo posterior de la geometría algebraica. (Fernández, 2018).

En resumen, las secciones cónicas son curvas obtenidas mediante la intersección de un plano con un cono, y han sido estudiadas y clasificadas por varios matemáticos a lo largo de la historia. Apolonio de Perge, René Descartes, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss y Henri Poincaré son algunos de los matemáticos destacados que contribuyeron al estudio y comprensión de estas curvas.

4.3.2. Circunferencia

Una circunferencia es una curva cerrada y plana compuesta por todos los puntos equidistantes de un punto central llamado centro. A lo largo de la historia, varios matemáticos han contribuido a la definición y estudio de las circunferencias.

Uno de los primeros matemáticos que estudió las circunferencias fue el antiguo matemático griego Euclides, quien las describió en su obra "Elementos" alrededor del siglo III a.C. Euclides estableció propiedades básicas de las circunferencias, como el hecho de que todos los puntos en la circunferencia están a la misma distancia del centro. (Ortiz, 2005)

Arquímedes, otro matemático griego de la antigüedad, también realizó importantes contribuciones al estudio de las circunferencias. En su trabajo "Medida del Círculo", Arquímedes determinó fórmulas para calcular el perímetro y el área de una circunferencia utilizando un enfoque de aproximación con polígonos regulares. (Caycedo, 2013)

En el siglo XVII, el matemático francés René Descartes desarrolló la geometría analítica, que permitió describir las circunferencias mediante ecuaciones algebraicas. Descartes estableció una relación entre las ecuaciones algebraicas y las propiedades geométricas de las circunferencias, lo que amplió la comprensión y aplicación de estas. (Pinto, 2016)

Además, matemáticos notables como Carl Friedrich Gauss y Henri Poincaré han contribuido al estudio de las circunferencias y sus propiedades. Gauss trabajó en el campo de la geometría diferencial y realizó importantes investigaciones relacionadas con las curvas, incluyendo las circunferencias. Poincaré, por su parte, realizó contribuciones a la topología y al estudio de las superficies, que están estrechamente relacionadas con las circunferencias. (Pinto, 2016)

Para culminar, una circunferencia es una curva cerrada y plana compuesta por todos los puntos equidistantes de un punto central llamado centro. Euclides, Arquímedes, René Descartes, Carl Friedrich Gauss y Henri Poincaré son algunos de los matemáticos destacados que han contribuido al estudio y comprensión de las circunferencias a lo largo de la historia.

4.3.3. Hipérbola

Una hipérbola es una de las cuatro secciones cónicas, junto con la elipse, la parábola y la circunferencia. Es una curva abierta y simétrica que se obtiene al cortar un cono con un plano en una cierta configuración. Varios matemáticos han contribuido a la definición y estudio de las hipérbolas a lo largo de la historia.

Las primeras investigaciones sobre la hipérbola se le agradece al matemático en matemático griego Apolonio de Perge. En su obra "Conicas" en el siglo III a.C., Apolonio desarrolló una descripción geométrica de las hipérbolas y estableció sus propiedades básicas. (Pérez, 2011)

René Descartes, en el siglo XVII, introdujo la geometría analítica, que permitió describir las hipérbolas mediante ecuaciones algebraicas. Su enfoque algebraico proporcionó una forma más general de entender y representar las hipérbolas. (Hernán, 2021)

En el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler realizó importantes contribuciones al estudio de las hipérbolas. Euler investigó las propiedades algebraicas y geométricas de las hipérbolas y profundizó en su comprensión matemática. (Escobar, 2012)

4.3.4. Elipse

Una elipse es una curva cerrada y simétrica que se forma cuando un plano corta un cono de manera oblicua. Matemáticamente, se define como el conjunto de todos los puntos en un plano, tales que la suma de las distancias de cada punto a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

La elipse ha sido estudiada y descrita por varios matemáticos a lo largo de la historia. Uno de los primeros matemáticos en investigar las propiedades de las elipses fue el antiguo matemático griego Apolonio de Perge, quien las clasificó y estudió en su obra "Cónicas" en el siglo III a.C. Apolonio estableció propiedades geométricas fundamentales de las elipses, como su simetría y la relación entre los focos y los puntos de la elipse. (Ríos, 2014)

Posteriormente, en el siglo XVII, el matemático francés René Descartes desarrolló la geometría analítica, lo que permitió describir las elipses mediante ecuaciones algebraicas. Descartes estableció una relación entre las ecuaciones algebraicas y las propiedades geométricas de las elipses, lo que permitió un enfoque más general y poderoso para su estudio. (Grau, Francés, 2012)

4.3.5. Parábola

Una parábola es una curva abierta y simétrica que se forma cuando un plano corta un cono de manera paralela a una de sus generatrices. Matemáticamente, se define como el conjunto de todos los puntos en un plano que están equidistantes de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.

En la antigua Grecia, Arquímedes investigó las propiedades geométricas de las parábolas en su obra "La medida del círculo", mientras que Apolonio de Perge profundizó en su estudio y clasificación en su tratado "cónicas". Estos matemáticos sentaron las bases para comprender la simetría y la relación entre foco y directriz en las parábolas.

En el siglo XVII, René Descartes introdujo la geometría analítica, que permitió representar las parábolas mediante ecuaciones algebraicas. Sus contribuciones algebraicas y geométricas relacionadas con las parábolas fueron fundamentales para el desarrollo de la geometría moderna.

Pierre de Fermat, también en el siglo XVII, profundizó en el estudio de las parábolas y su relación con las tangentes. Sus investigaciones proporcionaron una comprensión más profunda de la geometría de las curvas y sentaron las bases para el cálculo diferencial.

Leonhard Euler, en el siglo XVIII, realizó importantes avances en el estudio de las parábolas y su relación con las ecuaciones algebraicas. Estableció propiedades fundamentales de las parábolas y desarrolló métodos para analizar su comportamiento y características.

En resumen, matemáticos como Arquímedes, Apolonio de Perge, René Descartes, Pierre de Fermat y Leonhard Euler han contribuido significativamente al estudio y comprensión de las parábolas a lo largo de la historia. Sus investigaciones y descubrimientos han sentado las bases para la geometría analítica, el cálculo diferencial y el análisis de curvas en general.

5. MARCO METODOLÓGICO

5.1. focalización de la información

Para tener un panorama más amplio sobre las necesidades educativas que puede llegar a presentar la enseñanza de las matemáticas en este caso la temática de geometría analítica en los y las estudiantes, Se indago en algunos repositorios tantos nacionales como internaciones haciendo una selección de aquellos proyectos que fuesen pertinentes para el desarrollo del presente trabajo.

5.2. Panorama actual

En general, los estudios sobre las actitudes hacia las matemáticas han mostrado que existen diversas actitudes y percepciones hacia esta disciplina. Algunos estudiantes pueden tener una actitud positiva y disfrutar de las matemáticas, mientras que otros pueden experimentar ansiedad o desinterés hacia la materia.

Algunas investigaciones han revelado que las actitudes negativas hacia las matemáticas pueden estar influenciadas por factores como la falta de confianza en las habilidades matemáticas, experiencias previas negativas, estereotipos sociales o la percepción de la matemática como una materia difícil y poco relevante para su vida cotidiana.

Sin embargo, también se ha estudiado la importancia de promover una actitud positiva hacia las matemáticas desde las etapas tempranas de la educación. Los estudios han demostrado que una actitud positiva está asociada con un mejor rendimiento académico y una mayor disposición a participar activamente en las actividades matemáticas.

5.3. Cartilla

Se logro creación de la siguiente cartilla por medio de la enseñanza para la comprensión ya que tiene un diseño muy didáctico, lo que significa que se ha tenido en cuenta la estructura y organización del contenido para facilitar la comprensión del estudiante. Al utilizar un lenguaje muy accesible y no muy técnico, se busca que la persona que lo lea logre comprender los conceptos de maneras mas clara y sencilla.

Aunque se utiliza un lenguaje accesible, se ha mantenido una rigurosidad en las demostraciones de cada una de las secciones cónicas. Esto garantiza que el contenido presentado sea preciso y confiable, brindando al estudiante una base sólida en el tema.

La cartilla utiliza elementos previamente explicados en el texto a medida que se avanza en el contenido. Esto ayuda a reforzar los conceptos y establecer conexiones entre diferentes secciones, permitiendo una comprensión más profunda y coherente del tema.

Se utiliza una representación visual paso a paso para llegar a la demostración de las diferentes secciones cónicas. Esta representación visual complementa la explicación escrita, brindando una comprensión más completa y facilitando la asimilación de los conceptos.

La cartilla proporciona una serie de ejercicios para que los estudiantes practiquen lo aprendido. Estos ejercicios permiten al docente guiar y evaluar el progreso de cada estudiante, identificando áreas de mejora y brindando retroalimentación individualizada.

Secciones cónicas.

Nombre: ______________________

Grupo: ________________________

Institución: ____________________

Introducción.

En general la matemática representa para muchos estudiantes una de las asignaturas y ramas del conocimiento más complejas y difíciles que pueden existir, y aunque se pueden enumerar diferentes factores por los cuales se origina y se alimenta esta idea en los estudiantes día a día, el docente en matemáticas tiene la ardua labor de quitar este estigma implementando diferentes metodologías para la construcción del conocimiento. Muchas veces estos paradigmas empiezan desde el mismo hogar.

Existen diversas metodologías y modelos pedagógicos sobre los cuales se orientan los procesos de enseñanza aprendizaje en la escuela, muchos de ellos favorables para gran parte de los contextos en donde se puedan implementar, sin embargo, en matemáticas siempre hay nuevas formas de transformar e innovar en la educación.

Con lo anterior, se desarrolló la siguiente cartilla como estrategia de aprendizaje para los estudiantes de grado decimo (10°) con la finalidad de abarcar uno de los temas que puede generar confusión en gran parte de estos como lo son las sesiones cónicas. La finalidad de esta cartilla es servir de apoyo para el estudiante en la compresión de los temas mencionados sin ser camisa de fuerza el apoyo del docente, con esto no se está desmeritando la labor del rol docente, por el contrario, al ser esta una cartilla elaborada por docentes en formación se busca la adaptabilidad del docente en diferentes ámbitos de su ejercicio.

Los temas tratados en la cartilla son:

- La circunferencia
- La hipérbola
- La parábola
- La elipse

La cartilla está divida en cinco sesiones, en cada sesión cónica el estudiante encontrara varios apartados los cuales están segmentadas en descripciones graficas de las sesiones, aquí el estudiante podrá evidenciar de manera visual las definiciones, características, similitudes y diferencias entre las sesiones cónicas.

También encontrará un apartado de demostración, donde se detallará el paso a paso para llegar a la generalización de las distintas ecuaciones de cada sección cónica, también se encontrará un aprendamos donde se realizan ejemplos de forma minuciosa para el fortalecimiento del tema; Para finalizar se dejará un practiquemos a modo evaluativo para que el estudiante profundice y así el docente logre evidenciar lo aprendido por el estudiante a lo largo de las diferentes sesiones.

“Se va a trabajar el siguiente DBA:

- Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.

Y se lograra las siguientes evidencias de aprendizaje:

- Localiza objetos geométricos en el plano cartesiano.
- Identifica las propiedades de lugares geométricos a través de sus representaciones en un sistema de referencia.

- Utiliza las expresiones simbólicas de las cónicas y propone los rangos de variación para obtener una gráfica requerida.
- Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica.” Derechos básicos de aprendizaje V2.

Secuencia didáctica #1

Secciones cónicas.

Una superficie cónica de revolución es la superficie engredada por una recta r, llamada generatriz, que gira alrededor de otra fija e, llamada eje, a la que corta en un punto V, denominado vértice.

Las secciones cónicas son lugares geométricos que pueden obtenerse a partir de cortes de una superficie cónica de revolución.

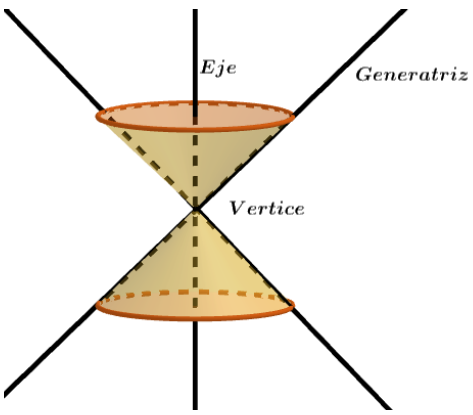


Ilustración 1. Sección cónica. elaboración propia.

Sabías que:

Las secciones cónicas son las curvas que resultan al intersectar una superficie cónica de revolución el en plano π

Dependiendo la posición en el plano π con respecto a la superficie se pueden obtener las siguientes secciones cónicas.

Secciones cónicas	
Circunferencia	**Elipse**
Si el plano es perpendicular al eje de la superficie y no pasa por el vértice, la cónica es una circunferencia.	Si el plano es oblicuo al eje de la superficie, corta a todas sus generatrices no pasa por el vértice, la cónica es una curva cerrada que recibe el nombre de elipse.
Hipérbola	**Parábola**
Si el plano es paralelo al eje de la superficie, la cónica se denomina hipérbola, y es una curva que consta de dos partes, una de cada una de las hojas de la superficie cónica.	Si el plano es oblicuo al eje y paralelo a la generatriz, la cónica es una curva abierta denominada paralela

Para practicar.

Utiliza plastilina para construir dos conos y únelos con un palillo para formar un cuerpo similar a una superficie cónica de revolución.

Paso a paso a figuras.

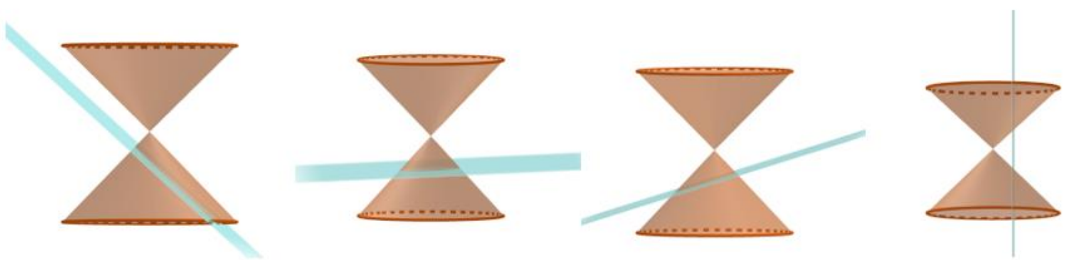


Ilustración 2. Corte de las secciones cónicas. Elaboración propia.

Realiza cortes en el cuerpo que construiste usando una regla y verifica el tipo de sección cónica que se obtiene en cada caso.

Circunferencia.

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro.

La distancia desde cualquier punto de la circunferencia se llama radio.

Ecuación canónica de la circunferencia con centro (0,0).

- Demostración de la ecuación de una circunferencia con centro en el origen.

1) Realizar un plano cartesiano.

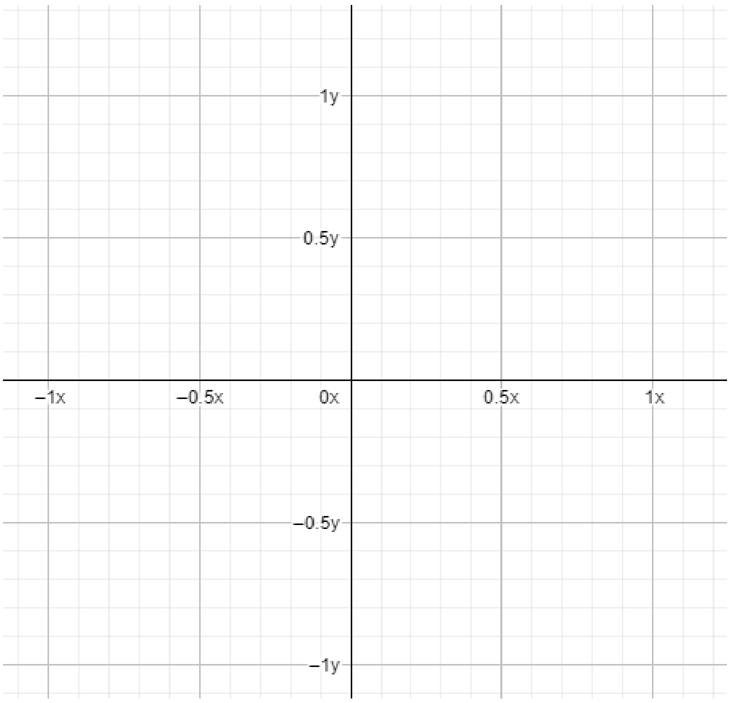


Ilustración 3. Plano cartesiano. Elaboración propia.

2) Realizar una circunferencia con centro en el origen.

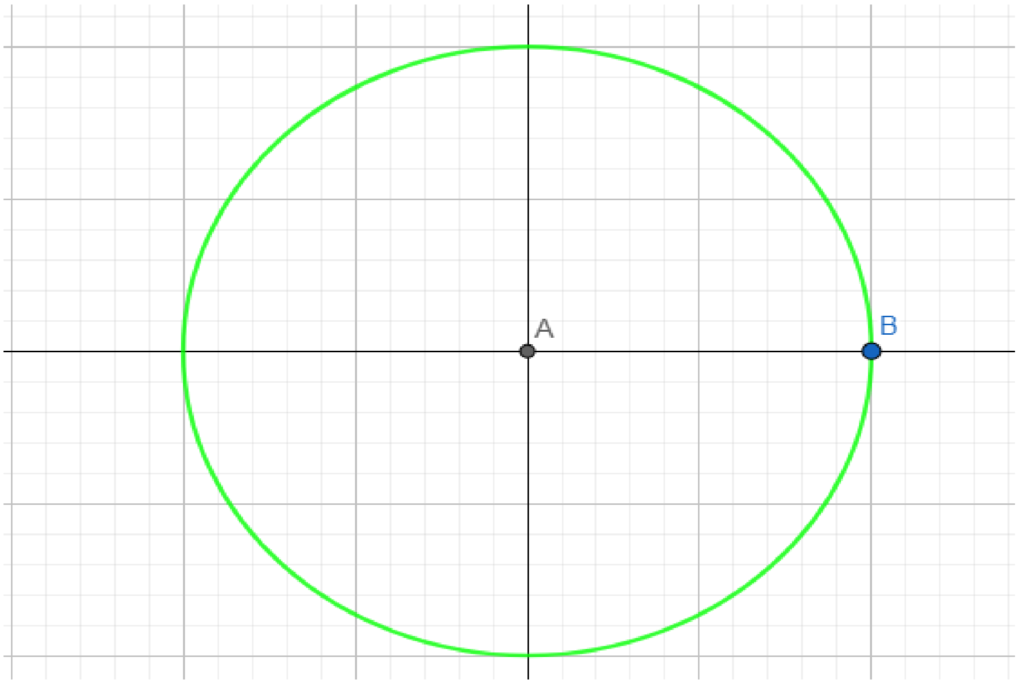


Ilustración 4. Circunferencia en el plano cartesiano. elaboración propia.

3) Poner un punto P en cualquier parte de la circunferencia.

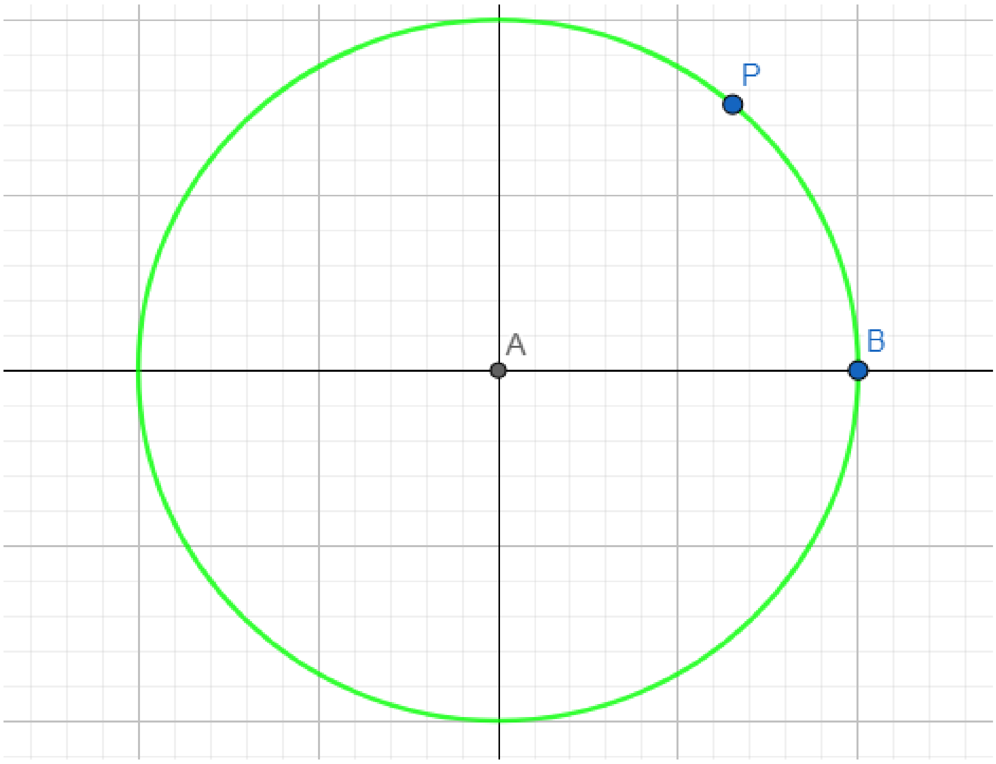


Ilustración 5. Punto P en la circunferencia. Elaboración propia.

4) Trazar un segmento desde el centro de la circunferencia hasta el punto P.

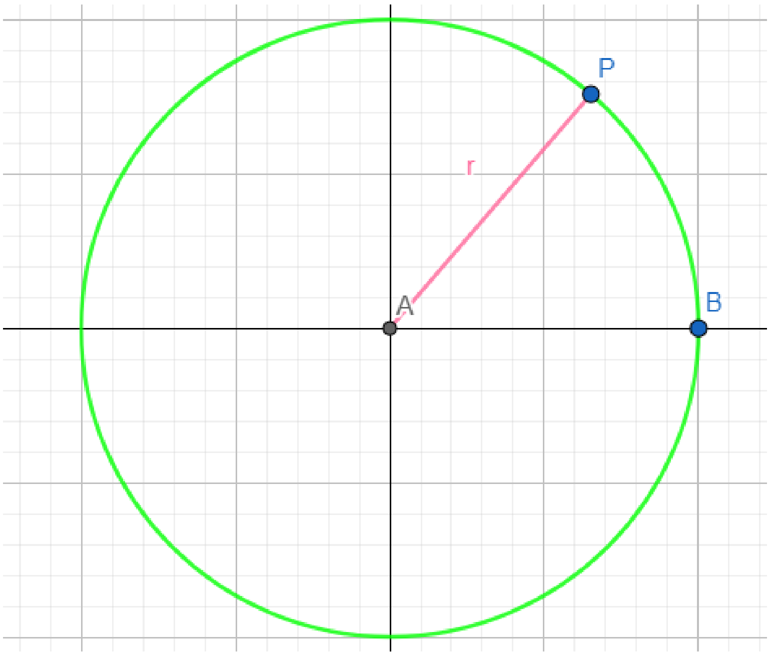


Ilustración 6. Segmento del centro de la circunferencia al punto P de la circunferencia. elaboración propia.

5) Darle coordenadas al punto P=(x,y) y A=(0,0)

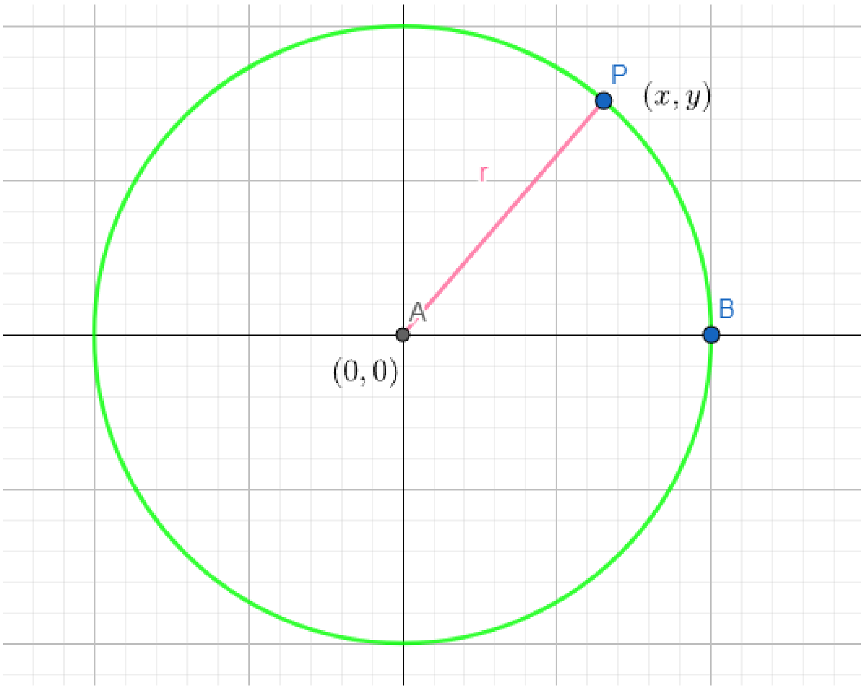


Ilustración 7. Coordenadas (x,y) en el punto P sobre la circunferencia. Elaboración propia.

Para hallar r usamos la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sabiendo que le punto A= (0,0) y el punto P= (x,y)

$$A = (0,0)\ P =, (x,y)$$

$$x_1\ y_1 \qquad x_2\ y_2$$

Ahora remplazamos los puntos A y P en la ecuación de la distancia.

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Resolviendo nos quedaría:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad nos quedaría.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$o$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Aprendamos

Halla la ecuación de la circunferencia con centro (0,0) y de radio igual a 2 unidades.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Ecuación canónica de la circunferencia.

Demostración de la ecuación canónica de una circunferencia con centro fuera del origen.

1) Realizar un plano cartesiano.

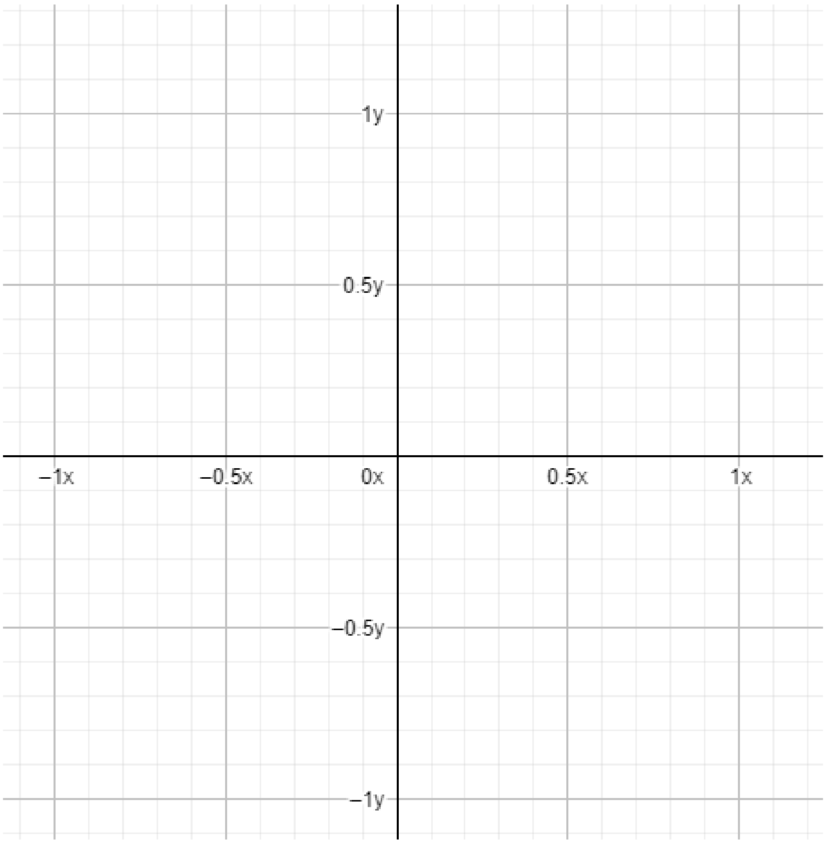


Ilustración 8. Plano cartesiano. elaboracion propia.

2) Realizar una circunferencia que no tenga centro en el origen.

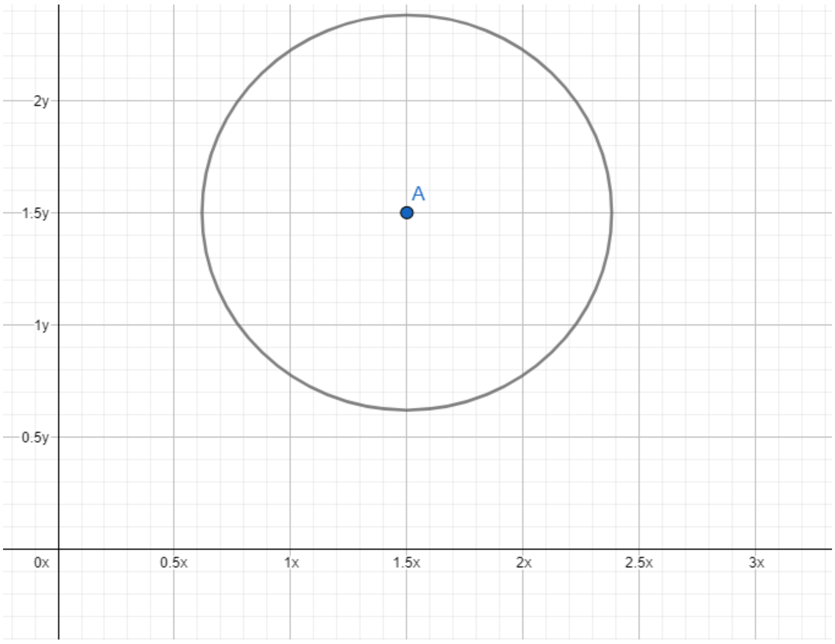


Ilustración 9. Crincunferencia sin centro en el origen del plano cartesiano. Elaboracion propia.

3) Poner un punto P en cualquier parte de la circunferencia.

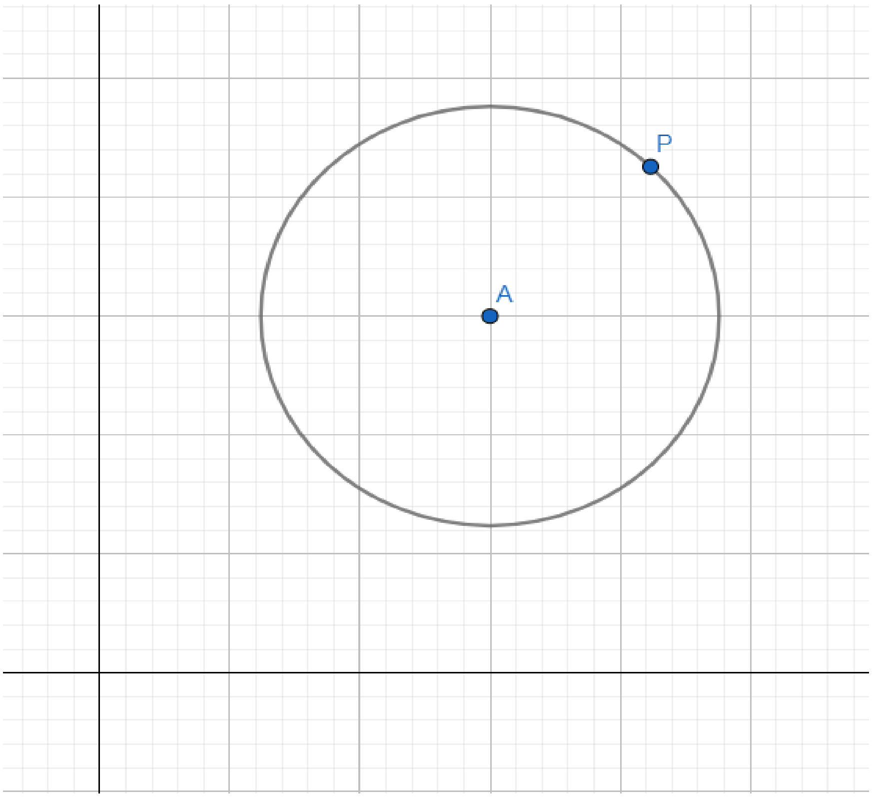


Ilustración. Punto P en la circunferencia. Elaboración propia.

4) Le damos coordenadas a C= (h,k) y a P = (x,y)

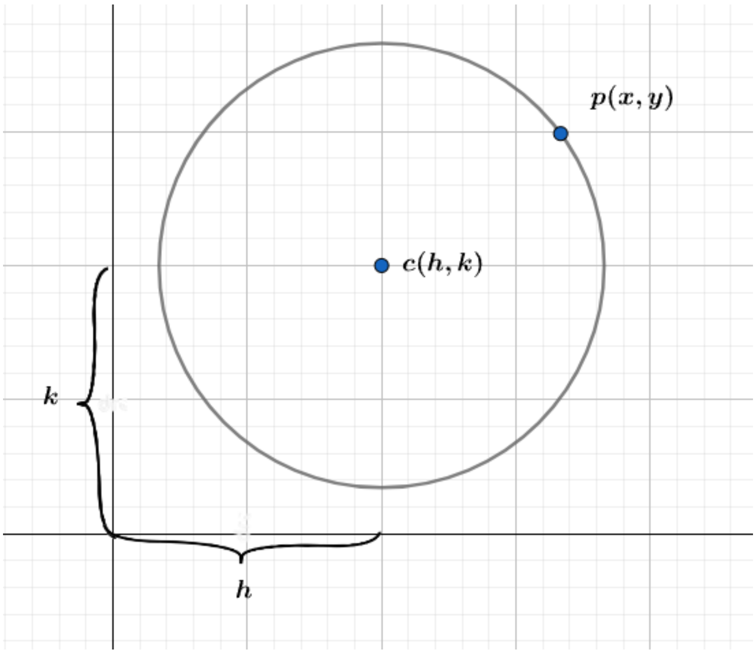


Ilustración 10. Coordenadas al centro (h,k) y punto P(x,y) de la circunferencia. Elaboración propia.

5) Trazamos un segmento entre el punto C y el punto P

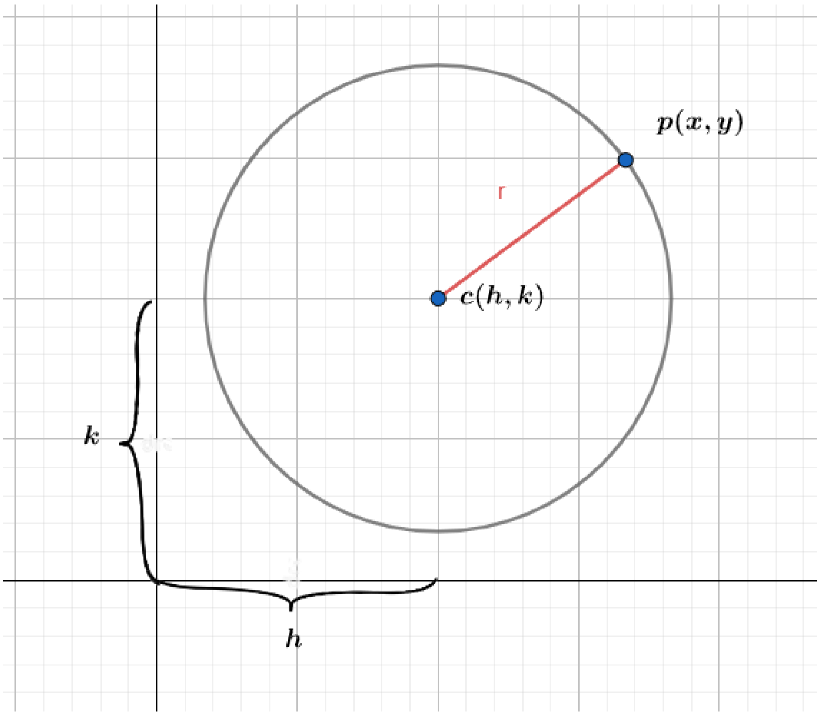


Ilustración 11. Recta del centro de la circunferencia al punto P. elaboración propia.

Para hallar el valor de r utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sabiendo que $C = (h, k)\ y\ \ P = (x, y)$

$$C = (h, k)\ P =, (x, y)$$

$$x_1\ y_1 \qquad x_2\ y_2$$

Ahora remplazamos los puntos A y P en la ecuación de la distancia.

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad nos quedaría.

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Qué es lo mismo que:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Aprendamos

Halla la ecuación canónica de una circunferencia de centro (2,-3) y radio 4.

Solución.

Con la ecuación demostrada anteriormente se sustituyen los Valores de centro

$h\ y\ k$ donde $h = 2\ y\ k = -3$ y el radio de la circunferencia por r.

$$\left(x-(2)\right)^2 + (y-(-3)^2) = (4)^2$$
$$Solucionando\ tenemos$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

Para practicar.

En parejas realizar los siguientes ejercicios.

1) Determina la ecuación y traza la gráfica de cada una de las circunferencias:

a) Centro (5,-2); radio 3

b) Centro (-4, -3); radio 5

2) Justificar cuales de los siguientes pasos no están en lo correcto.

Una circunferencia con centro (3, -2) y radio = 6

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (6)^2$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 36$$

Ilustración 12. Escaner de la circunferencia desde GeoGebra. ELaboración propia.

Recurso interactivo
https://www.geogebra.org/m/myj9cvdb

Ilustración 13. Escáner de la conferencia en

Secuencia didáctica #2

Ecuación general de la circunferencia.

Si en la ecuación canónica de la circunferencia de la circunferencia se efectúan las operaciones y se ordena el polinomio de forma descendente se obtiene:

Tomando

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Solucionando los cuadrados obtenemos:

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$

Organizando e igualando a 0 nos quedaría:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2+r^2=0$$

Remplazamos $D=\ -2h, E=\ -2k\ y\ F=\ h^2+k^2+r^2$

Quedaría:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Así obtenemos la ecuación general de la circunferencia.

Aprendamos

Expresa la ecuación canónica de la circunferencia $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ como una ecuación general.

$$(x-2)^2+(y+3)^2=16$$

$$x^2-2(x)(2)+(2)^2+y^2+2(y)(3)+(3)^2=16$$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=16$$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9-16=0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

Para practicar.

En parejas realizar los siguientes ejercicios.

Determina la ecuación general de los siguientes ejercicios.

a) Centro (5,-2) radio 3

b) Centro (-4,-3) radio 5

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.

Para una circunferencia y una recta en el mismo plano, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx + b \end{cases}$$

Con este sistema se pueden dar tres situaciones.

1) El sistema tiene una única solución es decir, solo hay un punto (x,y) común a la recta y a la circunferencia. En este caso, se dice que **la recta es tangente** a la circunferencia.

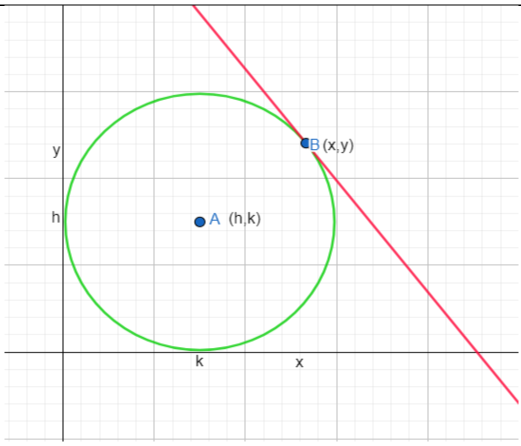
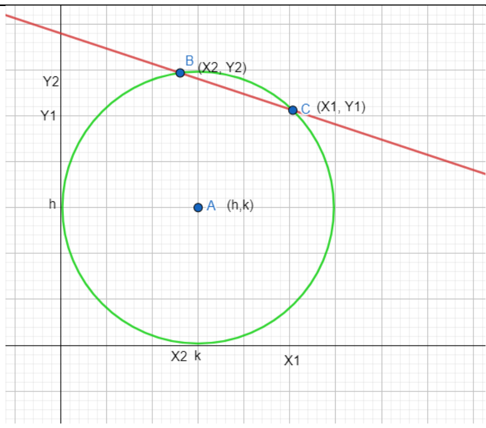
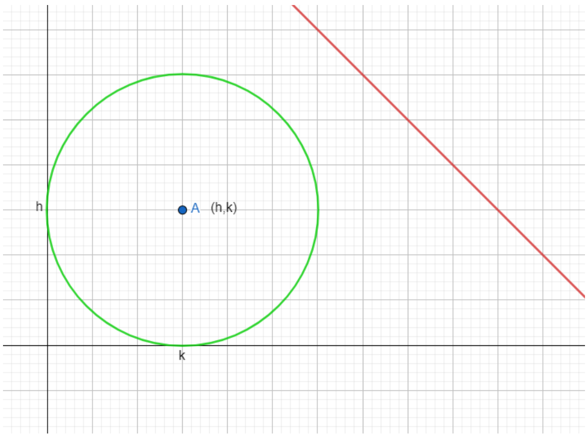


Ilustración 14. Recta tangente a la circunferencia. Elaboración propia.

2) El sistema tiene dos soluciones. En este caso, hay una pareja de puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), comunes a la recta y a la circunferencia. Se dice que **la recta es secante** a la circunferencia.	 Ilustración 15. Recta secante a la circunferencia. Elaboración propia.
3) El sistema no tiene solución. En este caso, la recta y la circunferencia no tiene ningún punto en común. Por tanto, se dice que **la recta es exterior** a la circunferencia.	 Ilustración 16. Recta exterior a la circunferencia. Elaboración propia.

Aprendamos

Determina si la recta $y = x - 2$ (1) es tangente, secante o exterior a la circunferencia

$x^2 + y^2 = 2$ (2).

Lo primero que hay que hacer es determinar los puntos de corte entre la recta y la circunferencia de la siguiente manera.

Se remplaza la (1) en (2)

$$x^2 + (x - y)^2 = 2$$

Se desarrolla el cuadrado del binomio:

$$x^2 + (x^2 - 4x + 4) = 2$$

Se iguala a 0

$$x^2 + x^2 - 4x + 4 - 2 = 0$$

Se reducen términos semejantes

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

Se factoriza el 2

$$2(x^2 - 2x + 1) = 0$$

Se dividen ambas partes en 2

$$\frac{2(x^2 - 2x + 1)}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Se factoriza

$$(x - 1)^2 = 0$$

Sacamos raíz a ambas partes de la igualdad

$$\sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{0}$$

$$x - 1 = 0$$

Despejando x nos quedaría

$$x = 1$$

Y al remplazar $x = 1$ en (1) se obtiene

$$y = 1 - 2$$

$$y = -1$$

Por tanto, el único punto de intersección es $(1, -1)$. Es decir, la recta es tangente a la circunferencia

Gráficamente nos quedaría

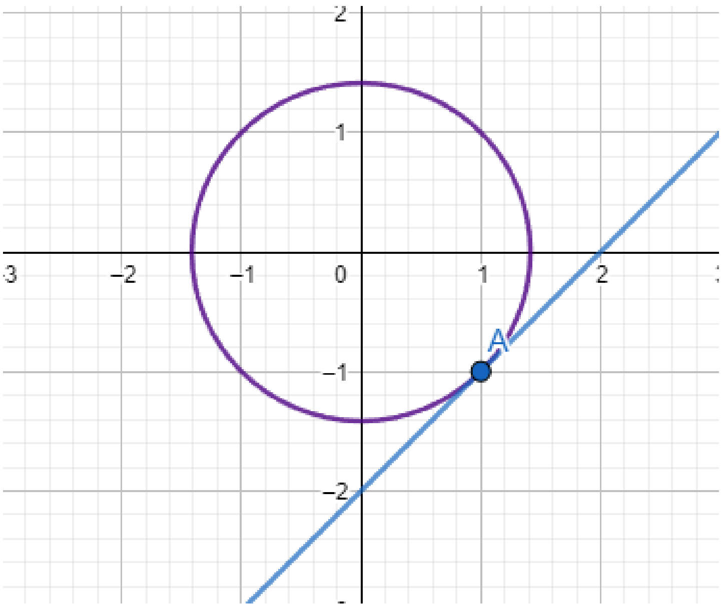


Ilustración 17. Ejemplo de recta tangente. Elaboración propia.

Determina si la recta $y = x$ (1) es tangente, secante o exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4.$ (2)

Reemplazamos (1) en (2)

$$x^2 + x^2 = 4$$

$$2x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{2}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Reemplazando $x = \sqrt{2}$ en la ec (1)

$$y = \sqrt{2}$$

Reemplazando $x = -\sqrt{2}$ en la ec (1)

$$y = -\sqrt{2}$$

De lo anterior se concluye A $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y $B\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ son los puntos de intersección; por lo tanto es una recta secante.

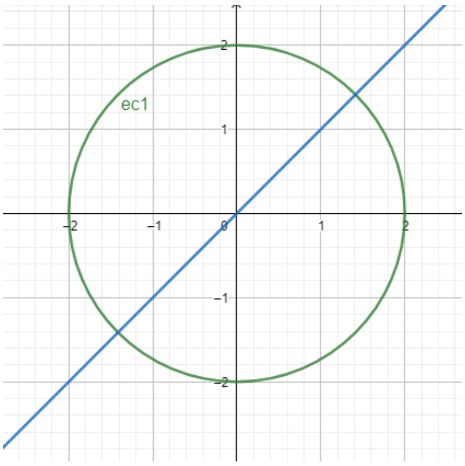


Ilustración 18. Ejemplo de recta secante. Elaboración propia.

Determina si la recta $y = 2x - 4\ (1)$ es tangente, secante o exterior a la circunferencia $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 16(2)$

Se remplaza $(1)\ en\ (2)$

$$(x+3)^2 + (2x - 4 - 4)^2 = 16$$

$$(x+3)^2 + (2x - 8)^2 = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 32x + 64 = 16$$

$$5x^2 - 26x + 57 = 0$$

Utilizando la formula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con $a = 5$ $b = -26$ $c = 57$

$$x = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(26)^2 - 4(5)(57)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{+26 \pm \sqrt{676 - 1140}}{10}$$

$$x = \frac{+26 \pm \sqrt{-464}}{10}$$

$$x = 2{,}6 \pm 4\sqrt{29}\, i$$

La solución de la expresión es $2{,}6 \pm 4\sqrt{29}\, i$, lo que significa que no existe solución dentro del conjunto de los números reales, por lo tanto, la recta es exterior a la circunferencia y se representa de la siguiente manera.

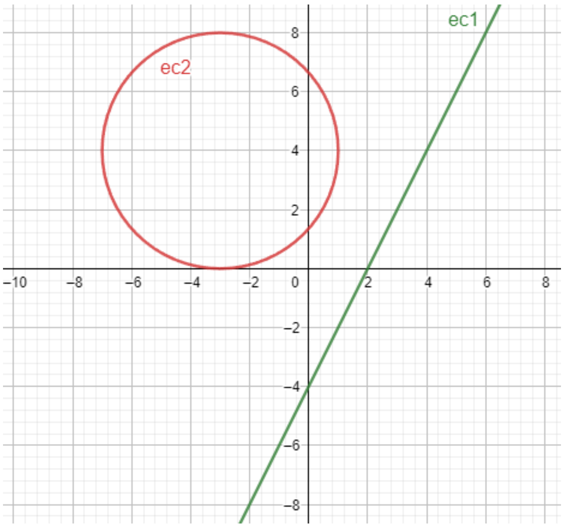


Ilustración 19. Ejemplo de recta exterior. Elaboración propia.

Para practicar.

En grupo de tres compañeros determina la posición relativa de la recta y la circunferencia dadas.

a) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 17 = 0$ $\qquad y = 2x + 1$

b) $C(5, -2); r = 3$ $\qquad y = 3x - 2$

Secuencia didáctica #3

la elipse.

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias desde cada punto a los focos es constante.

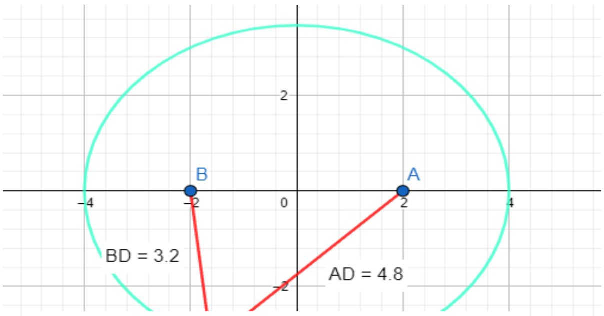


Ilustración 20. Medidas 1 de elipse. Elaboración propia.

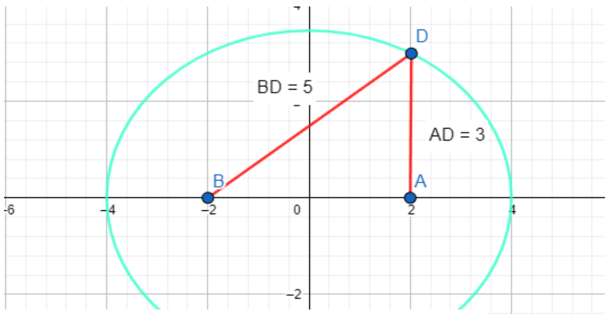


Ilustración 21. Medidas 2 de elipse. Elaboración propia.

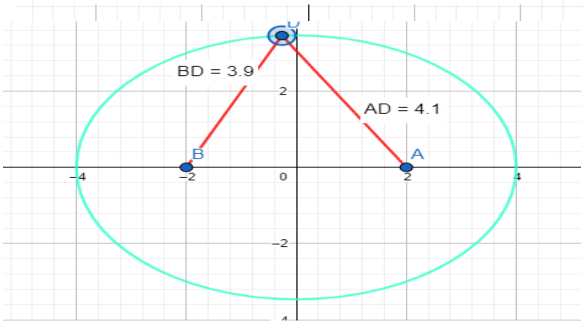


Ilustración 22. Medidas 3 de elipse. Elaboración propia.

Si analizamos todas las distancias desde los focos a un determinado punto de la elipse la suma nos da siempre 8.

La elipse y algunos de sus elementos se identifican en la siguiente figura:

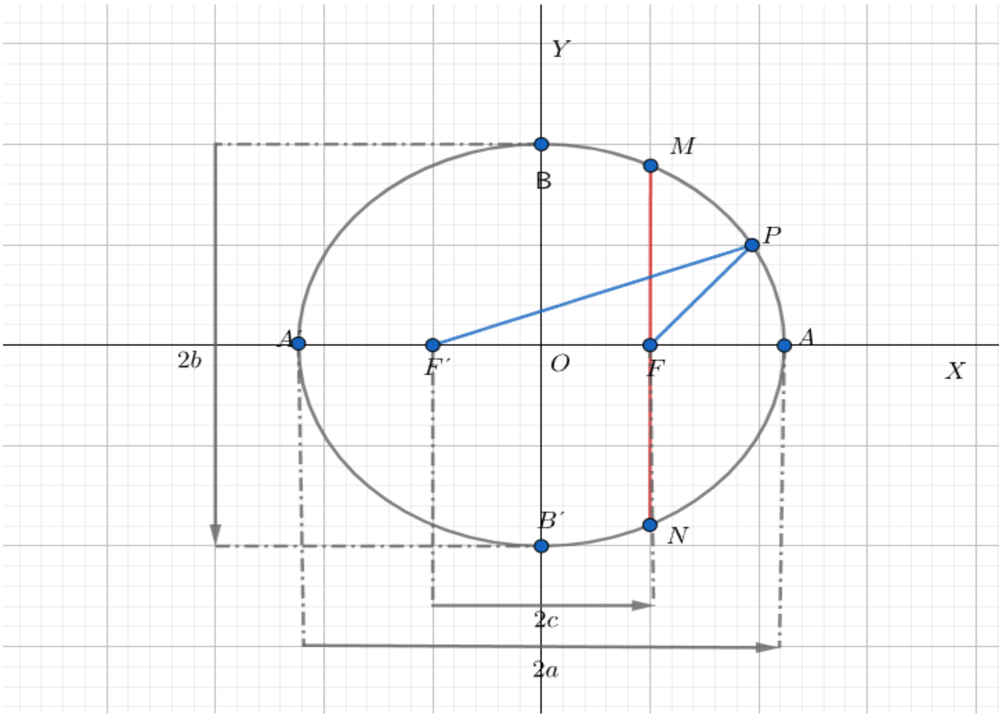


Ilustración 23. Focos de la elipse. Elaboración propia.

- Los puntos fijos $F\ Y\ F´$ se denominan focos y el eje focal es la recta que los contienen.
- Se llama eje secundario a la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$. El punto medio O de dicho segmento es el centro de la elipse.
- Los dos ejes cortan a la elipse en cuatro puntos: $A, A´, B\ y\ B´$ llamados vértices.
- La distancia focal es la que hay entre los dos focos y equivale a $2c$. La mitad de esta distancia c, es la semidistancia focal.
- Para cualquier punto P de la elipse, los segmentos $\overline{PF}\ \ y\ \ \overline{PF'}$ reciben el nombre de radios vectores. La suma de radios vectores en un punto por definición de elipse, una cantidad constante que equivale a $2a,$ En otros términos $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a.$

- El segmento $\overline{AA'}$ es el eje mayor de la elipse cuya longitud es igual a $2a$. La mitad de esta distancia, a, es la medida de cada segmento mayor.
- El segmento $\overline{BB'}$ es el eje menor y su longitud se expresa $2b$. La mitad de esta distancia, b, es la medida de cada semieje menor.
- Una cuerda focal como $\overline{MN}$, perpendicular al eje focal F o F', se llama lado recto y su longitud es $\frac{2b^2}{a}$.

Demostración

1) Realizamos un plano cartesiano.

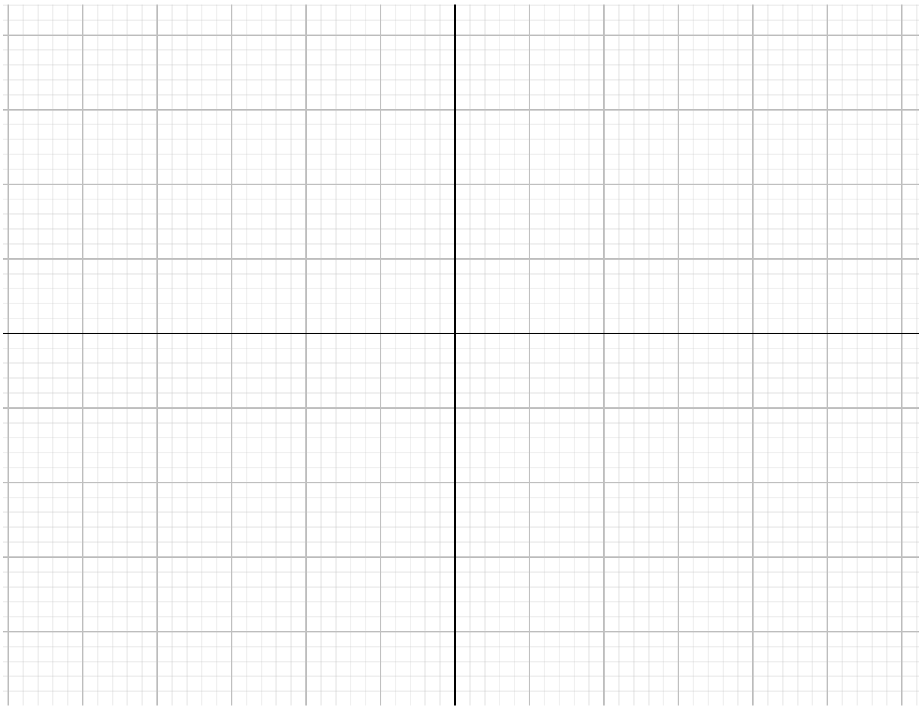


Ilustración 24. Plano Cartesiano. Elaboración propia.

2) Ubicamos dos puntos llamados vértices.

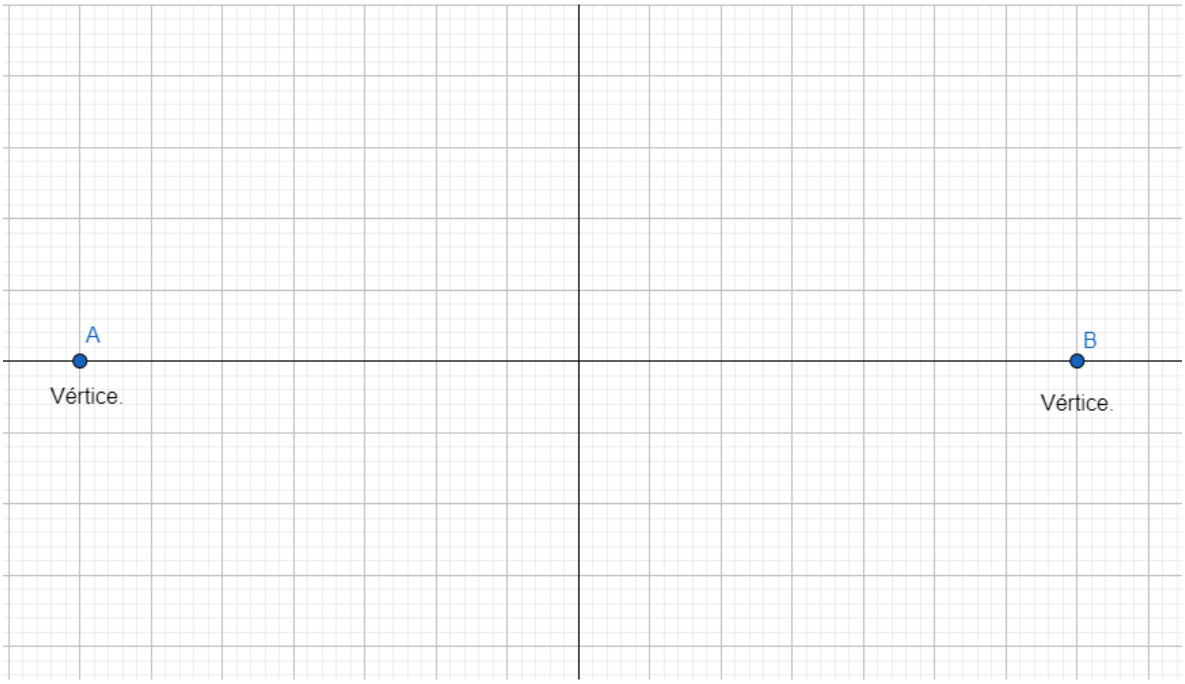


Ilustración 25. Vértices de la elipse. elaboración propia.

3) Ubicamos los focos y hacemos la elipse.

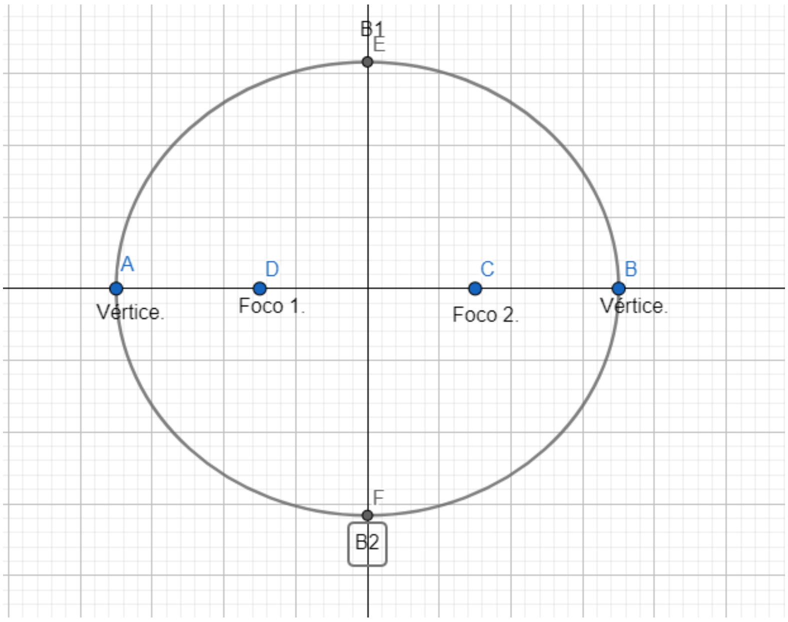


Ilustración 26. Focos de la elipse. Elaboración propia.

4) Ubicamos un punto p en la elipse.

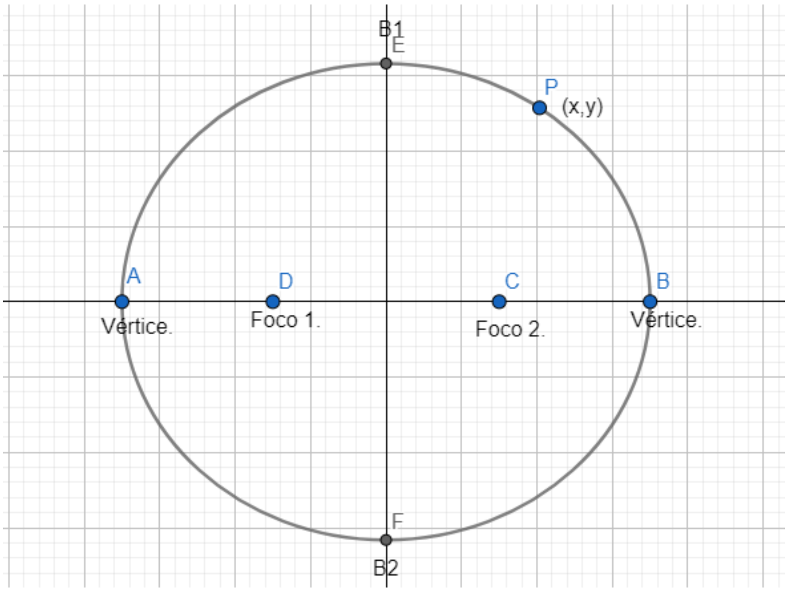


Ilustración 27. Punto P(x,y) sobre la elipse. Elaboración propia.

5) Trazamos dos segmentos desde los focos al punto P.

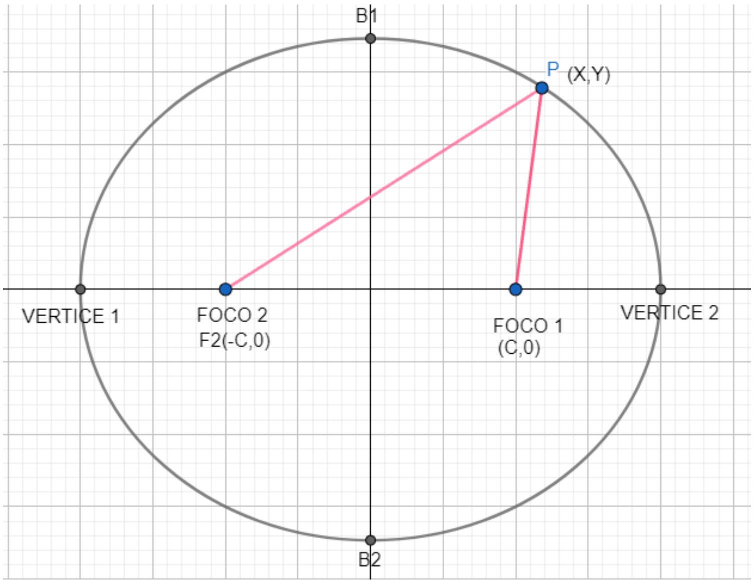


Ilustración 28. Segmentos de los focos al punto P de la elipse. Elaboración propia.

6) Trazamos una recta del centro al foco

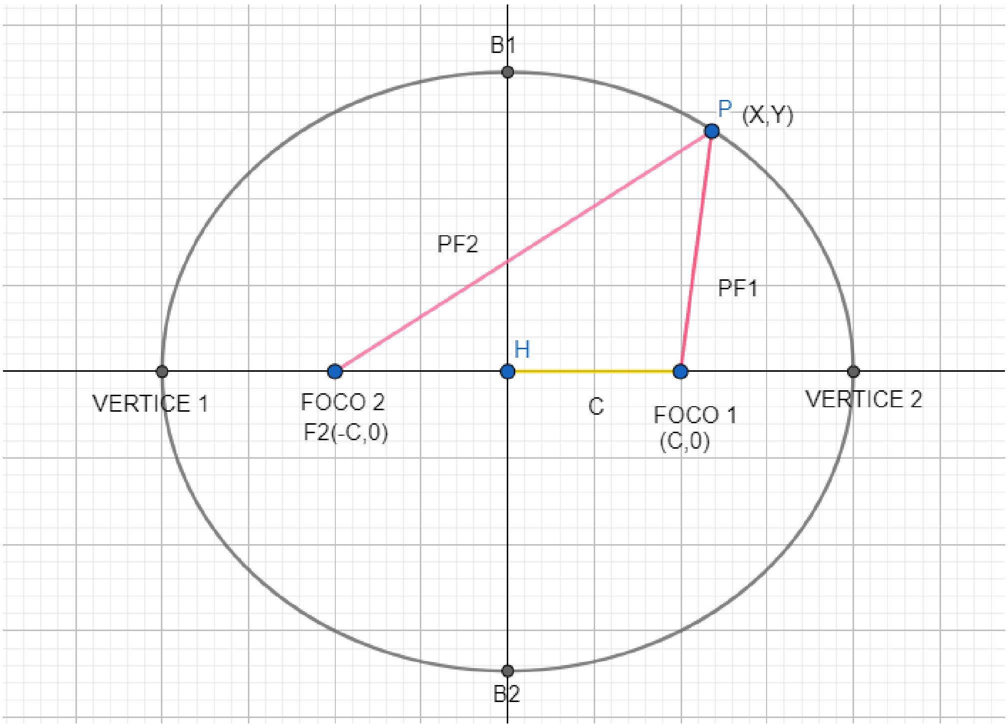


Ilustración 29, Distancia de la elipse a alguno de los focos. Elaboración propia.

7) Le damos valores a los vértices.

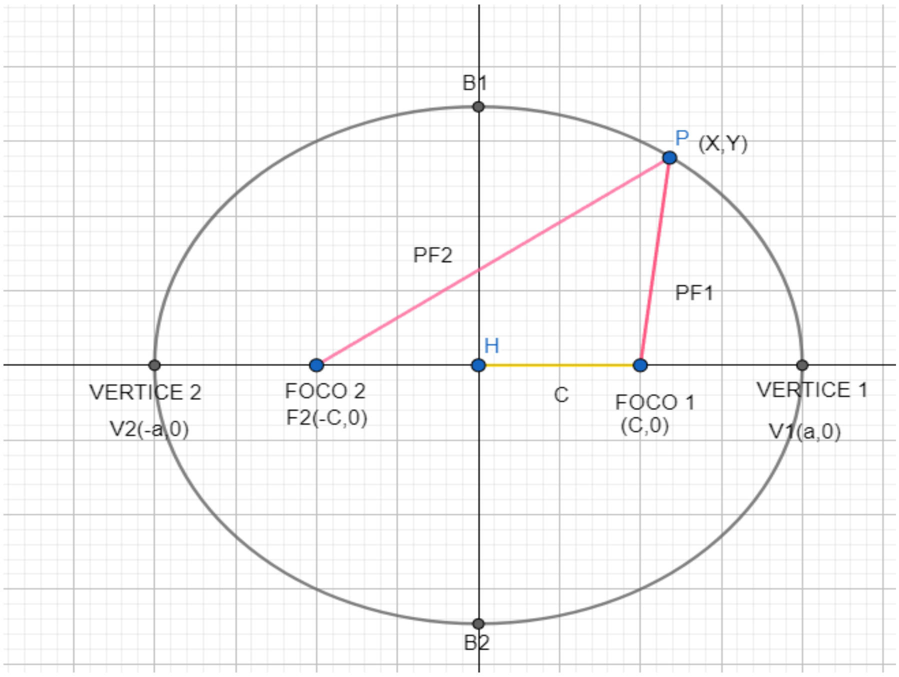


Ilustración 30. Valores a los vértices. Elaboración propia.

La

distancia focal de la elipse y la hipérbola

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, se calcula la distancia del foco 1 al punto y del foco 2 al punto y nos quedaría.

$$PF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$PF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Sumamos las dos distancias de los dos focos al punto que es igual a la distancia de vértice a vértice que en este caso será igual a 2a.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Pasamos la segunda raíz al lado derecho y nos quedaría así.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados.

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = (2a -)^2\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Simplificamos la raíz del lado izquierdo y desarrollamos el binomio del lado derecho.

$$(x-c)^2+y^2 = (2a)^2 - 2(2a)\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) + \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

Desarrollamos el binomio del lado izquierdo y operamos el lado derecho.

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) + (x+c)^2 + y^2$$

Desarrollamos el binomio del lado derecho.

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

Simplificamos términos semejantes.

$$-2xc = 4a^2 - 4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) + 2xc$$

Simplificamos términos semejantes.

$$-4xc = 4a^2 - 4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)$$

Cambiamos la igualdad de lado.

Pasamos el $-4a^2$ al otro lado de la igualdad.

$$-4a^2 + 4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) = 4xc$$

$$4a\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) = 4xc + 4a^2$$

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right) = \frac{4xc+4a^2}{4}$$

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = (xc+a^2)^2$$

$$a^2((x+c)^2+y^2)=x^2c^2+2a^2xc+a^4$$

$$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)=x^2c^2+2a^2xc+a^4$$

$$a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=x^2c^2+2a^2xc+a^4$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2xc-2a^2xc-a^2c^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Aprendamos

Dada la siguiente elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1,$ determina la distancia focal, la longitud del eje mayor y la longitud del eje menor.

La expresión $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{64}=1$ Se puede escribir como $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$ como $8>3,$ entonces la ecuación es de la forma $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$, por lo tanto el eje mayor está en y.

Como b=3 y a =8, y se sabe que $a^2=b^2+c^2\ entonces$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=8^2-3^2$$

$$c^2=55$$

$$\sqrt{C^2}=\sqrt{55}$$

Por tanto,

Distancia focal:

$$2c = 2\sqrt{55}$$

Longitud del eje mayor

$$2a = 2(8) = 16$$

Longitud del eje menor

$$2b = 2(3) = 6$$

Para practicar.

Determina el foco, la distancia focal, la longitud del eje mayor y la longitud del eje menor, de las siguientes elipses:

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$

b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$

d) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

Ecuación canónica de la elipse con centro (h,k)

Demostración

Tomamos los puntos del foco

$$F_1 = (h - c, k)$$

$$F_2 = (h + c, k)$$

$$p = (x, y)$$

$$d_1 + d_2 = 2a$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_1 = \sqrt{(y - k)^2 + \big(y - (h - c)\big)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(y - k)^2 + \big(x - (h + c)\big)^2}$$

Tomamos las dos distancias y las igualamos a 2a

$$\sqrt{(y - k)^2 + \big(x - (h - c)\big)^2} + \sqrt{(y - k)^2 + \big(x - (h + c)\big)^2} = 2a$$

Pasamos la segunda raiz a restar

$$\sqrt{(y - k)^2 + \big(x - (h - c)\big)^2} = 2a - \sqrt{(y - k)^2 + \big(x - (h + c)\big)^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$\left(\sqrt{(y - k)^2 + \big(x - (h - c)\big)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(y - k)^2 + \big(x - (h + c)\big)^2}\right)^2$$

Cancelamos la raíz con el cuadrado y desarrollamos el binomio del lado derecho

$$(y-k)^2+\left(x-(h-c)\right)^2$$

$$=(2a)^2-2(2a)\left(\sqrt{(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2}\right)$$

$$+\left(\sqrt{(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2}\right)^2$$

Hacemos las operaciones indicadas

$$(y-k)^2+\left(x-(h-c)\right)^2$$

$$=4a^2-4a\left(\sqrt{(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2}\right)+(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2$$

Cancelamos $(y-k)^2$

$$\left(x-(h-c)\right)^2=4a^2-4a\left(\sqrt{(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2}\right)+\left(x-(h+c)\right)^2$$

Desarrollamos los binomios

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

$$=4a^2-4a\left(\sqrt{(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2}\right)+x^2-2(x)(h+c)+(h+c)^2$$

Seguimos desarrollando del binomio y las multiplicaciones

$$x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2$$

$$=4a^2-4a\left(\sqrt{(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2}\right)+x^2-2xh-2xc+h^2+2hc$$

$$+c^2$$

Simplificamos términos iguales y pasamos al otro lado de la igualdad $-2xc$ y $+2hc$

$$2xc+2xc-2hc-2hc=4a^2-4a\left(\sqrt{(y-k)^2+\left(x-(h+c)\right)^2}\right)$$

Operamos términos semejantes

$$4xc - 4hc = 4a^2 - 4a\left(\sqrt{(y-k)^2 + \left(x-(h+c)\right)^2}\right)$$

pasamos $4a^2$ al otro lado de la igualdad

$$4xc - 4hc - 4a^2 = -4a\left(\sqrt{(y-k)^2 + \left(x-(h+c)\right)^2}\right)$$

Factorizamos -4

$$-4(-xc + hc + a^2) = -4a\left(\sqrt{(y-k)^2 + \left(x-(h+c)\right)^2}\right)$$

Se divide ambos lados de la igualdad entre -4

$$\frac{-4(-xc + hc + a^2)}{-4} = \frac{-4a\left(\sqrt{(y-k)^2 + \left(x-(h+c)\right)^2}\right)}{-4}$$

Nos quedaría:

$$-xc + hc + a^2 = a\left(\sqrt{(y-k)^2 + \left(x-(h+c)\right)^2}\right)$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$(-xc + hc + a^2)^2 = \left(a\left(\sqrt{(y-k)^2 + \left(x-(h+c)\right)^2}\right)\right)^2$$

Desarrollamos

$$(c(h-x) + a^2)^2 = a^2\left((y-k)^2 + \left(x-(h+c)\right)^2\right)$$

Desarrollamos el binomio a ambos lados

$$(c(h-x))^2 + 2(a^2)(c(h-x) + (a^2)^2 = a^2((y-k)^2 + x^2 - 2x(h+c) + (h+c)^2)$$

Resolvemos las operaciones indicadas

$$c^2(h-x)^2 + 2a^2(ch-cx) + a^4 = a^2((y-k)^2 + x^2 - 2xh - 2xc + (h+c)^2)$$

Desarrollamos el binomio a ambos lados

$$c^2(h^2 - 2hx + x^2) + 2a^2ch - 2a^2cx + a^4$$
$$= a^2(y^2 - 2yk + k^2 + x^2 - 2xh - 2xc + h^2 + 2hc + c^2)$$

Cancelamos términos iguales

$$c^2h^2 - 2c^2hx + c^2x^2 + 2a^2ch - 2a^2cx + a^4$$
$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2x^2 - 2a^2xh - 2a^2xc + a^2h^2 + 2a^2hc + a^2c^2$$

Nos quedaría

$$c^2h^2 - 2c^2hx + c^2x^2 + a^4 = a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + a^2c^2$$

Utilizando que:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Remplazamos todos c^2

$$(a^2-b^2)h^2 - 2(a^2-b^2)hx + (a^2-b^2)x^2 + a^4$$
$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + a^2(a^2-b^2)$$

Aplicamos distributiva

$$h^2a^2 - h^2b^2 - 2a^2hx + 2b^2hx + a^2x^2 - b^2x^2 + a^4$$
$$= a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2 + a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + a^4 - a^2b^2$$

Cancelamos términos iguales

$$-a^2y^2 + 2a^2yk - a^2k^2 = -a^2b^2 + h^2b^2 - 2b^2hx + b^2x^2$$

Igualamos todo a $-a^2b^2$ y sacamos factor común

$$a^2(-y^2 + 2yk - k^2) + b^2(-h^2 + 2hx - x^2) = -a^2b^2$$

Multiplicamos por (-1) a ambos lados de la igualdad

$$a^2(y^2 - 2yk + k^2) + b^2(h^2 - 2hx + x^2) = a^2b^2$$

$$a^2(y-k)^2 + b^2(x-h)^2 = a^2b^2$$

Dividimos todo entre a^2b^2

$$\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2} + \frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2} = 1$$

Simplificando nos quedaría la ecuación de la elipse con centro (h,k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Aprendamos

Realiza la gráfica de la siguiente elipse de acuerdo con su ecuación

$$\frac{(x+5)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

El eje mayor es paralelo al eje de las abscisas

Centro: *C(-5,2)*

Vertices *A(0,2)*

A'(-10,2)

B(-5,6)

B'(-5,-2)

$C = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9}$=3

Focos: F(-2,2)

F´(-8,2)

Grafica

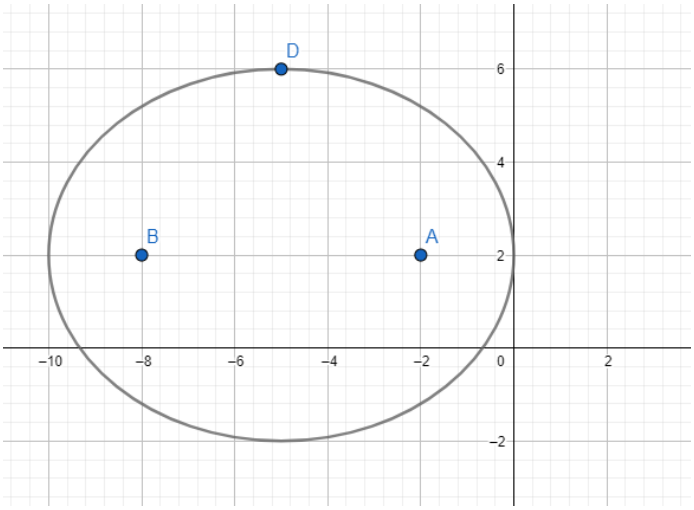


Ilustración 31. Grafica de la elipse. Elaboración propia.

Para practicar

Realiza la gráfica de cada elipse de acuerdo con su ecuación.

$$\frac{\left(x-\frac{21}{10}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{\left(y+\frac{8}{5}\right)^2}{\frac{64}{25}}=1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$$

Recurso interactivo.

https://www.geogebra.org/m/xykpp4fh

Ilustración 32. Escáner de la elipse en GeoGebra. Elaboración propia.

Secuencia didáctica #4

Hipérbola

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a fijos F y F´ llamados focos son constante. Es decir, si el punto p pertenece a la hipérbola se verifica que:

$$d(P,F) - d(P,F') = C, con\ C \epsilon \mathbb{R}$$

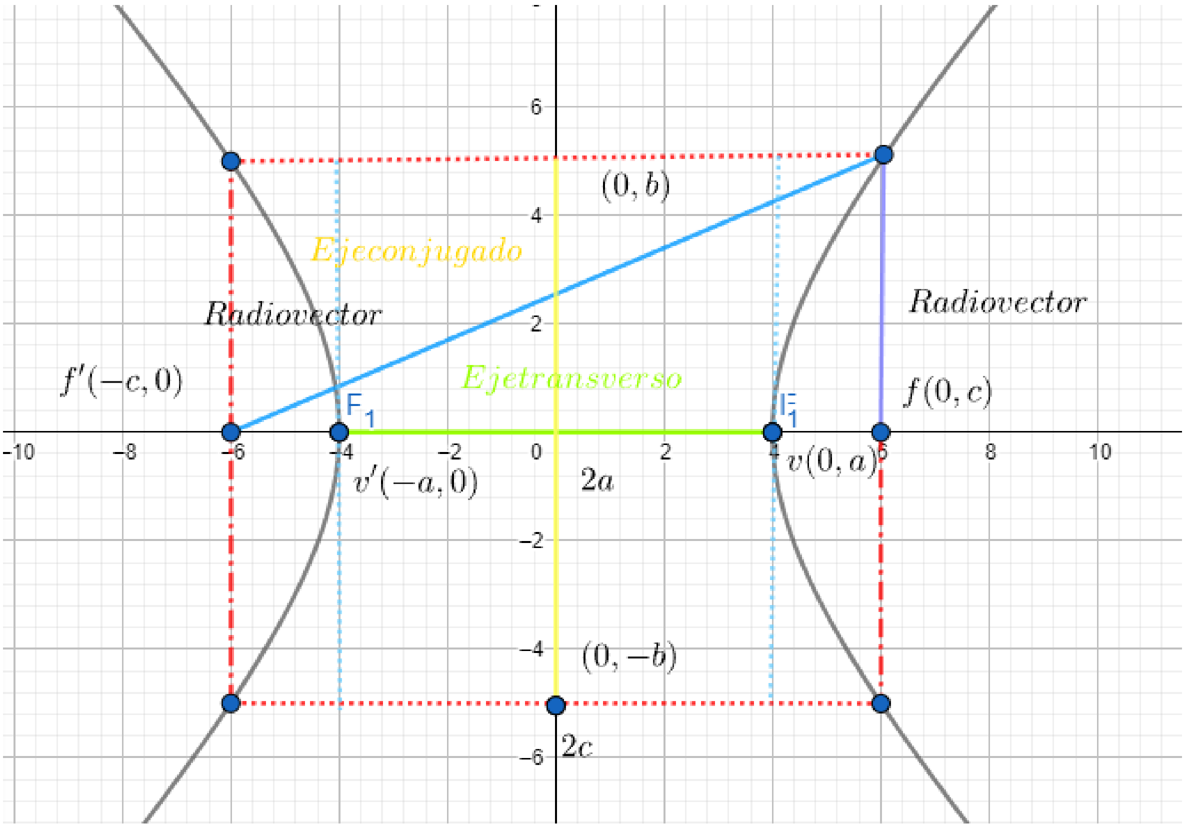


Ilustración 33. Partes de la hipérbola. Elaboración propia.

Elementos Básicos De la Hipérbola

- Los puntos fijos F y F´ son los focos de la hipérbola. La distancia entre ellos, la cual se expresa por 2c, se llama distancia focal.

  La semidistancia focal es la mitad de la distancia focal, por lo tanto, equivale a c
- Si P es un punto de la hipérbola, los segmentos $\overline{PF}\ y\ \overline{PF'}$ reciben el nombre de radios vectores. La distancia positiva de los radios vectores en un punto es, por la definición de hipérbola, una cantidad constante que equivale a 2a
- El eje focal es la recta que pasa por los focos, y el eje secundario es la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$.
- El punto medio O del segmento F y F´, es el centro de la hipérbola
- Los puntos V y V´ donde la hipérbola interseca al eje focal se llaman vértices. El segmento $\overline{V'V}$ se denomina eje transverso y su longitud es 2a unidades.
- El segmento de recta que es perpendicular al eje transverso y que pasa por el centro de la hipérbola, se denomina eje conjugado y su longitud es 2b unidades
- Al igual que en la elipse, la excentricidad se define como $\mathrm{e} = \frac{c}{a}$

Construcción de la hipérbola.

1) Traza un plano cartesiano.

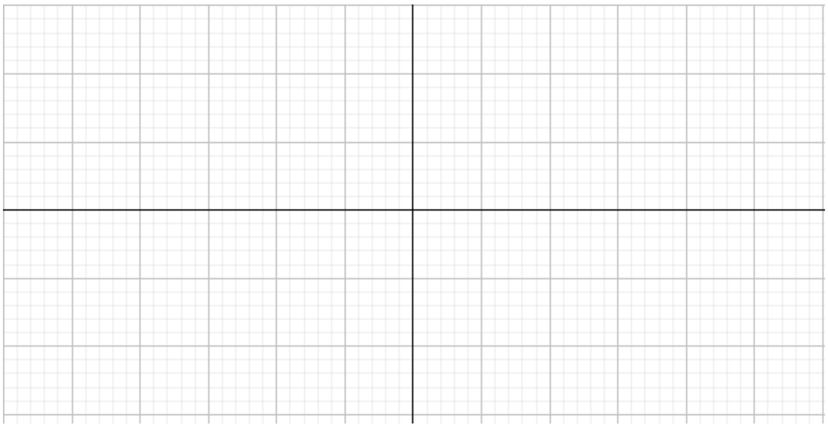


Ilustración 34. Plano Cartesiano. Elaboración propia.

2) Ubica en el plano cartesiano dos puntos a la misma distancia del centro llamados vértices.

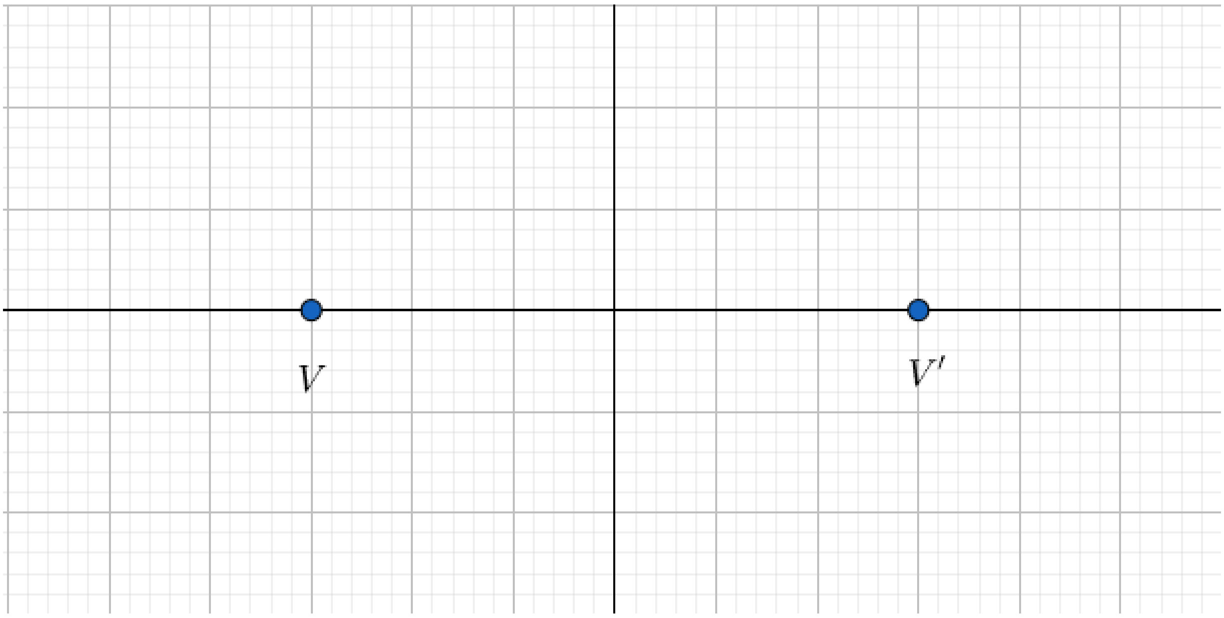


Ilustración 35. Vértices en el plano cartesiano. Elaboración propia.

3) Traza dos puntos a la misma distancia del centro llamados focos.

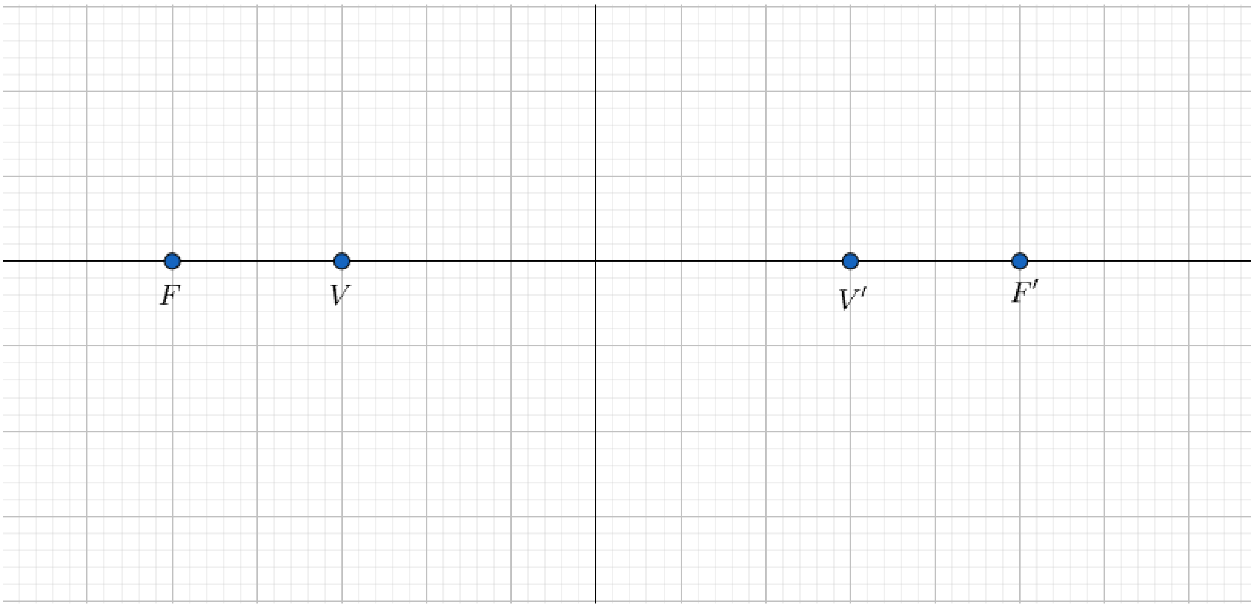


Ilustración 36.Ilustración 35. Focos en el plano cartesiano. Elaboración propia.

4) Traza una circunferencia con radio del centro a uno de los focos.

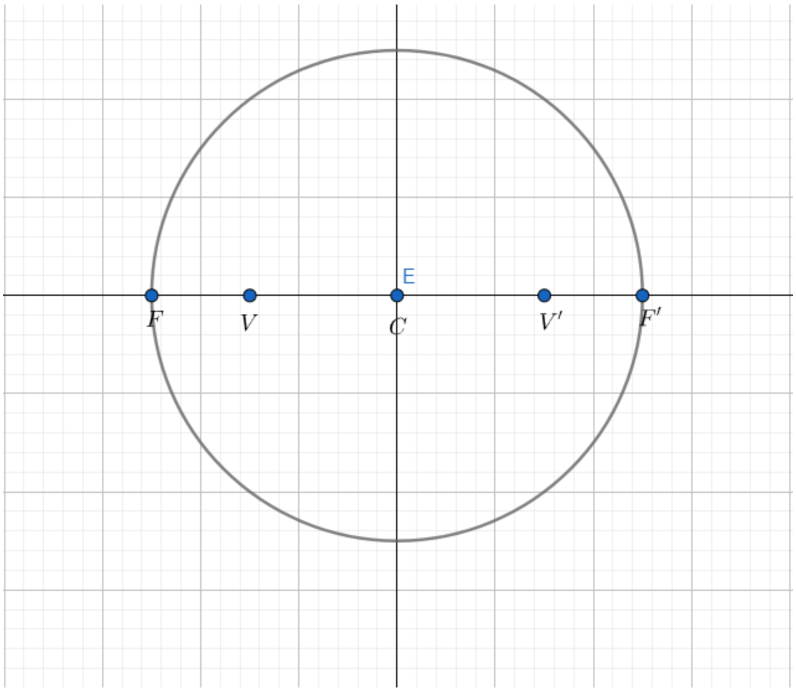


Ilustración 37. Circunferencia con centro ene el origen a uno de los focos. Elaboración propia.

5) Haga dos rectas verticales que pasen por los puntos del vértice.

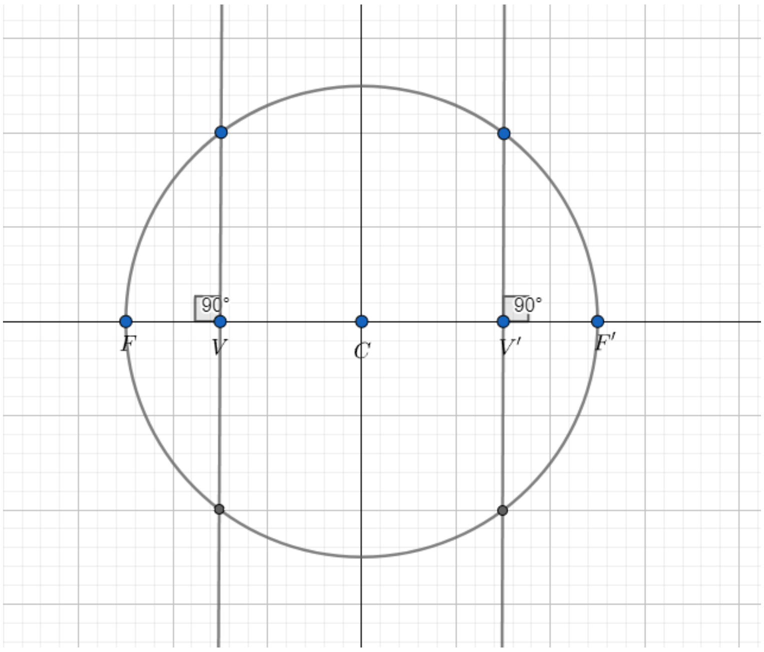


Ilustración 38. Rectas verticales sobre los vertices. elaboración propia.

6) Haga dos rectas horizontales que pase por los puntos que corta las rectas verticales y la circunferencia.

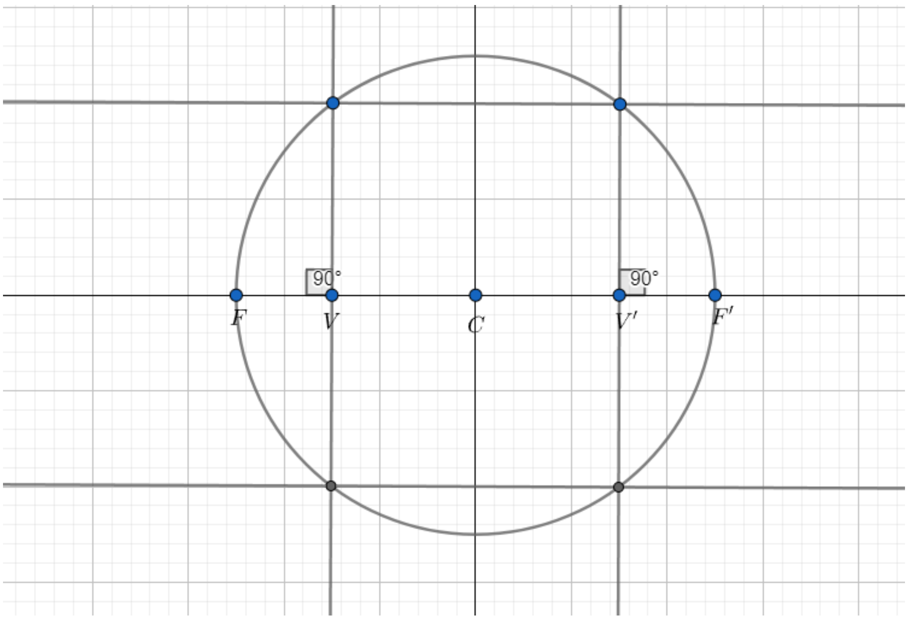


Ilustración 39. rectas horizontales que pase por los puntos que corta las rectas verticales y la circunferencia. Elaboración propia.

7) Trace las diagonales al rectángulo formado dentro de la circunferencia que serán nuestras asíntotas.

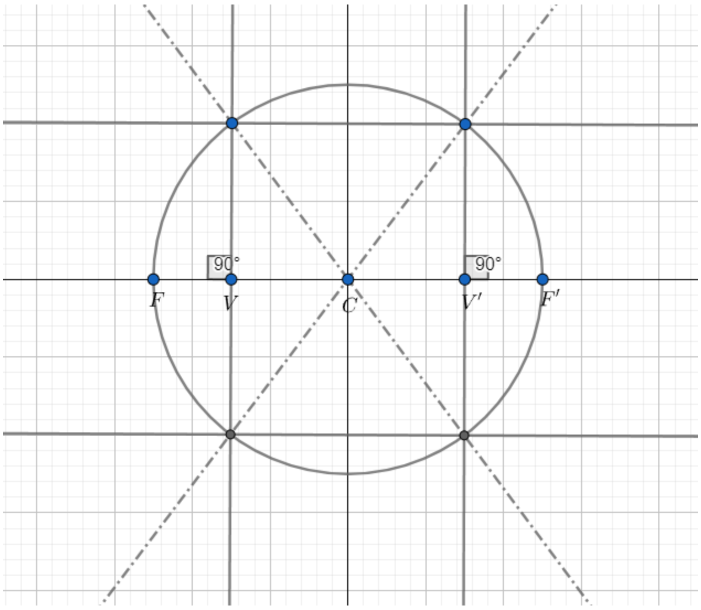


Ilustración 40. diagonales al rectángulo formado dentro de la circunferencia. Elaboración propia.

8) Trazamos nuestra hipérbola y nos quedara da la siguiente manera.

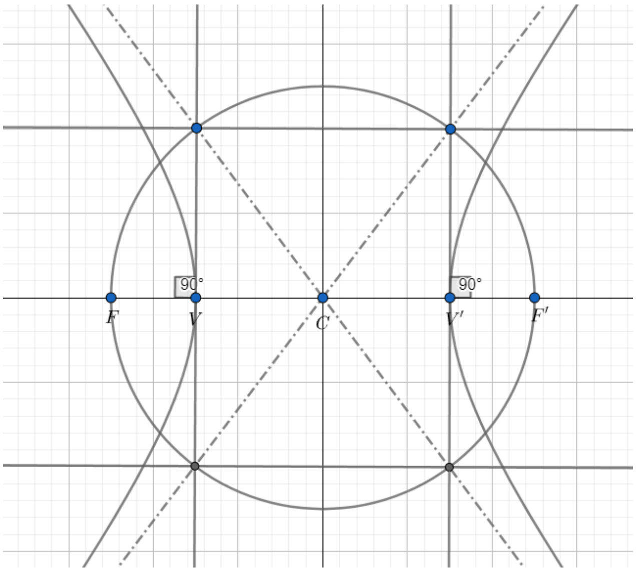


Ilustración 41. Trazado de la hipérbola. Elaboración propia.

9) Borramos la circunferencia y el rectángulo interior y nos quedara las hipérbolas con sus asíntotas.

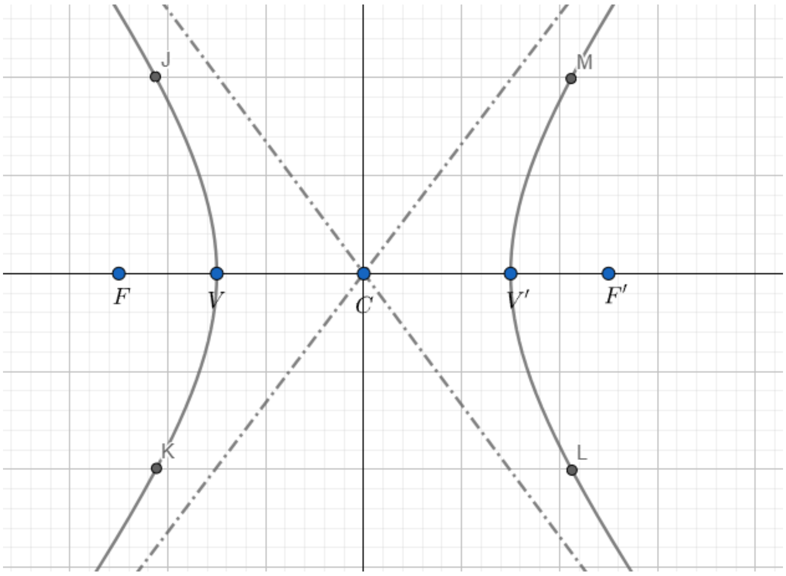


Ilustración 42. Diagonales de la hipérbola. Elaboración propia.

Trazamos las medidas del foco a la hipérbola realizada.

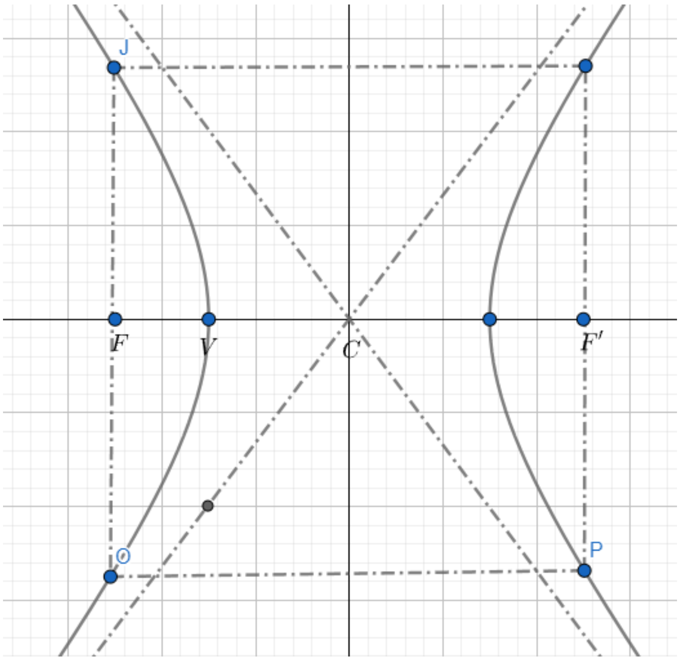


Ilustración 43. hipérbola. elaboración propia.

Asi nos quedaria nuestra hiperbola.

Aprendamos

El eje focal de una hipérbola se encuentra sobre el eje x, sus vértices se encuentran a 4 unidades del centro (0,0) y sus focos a 6 unidades del centro. El valor de b es $\sqrt{20}$. Determina los valores de a y c, y halla la longitud del eje conjugado y del eje transverso.

Como los vértices se encuentran a 4 unidades del centro, entonces

a=4 y c = 6.

La longitud del eje transverso y del eje conjugado es:

Longitud del eje transverso: 2a = (2)(4) = 8 unidades

Longitud del eje conjugado: 2b = (2)($\sqrt{20}$) $\approx 8.94 \approx 9$

La representación gráfica de la hipérbola es:

Para Practicar

Identifica los elementos de cada una de las siguientes hipérbolas

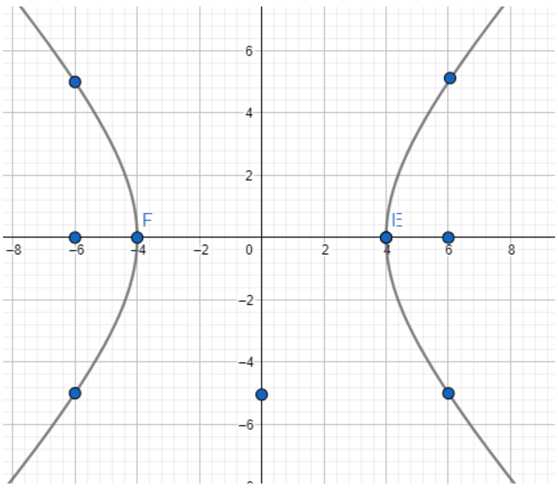


Ilustración 44. Ejercicio 1 de la hipérbola. Elaboración propia.

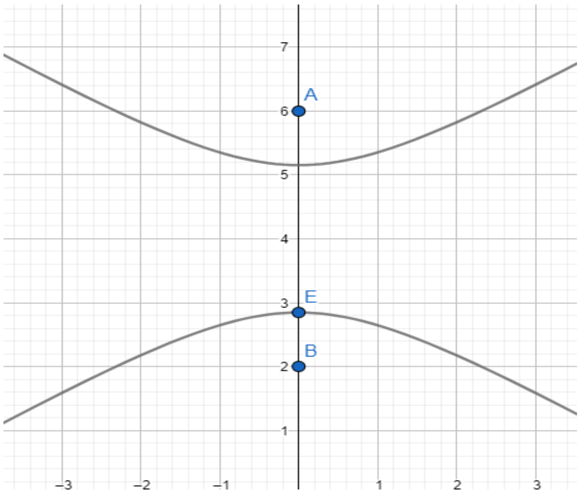


Ilustración 45. Ejercicio 2 de la hipérbola. Elaboración propia.

Ecuación canónica de una hipérbola con centro en el origen

Para obtener la ecuación de la hipérbola se considera el sistema de referencia de la derecha cuyo origen es el centro de la hipérbola, y cuyos ejes de abscisas y ordenadas son el eje focal y el secundario respectivamente. Así, las coordenadas de los focos son: F(c,0) y F´(-c,0)

Si P(x,y) es un punto de la hipérbola, por definición se cumple que:

$$d(P,F) - d(P,F´) = 2a \rightarrow \left|\sqrt{(x-C)^2 + y^2} - \sqrt{(x+C)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Siguiendo el mismo procedimiento dado para la obtención de una elipse, se llega a la siguiente expresión:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Aplicando la relación $b^2 = c^2 - a^2$, se obtiene la ecuación canónica de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Aprendamos

Los vértices de una hipérbola son los puntos V(3,0) y V´(-3,0) y sus focos son F(5,0) y F´(-5,0). Halla su ecuación. La longitud de su eje transverso, la longitud de su eje conjugado y su excentricidad. Realiza su representación grafica

Solución

Como V (3,0) entonces a = 3

Como F (5,0) entonces c = 5

Como $b^2 = c^2 - a^2$, entonces $b^2 = (5)^2-(3)^2 = 16$, de donde b = 4

Como los focos se encuentran sobre el eje x, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$ Por tanto:

Longitud eje transverso: 2a = 2(3) = 6

Longitud eje conjugado: 2b = 2 (4) =8

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} = 1,66 \ldots$

Para practicar

Determina las coordenadas de los vértices y de los focos de cada una de las siguientes hipérbolas, halla su ecuación canónica

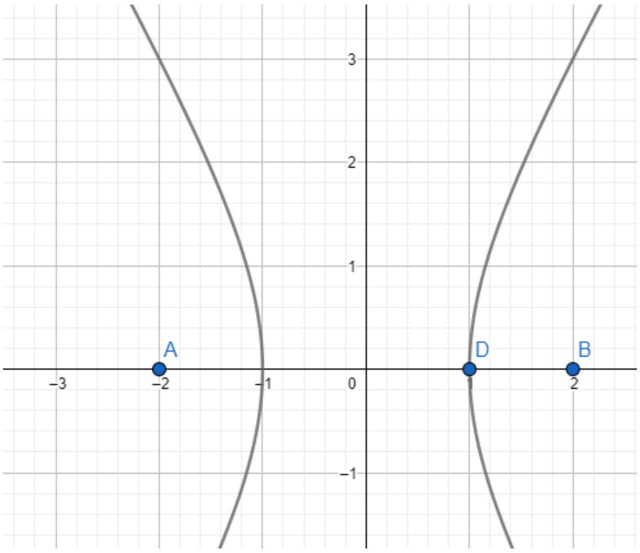


Ilustración 47.Ejercicio 3 de la hipérbola. Elaboración propia.

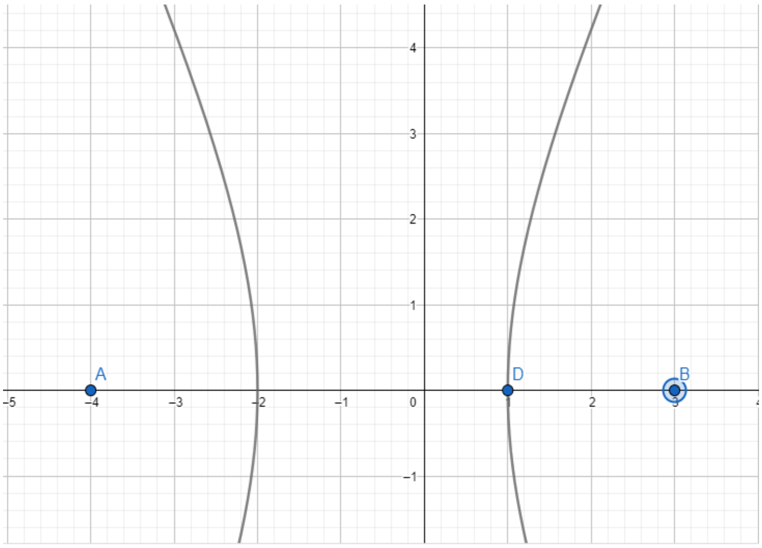


Ilustración 46. Ejercicio 4 de la hipérbola. Elaboración propia.

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO (h, k)

Una hipérbola con sus ejes paralelos a los ejes del sistema de coordenadas y cuyo centro está en cualquier punto (h, k), está determinada por una ecuación que depend4e la ubicación de su eje focal.

CASO 1. Su eje focal es paralelo al eje x.

Ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$b^2=c^2-a^2$$

Centro: C (h, k)

Vértices: V (h + a, k)

V´ (h - a, k)

Focos: F (h + c, k)

F´ (h - c, k)

Asíntotas: $y=\pm\frac{b(x-h)}{a}+k$

CASO 2. Su eje focal es paralelo al eje y.

Ecuación:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$b^2=c^2-a^2$$

Centro: C (h, k)

Vértices: V (h, k + a)

V´ (h, k - a)

Focos: F (h, k + c)

F´ (h, k - c)

Asíntotas: $y = \pm\frac{a(x-h)}{b} + k$

En cualquiera de los dos casos a, b y c son positivos.

Aprendamos

Traza las gráficas de las hipérbolas cuyas ecuaciones son:

$\frac{(y+5)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{25} = 1$ b. $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+5)^2}{25} = 1$

Solución:

La ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{[(y-(-5))]^2}{4^2} - \frac{(x-2)^2}{5^2} = 1$$

Por lo tanto: $h = 2, k = -5, a = 4, b = 5\ y\ c \approx 6.4dz$

Entonces:

V (2, -1) V´ (2, -9) C (2, -5)

F (2, 1, 4) F (2, -11, 4) $y = \pm\frac{4(x-2)}{5} - 5$

La ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{(x-2)^2}{4^2} - \frac{[y-(-5)]^2}{5^2} = 1$$

Por lo tanto: $h = 2, k = -5, a = 4, b = 5 \; y \; c \approx 6.4$

Entonces:

V (6, -5)   V´ (-2, -5)   C (2, -5)

F (8, 4, -5)   F (-4, 4, -5) $y = \pm \frac{5(x-2)}{4} - 5$

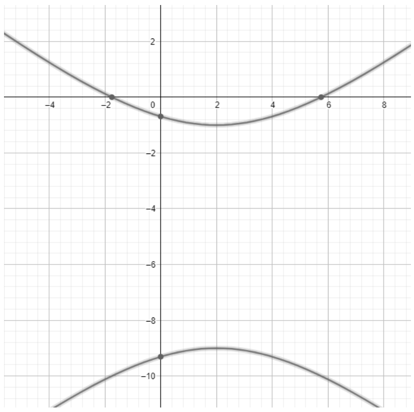


Ilustración 48. Ejemplo de la hiperbola. Elaboración propia.

Para practicar

Dada las siguientes ecuaciones representa las hipérbolas correspondientes

a) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

b) $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$

c) $\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

Ilustración 49. Escáner de la hipérbola en GeoGebra. Elaboración propia.

Recurso interactivo

https://www.geogebra.org/m/puxezpmp

ECUACIÓN GENERAL DE LA HIPÉRBOLA

La ecuación canónica de la hipérbola $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^z}{b^2}=1$ se puede expresar como una ecuación sin denominadores, de la siguiente manera:

Se multiplica cada miembro por $a^2b^2 \rightarrow\ a^2b^2\left|\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^z}{b^2}\right|=1*a^2b^2$

Se resuelve el producto $\rightarrow b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$

Se resuelven los cuadrados y se iguala a 0 $\rightarrow b^2(x^2-2xh+h^2)-a^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$

Se resuelven los productos y se iguala a 0 $\rightarrow b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2-a^2y^2+2a^2ky-a^2k^2-a^2b^2=0$

Como a, b, h y k son constantes la expresión obtenida se puede expresar como:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, donde$$

$$A=b^2,\qquad C=-b^2,\qquad D=-2b^2h,\qquad E=2a^2k,\qquad F=b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2$$

Si la ecuación de la hipérbola es $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^z}{b^2}=1$ la expresión se puede escribir como:

$$b^2y^2-2b^2ky-a^2x^2+2a^2hx+b^2k^2-a^2h^2-a^2b^2=0$$

La cual se reduce a $Cy^2+Ax^2+Ey+Dx+F=0$

Aprendamos

Expresa la ecuación $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{12}=1$ En su forma general

Se multiplica por 4 y por 12 ambos lados de la igualdad

$$(4)(12)\left(\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+4)^2}{12}\right)=1(4)(12)$$

Se resuelve el producto $12(y-2)^2-4(x+4)^2=48$

Se resuelven los cuadrados

$$(12)(y^2-4y+4)-4(x^2+8x+16)=48$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$12y^2-48y+48-4x^2-32x-64=48$$

Se resta 48 en ambos miembros

$$12y^2-48y-4x^2-32x-64=0$$

Se divide ambos miembros entre 4

$$\frac{12y^2-48y-4x^2-32x-64}{4}=\frac{0}{4}$$

Se aplica la división

$$3y^2-12y-x^2-38-16=0$$

Y así se llega a la ecuación general

Para practicar

Expresa las siguientes ecuaciones como fórmula general de la hipérbola

$$\frac{(x-1)^2}{20}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

$$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

Secuencia didáctica #5

la parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos en el plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija l llamada directriz. Así, la parábola está formada por los puntos P que verifican, d(P,F)=d(P,D).

Es decir, si se toma cualquier punto P de la parábola se verifica que la distancia de P al foco F es igual a la distancia P a la directriz l.

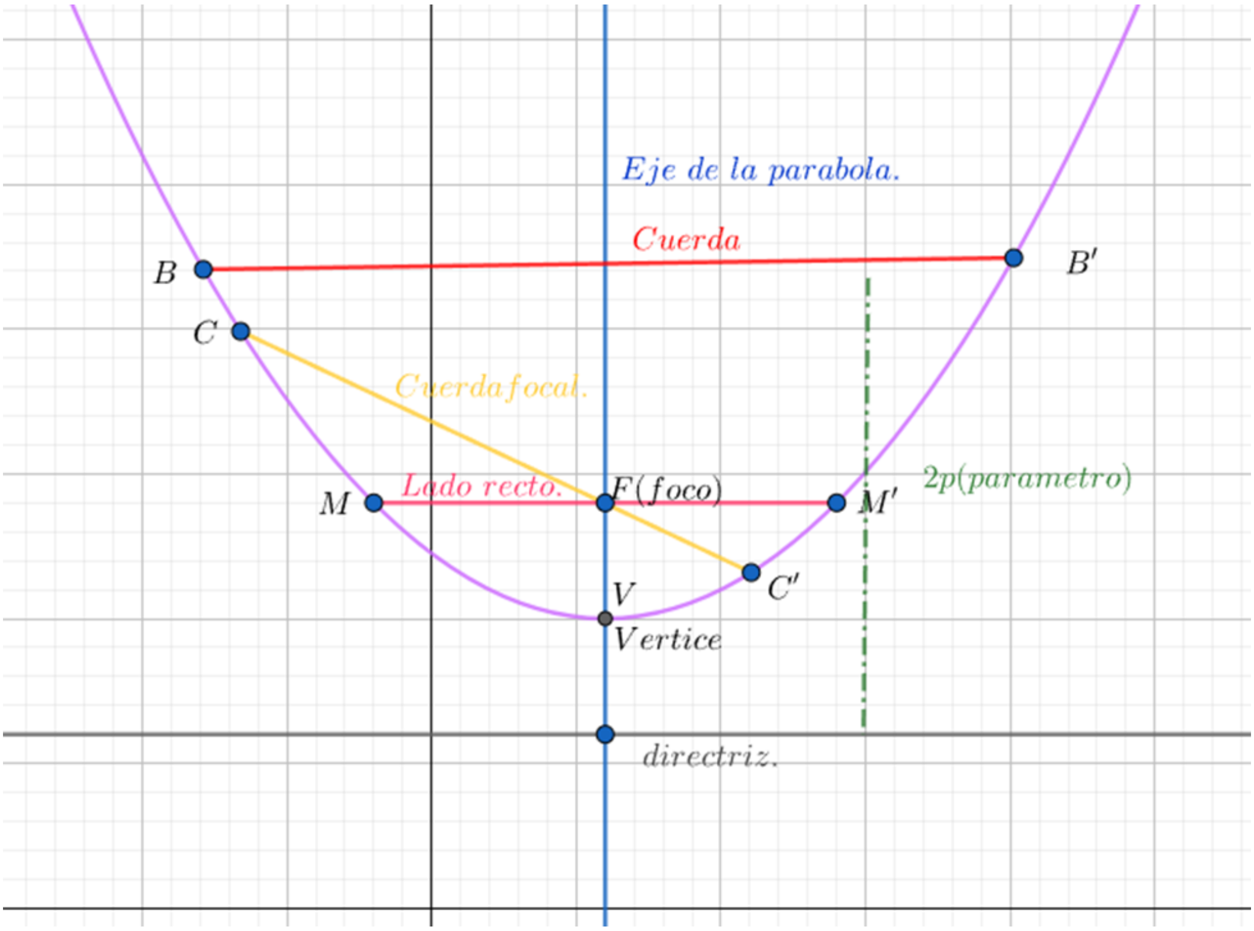


Ilustración 50. Partes de una parábola. Elaboración propia.

Aprendamos.

Realiza la representación gráfica de la parábola cuyo vértice es $v(4,0)$ que tiene como directriz $x = 2$ y que contiene el punto (6,4)

Como la recta $x = 2$ es la directriz y el punto $v(4,0)$ es el vértice entonces $p = 2$. en consecuencia, el foco es el punto $f(6,0)$ ya que de esta forma, la distancia del foco a la directriz es $2p = 4$

De esa forma se obtiene la siguiente gráfica.

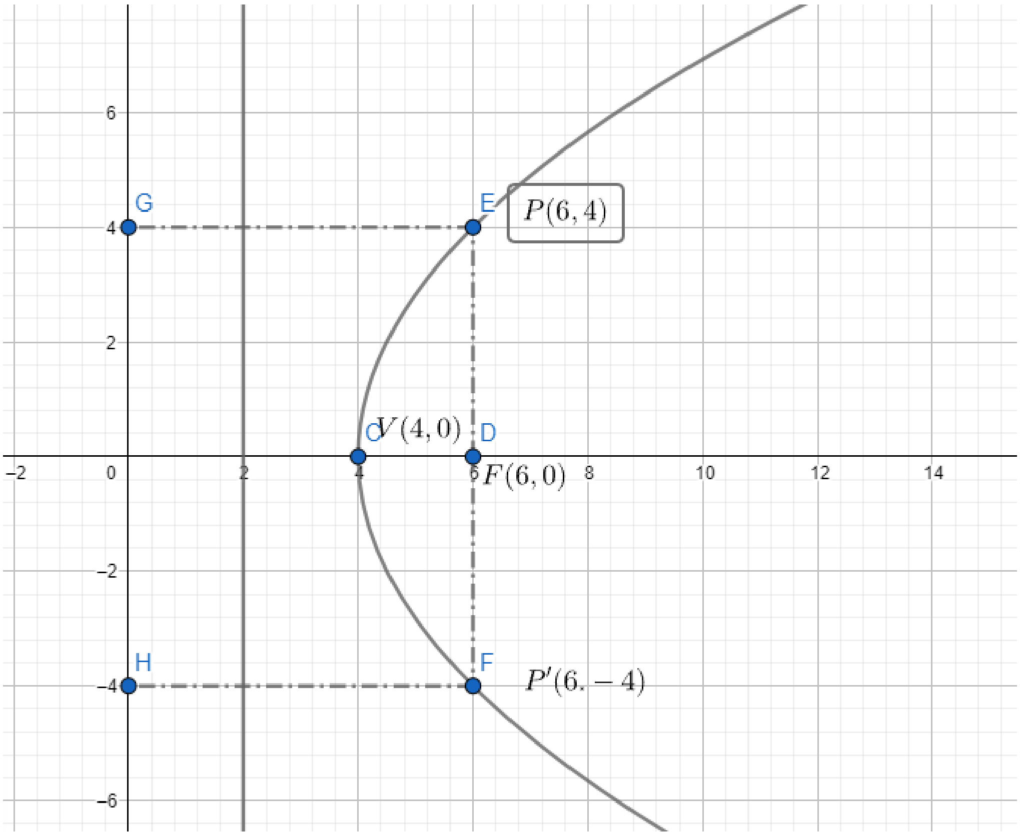


Ilustración 51. Ejemplo de parábola. elaboración propia.

Para practicar.

Identifica los elementos de cada parábola.

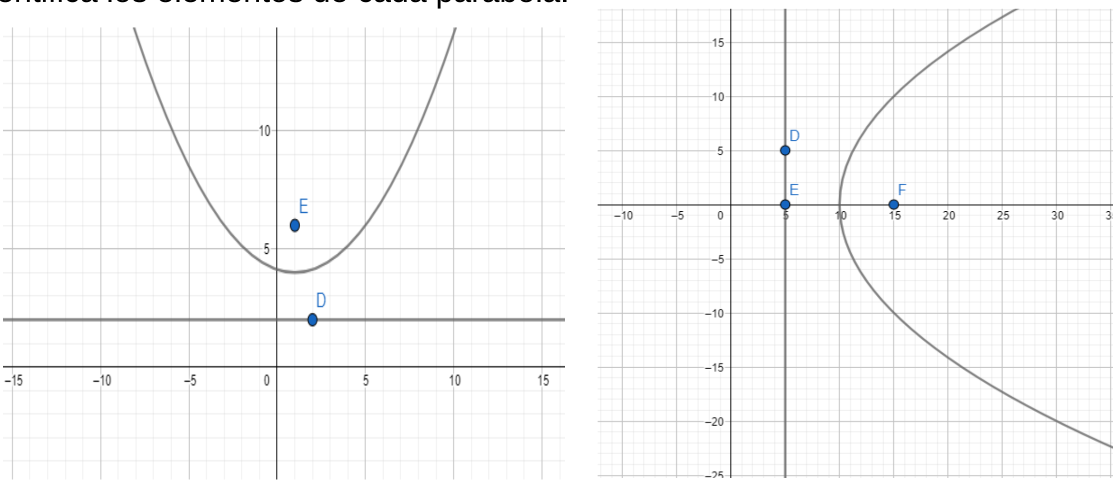


Ilustración 52. Ejercicios de parábola. Elaboración propia.

Ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen.

Debemos tener en cuenta la posición del eje.

Si el eje de la parábola al eje x.

Tenemos que el foco tiene coordenadas $F(p,0)$, la recta de la directriz es igual $x = -p$ y cualquier punto de la parábola es igual $p(x,y)$

Demostración

Por definición de la parábola tenemos que la distancia $\overline{FP} = \overline{PA}$

Utilizando la distancia entre dos puntos:

$$\overline{FP} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$

Solucionando nos quedaría:

$$\overline{FP} = \sqrt{(x-p)^2 + (y)^2}$$

Utilizando la fórmula de la distancia entre un punto y una recta.

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Remplazando tenemos.

$x + p = 0$

$\frac{x + p}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = x + p$

Remplazando en $\overline{FP} = \overline{PA}$

Tenemos

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y)^2} = x + p$$

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + (y)^2}\right)^2 = (x + p)^2$$

$$(x-p)^2 + (y)^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$-2xp + y^2 = 2xp$$

$$y^2 = 2xp + 2xp$$

$$y^2 = 4px$$

Si el eje de la parábola al eje y.

De forma análoga:

$$x^2 = 4py$$

Aprendamos

Realiza la representación gráfica de cada parábola a partir de su ecuación canónica.

a) $y = \frac{1}{4}x^2$

La ecuación $y = \frac{1}{4}x^2$ equivale $x^2 = 4y$.

La expresión $x^2 = 4y$ es de la forma $x^2 = 4py$, con $4p = 4$

Por lo tanto $p = 1$ como $p > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba.

La ecuación de la directriz es $y = -1$

El foco es el punto $(0,1)$

La representación gráfica quedaría.

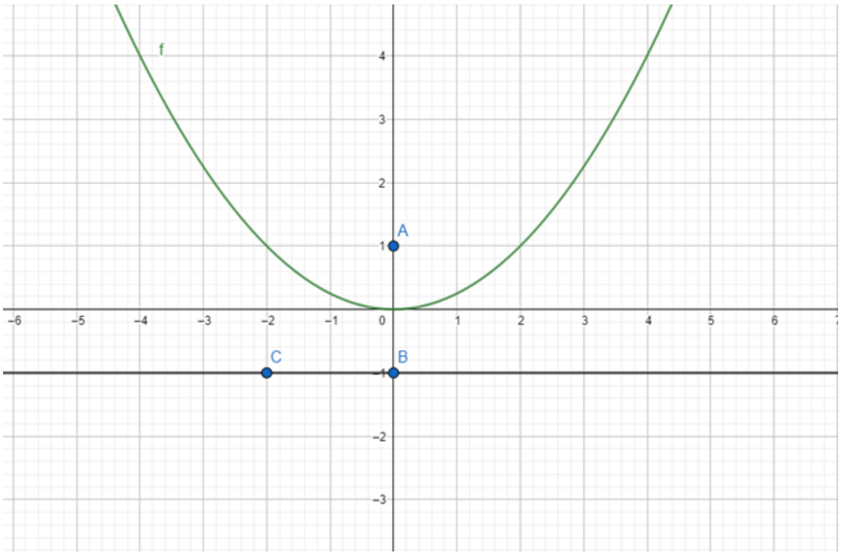


Ilustración 53. Ejemplo 1 de parábola. Elaboración propia.

b) $y = -3x^2$

La ecuación $y = -3x^2$ equivale $x^2 = -\frac{1}{3}y$.

La expresión $x^2 = -\frac{1}{3}y$ es de la forma $x^2 = 4py$, con $4p = -\frac{1}{3}$

Por lo tanto $p = -\frac{1}{12}$ como $p < 0$, entonces la parábola abre hacia abajo.

La ecuación de la directriz es $y = \frac{1}{12}$

El foco es el punto $(0, -\frac{1}{12})$

La representación gráfica quedaría

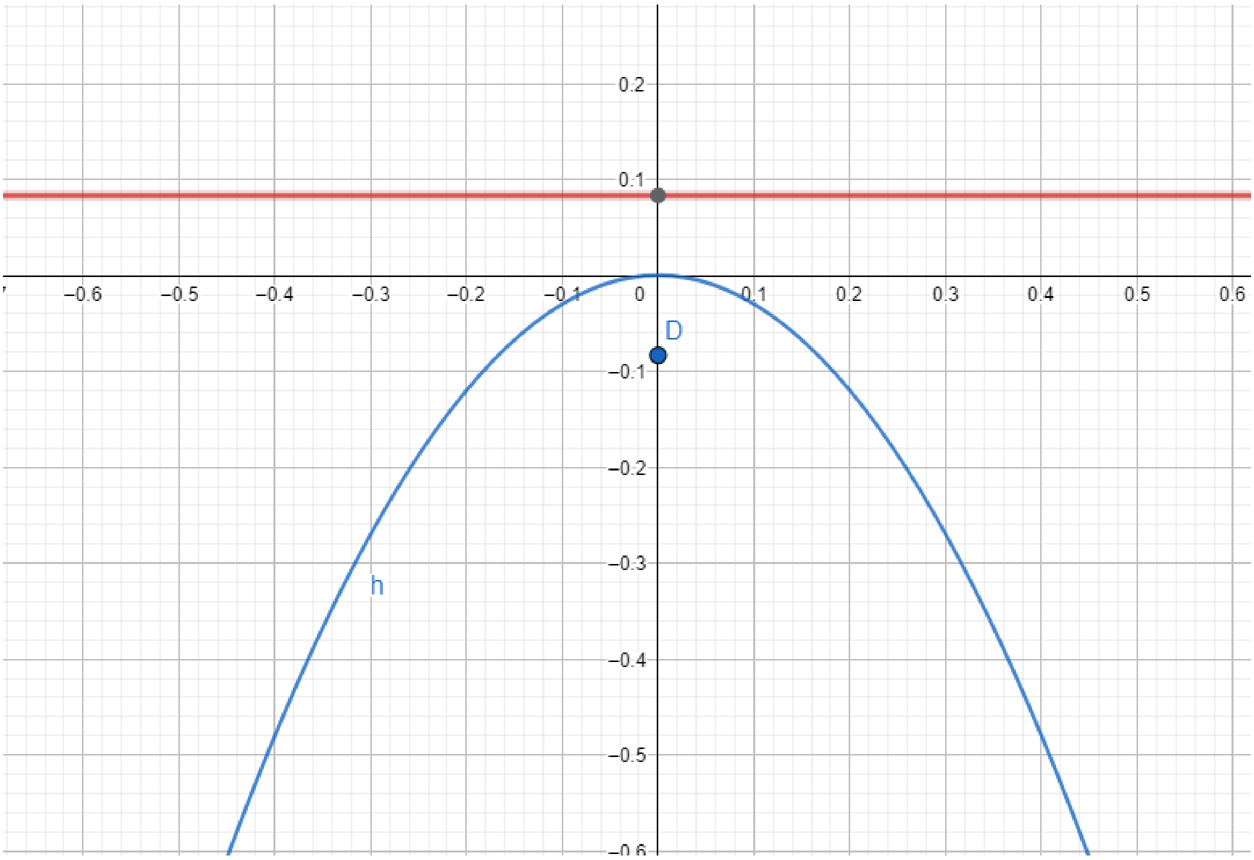


Ilustración 54. Ejemplo 2 de parábola. Elaboración propia.

c) $y^2 = 6x$

La expresión $y^2 = 6x$ es de la forma $y^2 = 4px$, con $4p = 6$

Por lo tanto $p = \frac{3}{2}$ como $p > 0$, entonces la parábola abre a la derecha.

La ecuación de la directriz es $x = -\frac{3}{2}$

El foco es el punto $(\frac{3}{2}, 0)$

La representación gráfica quedaría.

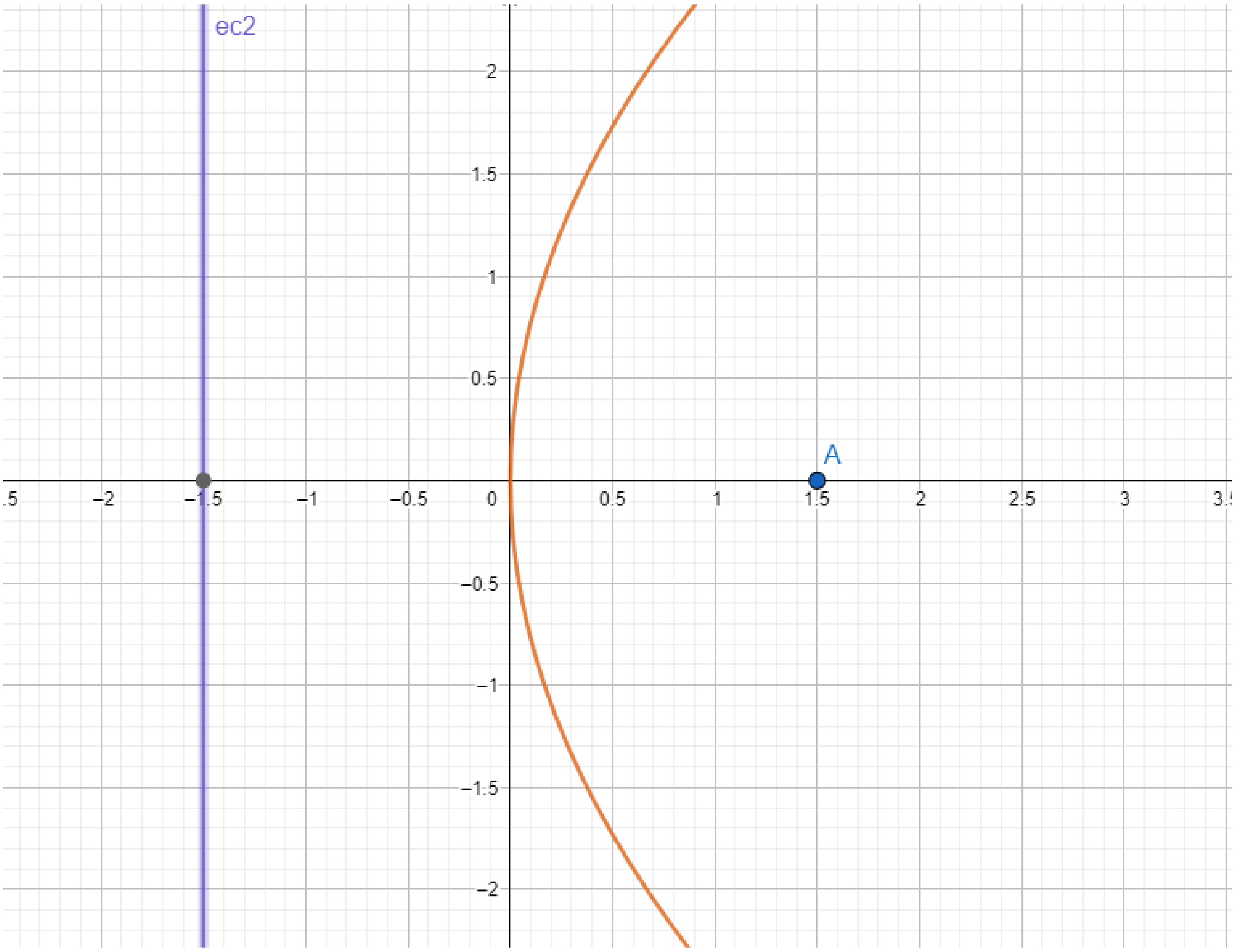


Ilustración 55. Ejemplo3 de parábola. Elaboración propia.

Para practicar

representa gráficamente cada parábola a partir de su ecuación canónica.

a) $y^2 = 6x$

b) $y^2 = \frac{1}{9}x$

c) $x^2 = -18y$

d) $x^2 = \frac{3}{17}y$

Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k)

Tenemos que el foco tiene coordenadas $F(h+p, k)$, la recta de la directriz es igual $x = h - p$ y cualquier punto de la parábola es igual $p(x, y)$

Demostración

Por definición de la parábola tenemos que la distancia $\overline{FP} = \overline{PA}$

Utilizando la distancia entre dos puntos:

$$\overline{FP} = \sqrt{(x - (\mathrm{h} - p))^2 + (y - k)^2}$$

Solucionando nos quedaría:

$$\overline{FP} = \sqrt{(x - (\mathrm{h} - p))^2 + (y - k)^2}$$

Utilizando la fórmula de la distancia entre un punto y una recta.

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

Remplazando tenemos.

$x - (h - p) = 0$

$\dfrac{x - (h - p)}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = x - (h - p)$

Remplazando en $\overline{FP} = \overline{PA}$

Tenemos

$$\sqrt{(x - (\mathrm{h} + p))^2 + (y - k)^2} = x - (h - p)$$

$$\left(\sqrt{(x - (\mathrm{h} + p))^2 + (y - k)^2}\right)^2 = \left(x - (h - p)\right)^2$$

$$(x-(\mathrm{h}+p))^2+(y-k)^2=\left(x-(h-p)\right)^2$$

$$x^2-2x(h+p)+(h+p)^2+(y-k)^2=x^2-2x(h-p)+(h-p)^2$$

$$x^2-2xh-2xp+h^2+2hp+p^2+(y-k)^2=x^2-2xh+2xp+h^2-2hp+p^2$$

$$-2xp+2hp+(y-k)^2=+2xp-2hp$$

$$(y-k)^2=+2xp+2xp-2hp-2hp$$

$$(y-k)^2=4xp-4hp$$

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

Si el eje de la parábola al eje y.

De forma análoga:

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

Aprendamos

Halla la ecuación canónica de la parábola cuyo vértice es el punto (2,4) y cuyo foco es (2,-2)

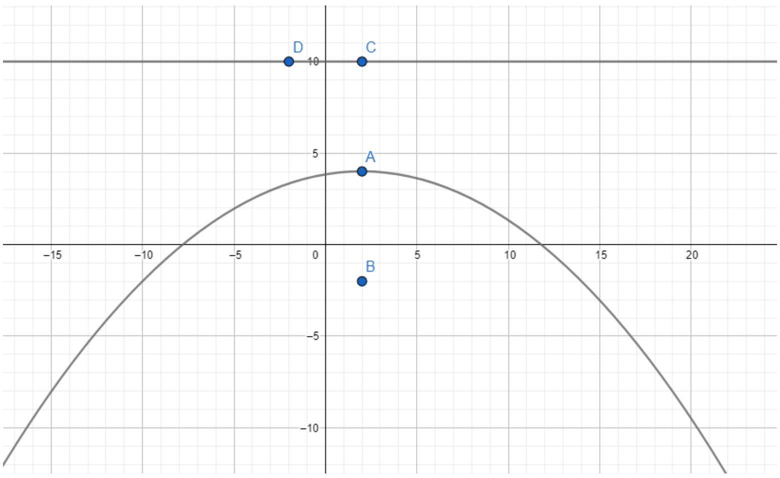


Ilustración 56. Ejemplo 4 de parábola. Elaboración propia.

El vértice es $v(2{,}4)$ y el foco $f(2,-2)$ pertenecen a la recta $x=2$. Este el eje de la parábola. Por lo tanto la ecuación es de la forma $(x-h)^2=4p(y-k)$

Para determinar el valor de p se halla la longitud del segmento comprendido entre el foco y el vértice, que corresponde a $p = |4-(-2)| = |6| = 6$ como parábola abre hacia abajo, $p < 0$. Por tanto $p = -6$

Remplazando el valor de p y las coordenadas del vértice en la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ se obtiene:

$$\left(x-(2)\right)^2 = 4(-6)\left(y-(4)\right)$$

$$(x-2)^2 = -24(y-4)$$

Como el vértice es el punto medio entre el foco y el punto A donde se corta la directriz con el eje focal, entonces $A(2,10)$. Por tanto la directriz es $y = 10$

Para practicar

Escribe la ecuación canónica de cada parábola, considerando que V es el vértice y F es el foco.

a) $v(-2,2), f(5,2)$

b) $v(7,1), f(3,1)$

c) $v(2,1), f(2,3)$

d) $v(4,2), f(4,6)$

Ecuación general de la parábola.

Tomando la ecuación canónica de la parábola.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Desarrollamos el cuadrado y aplicamos distributiva.

$$y^2 - 2yk + k^2 = 4px - 4ph$$

Igualamos a 0 toda la ecuación.

$$y^2 - 2yk + k^2 - 4px + 4ph = 0$$

Organizando nos quedaría:

$$y^2 - 2yk - 4px + k^2 + 4ph = 0$$

Como $p, h\ y\ k$ son valores contante la ecuación se reduce a

$$D = -4p \qquad E = -2k \qquad F = k^2 + 4ph$$

Remplazando nos quedaría:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta expresión se denomina ecuación general de la parábola.

Aprendamos.

Halla la ecuación general de la parábola cuyo vértice es el punto $v(3{,}4)$y el foco es $f(3{,}5)$.

Se determina la ecuación canónica y luego se expresa de forma general p=2.

En este caso será

$$(x-3)^2 = 4(2)(y-4)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8(y - 4)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 32$$

$$x^2 - 6x - 8y + 9 + 32 = 0$$

$$x^2 - 6x - 8y + 41 = 0$$

Para practicar

Halla la ecuación general de la parábola en cada caso.

a) Foco (0,-3) Directriz y=3

b) Foco (4,0) Directriz x=-4

c) Foco (0,2/3) Directriz y=-2/3

d) Foco (-3,0) Directriz x=3

Recurso interactivo.

https://www.geogebra.org/m/wm79fehx

Ilustración 57. Escáner de la parábola desde GeoGebra. elaboración propia.

La anterior secuencia didáctica nos permite nos permite el desarrollo del pensamiento tanto geométrico como numérico, donde podemos comprender y aplicar conceptos matemáticos en un espacio geométrico. Esto fortalece su capacidad para analizar problemas y encontrar soluciones de manera lógica y precisa.

Se logra una conexión con la parte tecnológica con el software GeoGebra ya que hay una estrecha relación y es una buena herramienta para el aprendizaje de las secciones cónicas y analizar las diferencias, las partes y las propiedades de cada una (Circunferencia, elipse, parábola e hipérbola)

La anterior cartilla permite el desarrollo razonamiento lógico, la resolución de problemas, la capacidad de comunicar ideas matemáticas y la perseverancia. Estas habilidades son valiosas en diversos aspectos de la vida y en futuras carreras profesionales.

En conclusión esta cartilla es de apoyo para la enseñanza-aprendizaje de las secciones cónicas estimular el pensamiento analítico, fomentar el razonamiento espacial, preparar a los estudiantes para las disciplinas STEM, conectar con la tecnología y desarrollar habilidades transferibles. Su aprendizaje brinda una base sólida para el éxito académico y profesional en diversas áreas.

6. CONCLUSIONES.

En conclusión, se logró la creación de una cartilla basada en la enseñanza para la comprensión en el tema de las secciones cónicas llamada: “cartilla para la enseñanza de las secciones cónicas”. La cual representa un avance significativo en el estudio de la geometría analítica, ya que el profesor cuenta con una secuencia didáctica para el desarrollo del tema. Esta cartilla ha sido diseñada con el objetivo de fortalecer y mejorar la actitud de los estudiantes hacia la geometría analítica, al tiempo que promueve un enfoque más positivo y motivador hacia la materia.

La cartilla se destaca por su enfoque progresivo en el desarrollo de los conceptos, utilizando demostraciones gráficas y formales para garantizar una comprensión completa de las secciones cónicas. Además, la integración de diferentes modalidades de aprendizaje, como elementos visuales y textuales, enriquece la experiencia de aprendizaje y facilita la comprensión de los conceptos.

La inclusión de ejercicios al final de cada sección brinda a los estudiantes la oportunidad de poner en práctica lo aprendido, fortaleciendo sus habilidades y consolidando su comprensión de las secciones cónicas. Esta práctica aplicada fomenta la transferencia de conocimientos y habilidades a situaciones reales, preparando a los estudiantes para resolver problemas relacionados con este tema.

Además, la cartilla también es una herramienta valiosa para los docentes, ya que les proporciona una guía estructurada para enseñar las secciones cónicas y evaluar el progreso de los estudiantes. Al utilizar esta cartilla, los docentes pueden ofrecer una enseñanza más efectiva y personalizada, adaptándose a las necesidades individuales de los estudiantes.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Granados-Ortiz, C. A., & Padilla-Escorcia, I. A. (2021). El aprendizaje gráfico de la recta tangente a través de la modelación de las secciones cónicas utilizando GeoGebra. *Revista científica*, (40), 118-132.

Rojas Sepúlveda, O. A. Implementación del currículo bimodal para la enseñanza de las secciones cónicas con estudiantes de grado décimo del colegio Estanislao Zuleta IED.

Lehmann, C. H. (1989). *Geometría analítica*. Editorial Limusa.

Gonzalez, I. (2000). *Matemática Emocional.* Madrid : Narcea S.A. de ediciones.

Moreno., A. T. (2022). Mejoramiento de actitudes hacia la geometría analítica de la circunferencia mediado por la enseñanza para la comprensión. Fusagasugá, Colombia. : Universidad de Cundinamarca. .

Lepineux-Arias, C. A. (2021). Fortalecimiento de los Procesos de Pensamiento Matemático y Geométrico de las Secciones Cónicas en Estudiantes de Grado Décimo a Través de las Aplicaciones Móviles.

Escalante Gómez, E., Repetto, A. M., & Mattinello, G. (2012). Exploración y análisis de la actitud hacia la estadística en alumnos de psicología. *Liberabit*, *18*(1), 15-26.

Eagly, A. y Chaiken, S. (1998). Estructura de actitud. *Manual de psicología social*, *1*, 269-322.

Cárdenas Mansilla, C. S. (2008). Identificación de tipologías de actitud hacia las matemáticas en estudiantes de séptimo y octavo grados de educación primaria. *Perfiles educativos*, *30*(122), 94-108.

Sabater, J. M. (1989). Sobre el concepto de actitud. In *Anales de pedagogía* (No. 7).

Flores López, W. O., & Auzmendi Escribano, E. (2017). Actitudes hacia las matemáticas en la enseñanza universitaria y su relación con las variables género y etnia.

Gonzalez, I. (2000). *Matemática Emocional*. Madrid : Narcea S.A. de ediciones.

Edgar, Oliver. Cardoso. Espinosa., María, Trinidad. Cerecedo. Mercado., & José, Roberto. Ramos. Mendoza. (2012). Actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes de posgrado en administración: un estudio diagnóstico. *Rexe. Revista De Estudios Y Experiencias En Educación*.

Estrada Roca, M. A., & Díez Palomar, F. J. (2011). Las actitudes hacia las Matemáticas. Análisis descriptivo de un estudio de caso exploratorio centrado en la Educación Matemática de familiares. *Revista de investigación en educación, 2011, núm. 9, vol. 2, p. 116-132*.

Albarracín, D., Johnson, B. T. y Zanna, M. P. (2014). *El manual de actitudes*. Prensa Psicología.

Cantero, J. M. M. (2006). DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA MEDIR LAS ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS ENALUMNOS DE ESO.

Cabas, D. M., de Durán, J. A., Reyes, L. M., & Leal, M. (2010). Actitud investigativa en estudiantes de pregrado: indicadores conductuales, cognitivos y afectivos. *Multiciencias*, *10*, 254-258.

Crismán Pérez, R., & Núñez Vázquez, I. (2020). Las actitudes lingüísticas de estudiantes universitarios extranjeros de ELE hacia la modalidad lingüística andaluza. Componentes cognitivos, afectivos y conductuales.

Bazán, J., & Sotero, H. (1998). Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM. In *Anales Científicos UNALM* (Vol. 36, pp. 60-72).

Meza-Cascante, L. G., Agüero-Calvo, E., Suárez-Valdés-Ayala, Z., Calderón-Ferrey, M., Sancho Martínez, L., Pérez-Tyteca, P., & Monje Parrilla, J. (2019). Actitud hacia la matemática: percepción de la actitud de padres. *Comunicación*, *28*(1), 4-15.

Boulos, P., & de Camargo, I. (1987). Geometria analítica. *CEP*, *4533*, 004.
Bompiani, E. (1958). *Geometria analitica*. Universidad Nac. del Litoral.
Fernández-Nieto, E. L. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería*, *6*(1), 33-61.
Pérez, W. (2017). *Análisis Pruebas Saber en Matemáticas Grado Tercero de Básica Primaria Institución Educativa Oficial Gabriel García Márquez, San Carlos de Guaroa-Meta* (Doctoral dissertation, Corporación Universitaria Minuto de Dios).
Sainz Avia, J., & Valderrama, F. (1992). *Infografía y arquitectura: dibujo y proyecto asistidos por ordenador*. Editorial Nerea.
Pinto, H. D. (2016). El plano cartesiano, una idea sencilla cuyo desarrollo llevó dos milenios.

Pickover, C. A. (2002). *El prodigio de los números*. Ediciones Robinbook.

Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática. Volumen 1. La matemática en la antigüedad.+

Caycedo Narváez, C. A. (2013). *Arquímedes y las cuadraturas* (Doctoral dissertation, UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA).

Pinto, H. D. (2016). El plano cartesiano, una idea sencilla cuyo desarrollo llevó dos milenios.

Pérez Bernal, R. (2011). *Una propuesta de enseñanza aprendizaje para la construcción y aplicación de las cónicas* (Doctoral dissertation).

Escobar, N. (2012). Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica.

Ramírez-Galarza, A. I., & Sienra-Loera, G. (2000). *Invitación a las geometrías no euclidianas*. UNAM.

Ríos, J. C. L. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos*. Pontificia Universidad Catolica del Peru (Peru).

Grau, L. T., & Francés, J. F. V. (2012). *Geometría moderna para Ingeniería*. Editorial Club Universitario.

Carvajal, & Centeno. (2016). *Secuencias didacticas 10.* libros y libros S.A.

Hohenwarter, M. (2002). *Geogebra*. Obtenido de Geogebra: https://www.geogebra.org/?lang=es