

**SIMULACIÓN DEL PROCESO DE DIGESTIÓN ANAERÓBICA
COMO UN INSUMO PARA EL DISEÑO DE UN
BIODIGESTOR EN LA PLAZA DE MERCADO DE LA CIUDAD
DE FUSAGASUGÁ**

Autor

Cristian Alberto Arenas Trujillo

Universidad de Cundinamarca

Ingeniería Electrónica

Facultad de Ingeniería

Fusagasugá, Colombia

2020

SIMULACIÓN DEL PROCESO DE DIGESTIÓN ANAERÓBICA COMO UN INSUMO PARA EL DISEÑO DE UN BIODIGESTOR EN LA PLAZA DE MERCADO DE LA CIUDAD DE FUSAGASUGÁ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de ingeniero electrónico, auxiliar de investigación proyecto N.66161 Minciencias convocatoria 829

Autor
Cristian Alberto Arenas Trujillo

Director:
Dr. Ing. Andrés Felipe Guerrero G

Asesores:
PhD. Ing. Walter Naranjo L
Msc. Ing. Humberto Numpaque L

Línea de Investigación
Transformación de Energías

Universidad de Cundinamarca
Ingeniería Electrónica
Facultad de Ingeniería
Fusagasugá, Colombia
2020

RESUMEN

Las energías renovables han tenido un incremento considerable en las últimas décadas debido a la demanda energética de las poblaciones [1], por ello se han tenido que crear alternativas tales como el uso de: energía fotoeléctrica, energía eólica, energía termoeléctrica, biomasa [2], entre otras. Una alternativa energética que ha tenido auge en los últimos años es el biogás [2], producido a partir de la descomposición de RSO en un proceso de digestión anaeróbica.

En el diseño e implementación de un biodigestor se busca maximizar la producción de biogás. Para esto es necesario indagar acerca de desarrollos experimentales previos e implementar modelos matemáticos del sistema de digestión anaeróbica.

En el marco del proyecto “Prototipo de sistema de generación de energía eléctrica a partir de residuos sólidos orgánicos de la plaza de mercado del municipio de Fusagasugá” se requiere plantear un modelo del proceso de digestión anaeróbica y una simulación con el fin de tener una base para el diseño e implementación de un biodigestor que se ubicará en la plaza de mercado en la ciudad de Fusagasugá.

Como resultado en el presente trabajo de grado se seleccionó un modelo basado en el balance de masas, cinética de crecimiento bacteriano y equilibrio electroquímico, se solucionaron las ecuaciones diferenciales mediante un método numérico, se realizó una simulación del modelo y se analizó su estabilidad mediante un método de análisis no lineal. A partir de los resultados encontrados se determinaron los factores predominantes para la producción de metano y se establecieron recomendaciones para el diseño del prototipo de biodigestor que se implementará en la plaza de mercado de la ciudad de Fusagasugá.

Contenido

RESUMEN	4
1. Capítulo 1. Contexto.....	8
2. Capítulo 2. Objetivos.....	9
3. Capítulo 3. Marco de referencia	10
3.1. Estado del arte	10
3.2. Fundamentos teóricos.....	13
3.2.1. AMOCO O AM2.....	14
3.2.2. Runge – Kutta de cuarto orden multivariable	16
3.2.3. Espacios de estado	17
3.2.4. Teorema de estabilidad según Lyapunov	18
4. Capítulo 3. Metodología	21
5. Capítulo 4. Desarrollo matemático.....	22
5.1. Establecimiento del sistema de ecuaciones en espacio de estado.....	22
5.2. Solución del modelo mediante Runge – Kutta de cuarto grado	25
5.3. Análisis de estabilidad mediante el teorema de Lyapunov	26
6. Capítulo 5. Simulación y software	30
6.1. Simulación del modelo AMOCO.....	31
6.2. Simulación comparativa del modelo AMOCO	34
7. Capítulo 6. Plan de trabajo y análisis de resultados	36
7.1. Plan de trabajo	36
7.2. Análisis de resultados	38
8. Capítulo 7. Conclusiones.....	39
9. Presupuesto.....	41
10. Referencias	42
Apéndice 1: Tablas.....	45

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Diagrama del proceso de digestión anaeróbica, figura tomada del manual ADM1 [6]	11
Figura 2. Diagrama de árbol de los modelos encontrados, creación propia	11
Figura 3. Proceso metodológico del proyecto, creación propia	21
Figura 4. Comprobación del error relativo porcentual de los diferentes métodos numéricos, figura tomada de [25] capítulo 25, sección 3	25
Figura 5. Comportamiento de las diferentes variables de estado del proceso de DA graficadas hasta su punto de estabilidad	32
Figura 6. Comportamiento de las variables de salida qCH_4, qCO_2 y pH	33
Figura 7. Comportamiento de algunas variables del modelo AMOCO bajo el parámetro de heterogeneidad	33
Figura 8. Comportamiento de la producción de metano bajo el parámetro de heterogeneidad.....	34
Figura 9. Comportamiento de las variables de estado, las líneas azules son las respuestas del modelo propuesto por Machado y las líneas naranjas son las soluciones por el modelo puesto en el presente trabajo.....	34

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Determinación del sistema en función a los valores propios de la matriz jacobiana, tabla tomada de [28].....	20
Tabla 2. Valor de coeficientes, constantes y valores iniciales. Datos tomados de la literatura consultada.	31
Tabla 3. Actividades del proyecto.....	37
Tabla 4. Presupuesto del proyecto de Minciencias.....	41
Tabla 5. Rubros utilizados para la elaboración del presente trabajo	41
Tabla 6. Variables, coeficientes y constantes presentadas en el proceso de DA según el modelo AMOCO.	46

1. Capítulo 1. Contexto

En el proyecto denominado “Prototipo de sistema de generación de energía eléctrica a partir de residuos sólidos orgánicos de la plaza de mercado del municipio de Fusagasugá” se pretende diseñar e implementar un biodigestor continuo el cual aportará energía eléctrica a la plaza de mercado de la ciudad de Fusagasugá. En la generación de una planta de digestión anaeróbica existen muchos factores a tratar, factores tales como: la temperatura, el pH, la velocidad de mezcla del sustrato; estos factores están estrechamente relacionados con variables como la población bacteriana acidogénica y metanogénica, concentración de aminoácidos, proteínas, lípidos y ácidos grasos volátiles (AGV), entre otras.

Es necesario desarrollar cuatro etapas para la implementación del biodigestor: modelado, simulación, diseño e implementación. En este trabajo de grado se hará énfasis en las primeras dos etapas. En el marco del proyecto mencionado con anterioridad se requiere un modelo matemático y una simulación del proceso de digestión anaeróbica teniendo en cuenta variables bioquímicas, variables biológicas y variables fisicoquímicas; todo esto con el fin de determinar los parámetros iniciales para la elaboración de un biodigestor continuo. A continuación, se presentan las variables que se deben considerar:

Variables bioquímicas: concentración de aminoácidos, proteínas, carbohidratos, ácidos grasos. Variables biológicas: tasa de crecimiento de las bacterias acidogénicas y tasa de crecimiento de las bacterias metanogénicas. Variables fisicoquímicas: pH, temperatura, rapidez de agitación, concentración de metano en el biogás, concentración de dióxido de carbono en el biogás, volumen de biogás, carbono inorgánico y alcalinidad.

Por lo anteriormente mencionado se proponen tres etapas; en la primera se ejecuta una revisión bibliográfica de los modelos de digestión anaeróbica y se establece el modelo que tiene mayor correspondencia con resultados experimentales encontrados en la literatura. Luego de ello se implementa una solución numérica del modelo previamente establecido y por último se implementan algoritmos para simulación y se analizan los parámetros que intervienen en el proceso de digestión anaeróbica.

Los resultados que se obtendrán son insumos para el diseño del prototipo industrial del biodigestor que se implementará en la plaza de mercado de Fusagasugá – Cundinamarca.

2. Capítulo 2. Objetivos

2.1. OBJETIVO GENERAL

Analizar el comportamiento dinámico de un biodigestor anaeróbico continuo mediante aplicación de herramientas matemáticas que permitan determinar los parámetros predominantes en la producción de metano.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Realizar una revisión crítica de los modelos dinámicos del proceso de digestión anaeróbica con el fin de establecer el de mayor correspondencia con resultados experimentales reportados en la literatura.
2. Implementar un método de resolución numérica que establezca solución de las ecuaciones del modelo dinámico del proceso de DA.
3. Simular un modelo dinámico del proceso de DA con el fin de analizar el comportamiento de los parámetros que intervienen en la producción de metano.

3. Capítulo 3. Marco de referencia

3.1. Estado del arte

En el mundo se están utilizando diferentes modelos para la obtención de energía eléctrica a partir de residuos sólidos orgánicos [2], esto se debe a que el uso energético de las ciudades incrementa con el tamaño de las poblaciones. El proceso de digestión anaeróbica (DA) es uno de estos métodos, a partir de los residuos sólidos se genera biogás que posteriormente alimentará un generador eléctrico [1].

La digestión anaeróbica es un proceso bioquímico, mediante la acción de diferentes tipos de bacterias se produce biogás ($\text{CH}_4 + \text{CO}_2 + \text{H}_2$) a partir de los residuos sólidos orgánicos [3][4].

La primera etapa del proceso de digestión anaeróbica es la hidrólisis, esta consiste en fraccionar las grandes partículas de los componentes orgánicos en partículas más pequeñas, en esta etapa se hidrolizan los compuestos de mayor peso molecular por medio de enzimas como lo son las amilasas y proteasas, particularmente se digieren los polímeros como los polisacáridos, lípidos, ácidos nucleicos y proteínas formándose oligómeros y monómeros [4][5]. En la segunda etapa se lleva a cabo la acidogénesis que transforma oligómeros y monómeros en ácidos grasos volátiles (AGV), ácidos tales como: propiónico, butírico y valérico [5][4]. En la tercera etapa, la etapa acetogénica, se transforman los AGV en ácido acético (también acetato y formiato)[5]. Por último, en la cuarta etapa, las bacterias metanogénicas acetoclastas transforman las sustancias anteriores en metano (CH_4), y dióxido de carbono (CO_2). También participan en esta etapa bacterias de tipo hidrogenotróficas que mantienen en equilibrio del hidrógeno (H_2) en el medio utilizándolo para reducir el CO_2 a CH_4 [5]. En la Figura 1 se presenta gráficamente el proceso de digestión anaeróbica con sus tasas de conversión según la International Water Association (IWA).

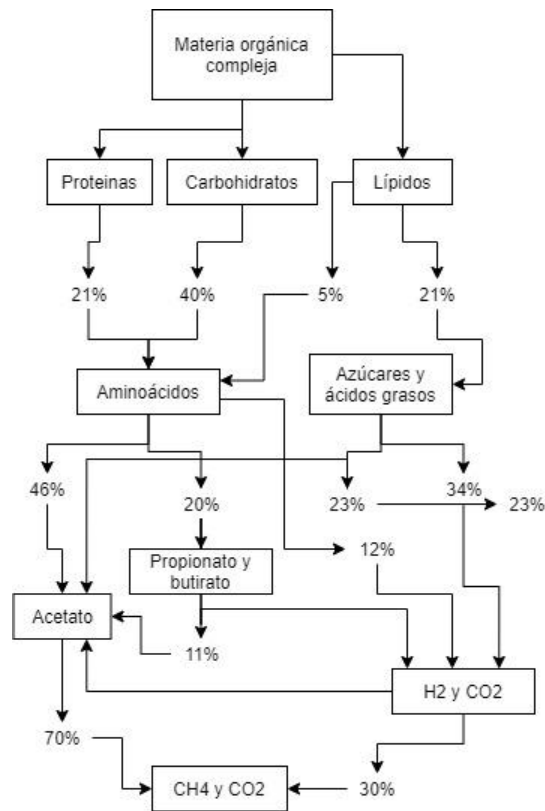


Figura 1. Diagrama del proceso de digestión anaeróbica, figura tomada del manual ADM1 [6]

Considerando la complejidad de las relaciones entre los parámetros del proceso de DA, diversos autores han propuesto modelos matemáticos que representan su comportamiento. En la Figura 2 se evidencia un conjunto de 11 modelos derivados del Anaerobic Digestion Model #1 (ADM1)

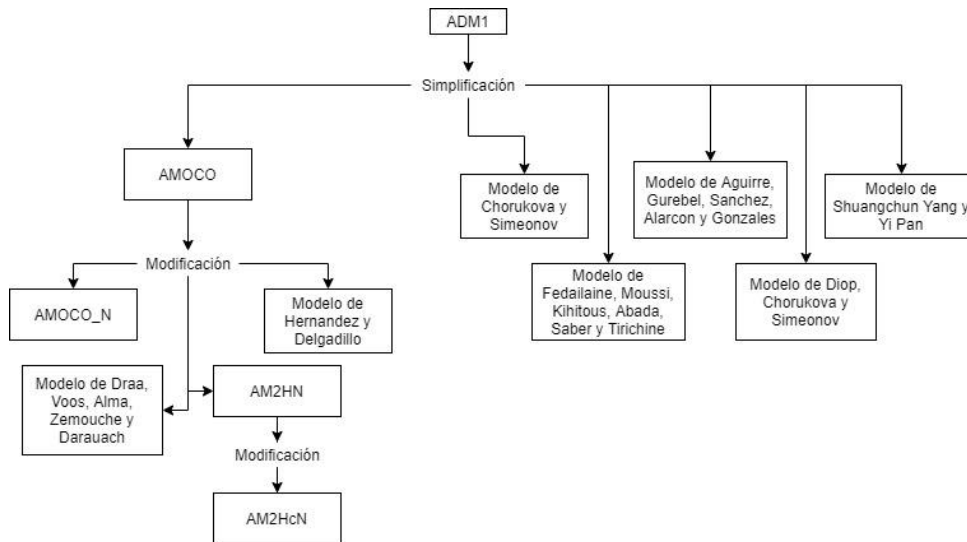


Figura 2. Diagrama de árbol de los modelos encontrados, creación propia

Principalmente el ADM1 creado por la IWA en 2002 [6] presenta un amplio conjunto de variables y procesos; entre ellos un set de 32 ecuaciones diferenciales (ED) y 26 variables de estado. Por su extensiva descripción, este modelo se ha simplificado, entre las simplificaciones se encuentran modelos tales como:

- Modelo de Chorukova y Simeonov [7]: Se centra en la producción de metano (CH_4) e hidrógeno (H_2), posee un conjunto de 12 ecuaciones diferenciales separadas en dos etapas dadas en dos reactores interconectados y describe las dos etapas más relevantes del proceso de digestión anaeróbica (acidogénesis y metanogénesis).
- Modelo de Diop, Chorukova y Simeonov [8]: Este modelo cuenta con seis ecuaciones diferenciales, separadas en dos etapas (4 ecuaciones para el proceso de hidrólisis y acidogénesis y 2 ecuaciones para el proceso de metanogénesis) junto a dos ecuaciones de producción. Al igual que el modelo anteriormente mencionado se centra en la producción de metano e hidrógeno.
- Modelo de Aguirre, Gurebel, Sanchez, Alarcon y Gonzales [9]: Al igual que los modelos previamente mencionados se centra en la producción de metano e hidrógeno, posee un set de 12 ecuaciones diferenciales y un conjunto de 24 parámetros y dos ecuaciones que determinan la cantidad de gas que se produce (CH_4 y H_2).
- Modelo de Fedailane, Moussi, Khitous, Abada, Saber y Tirichine [10]: Este modelo se centra en la producción de metano, posee seis ecuaciones diferenciales y hace uso de la dinámica de Haldane para modelar la población bacteriana.
- Modelo de Shuangchun Yang y Yi Pan [11]: Este modelo consiste en tres ecuaciones diferenciales considerando la producción de metano e hidrógeno y la degradación de los materiales orgánicos.

Los modelos presentados a continuación son una simplificación del modelo ADM1 y/o una modificación al modelo AMOCO descrito a continuación.

- AMOCO [12]: Se centra en la producción de biogás (CH_4 y CO_2), posee seis ecuaciones diferenciales con seis variables de estado, describe el proceso de DA basado en sus dos etapas más relevantes (acidogénesis y metanogénesis).
- AMOCO_N [13]: Este modelo es una modificación del modelo AMOCO, en esta modificación se agrega el rol del nitrógeno a la ecuación que describe la alcalinidad del proceso.
- Modelo de Draa, Voos, Alma, Zemouche y Darouach [14]: Se centra en la producción de biogás, posee seis ecuaciones diferenciales, está enfocado al control.
- AM2HN [15]: Modificación del modelo AMOCO, en este modelo se tiene en cuenta la etapa de hidrólisis en su dinámica, junto a ello agregan el rol del nitrógeno al modelo base (AMOCO).
- AM2HcN [16]: Este modelo es producto de una modificación del AM2HN; esta consiste en agregar un conjunto de ecuaciones diferenciales que representan parte del comportamiento de las poblaciones bacterianas, se utiliza la dinámica

de Contois basada de las cuotas alimenticias para el modelamiento de estas ED.

- Modelo de Hernández y Delgadillo [17]: Es una reducción del modelo AMOCO, posee cuatro ecuaciones diferenciales y una ecuación de producción; se centra en la generación de metano.

El proceso de DA se ve afectado por diferentes factores esenciales en la generación de biogás, algunos de ellos son: la temperatura, el pH y el parámetro de heterogeneidad [12][18]. Considerando lo anterior, en muchas plantas de generación de biogás se implementan sistemas de control [19] de temperatura y pH para optimizar la producción de metano manteniendo rangos mesofílicos o termofílicos dependiendo del tiempo de retención del residuo sólido orgánico (RSO) [20]. Para la implementación de sistemas de control se requieren los modelos dinámicos de los sistemas a controlar, de esta manera se determinan los criterios de estabilidad, parámetros limítrofes y la zona rosa de trabajo [21][19].

Un aspecto que posee alta relevancia en la generación de biogás en un reactor de DA es la temperatura, para que las bacterias en las diferentes etapas puedan sobrevivir, estas deben mantenerse en un rango mesofílico o termofílico, el rango mesofílico es de 37 a 40 °C y el rango termofílico es de 55 a 60 °C [22]. Para garantizar lo anterior es necesario implementar un sistema de control de temperatura como se reporta en [18].

Por último en [22] se analizan los efectos de la agitación en la producción de CH₄, haciendo un experimento con agitación a una velocidad angular nominal de 40 rpm y otro sin agitación. Se concluyó que el experimento donde se agitaba poseía una mayor eficiencia debido a que la cantidad de biogás generado en el tiempo de retención (21 días) fue más alta.

En muchos de los experimentos que se han desarrollado, los sistemas de adquisición de variables han permitido una observación objetiva del proceso [18]. Esto explica su utilización en investigaciones de procesamiento de residuos sólidos y optimización en la generación de biogás [18].

En conclusión, la heterogeneidad, temperatura y pH son factores esenciales para la potencialización de producción de biogás, todo esto con sistemas de control en regímenes nominales aumentarían la generación de metano en un reactor de digestión anaeróbica.

3.2. Fundamentos teóricos

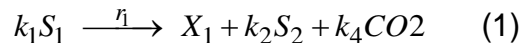
Basado en la revisión presentada, se seleccionó para trabajar el modelo AMOCO debido a su detallada descripción [12] y amplia documentación [3]; junto a eso, diferentes autores trabajan este modelo [13][15][23][24][16] agregando modificaciones, simulándolo y/o comparándolo con datos experimentales.

3.2.1. AMOCO O AM2

AMOCO o AM2 es un modelo con el que se puede predecir el comportamiento dinámico de un biodigestor bajo ciertas circunstancias (pH entre 6 – 8 y temperatura controlada entre los 35 – 38 °C) este modelo fue propuesto por Bernard et al [12]. En AMOCO se plantean una serie de ecuaciones diferenciales (ED) ordinarias no lineales que describen el comportamiento de las bacterias acidogénicas, metanogénicas y de los sustratos (alimentos) de dichas bacterias, además integra en sus ecuaciones la alcalinidad del proceso y la variación del carbono inorgánico (CO2 disuelto y Bicarbonato).

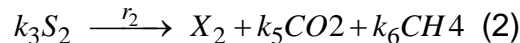
El modelo consiste en analizar dos pasos: en el primero, las bacterias acidogénicas (X_1), las cuales consumen el sustrato S_1 para producir CO2 y ácidos grasos volátiles, luego de ello las bacterias metanogénicas (X_2) consumen los AGV (S_2) y producen el metano con dióxido de carbono. En todo el proceso se supone que la mezcla dentro del reactor es homogénea [17].

Proceso de acidogénesis (con una rata de reacción $r_1 = u_1 X_1$):



En la ecuación anterior se puede denotar la formación de los AGV (S_2) y del CO2 a partir del sustrato S_1 (proteínas, lípidos e hidratos de carbono) y las bacterias X_1 .

Proceso de metanogénesis (con una rata de reacción $r_2 = u_2 X_2$):



En la ecuación anterior es posible observar cómo se generan moléculas de metano junto a moléculas de CO2 a partir del sustrato S_2 y las bacterias metanogénicas X_2 .

Ecuaciones diferenciales:

$$E = [X_1, X_2, Z, S_1, S_2, C]^T \quad (3)$$

$$\alpha_1 = K_{d1} + \alpha \frac{Q_{in}}{V_l} \quad (4)$$

$$\frac{dX_1}{dt} = \left[u_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}} - \alpha_1 \right] X_1 \quad (5)$$

$$\alpha_2 = K_{d2} + \alpha \frac{Q_{in}}{V_l} \quad (6)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = \left[u_{2max} \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + \frac{S_2^2}{K_{I2}}} - \alpha_2 \right] X_2 \quad (7)$$

$$D = \frac{Q_{in}}{V_l} \quad (8)$$

$$\frac{dZ}{dt} = D(Z_{in} - Z) \quad (9)$$

$$\frac{dS_1}{dt} = D(S_{1in} - S_1) - k_1 u_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}} X_1 \quad (10)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = D(S_{2in} - S_2) + k_2 u_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}} X_1 - k_3 u_{2max} \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + \frac{S_2^2}{K_{I2}}} X_2 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} = & D(C_{in} - C) + k_4 u_{1max} \frac{S_1}{S_1 + K_{S1}} X_1 + k_5 u_{2max} \frac{S_2}{S_2 + K_{S2} + \frac{S_2^2}{K_{I2}}} X_2 \\ & - K_{la} [C + S_2 - Z - K_H P_T] \end{aligned} \quad (12)$$

Todas las fórmulas anteriores son no lineales a excepción de la ecuación que denota la alcalinidad del proceso. Dada la naturaleza de estas ecuaciones estipuladas por el proceso de balances de masas, reacciones biológicas y cinética de bacterias, analizar o aplicar parámetros de caracterización o funciones de transferencia no es viable, debido a que el sistema debe ser lineal e invariante en el tiempo. Para ello se propone una solución diferente, una única ecuación diferencial con una matriz que se componga de cada una de las variables de estados junto a sus coeficientes o funciones que se correlacionen [24].

3.2.2. Runge – Kutta de cuarto orden multivariable

Siendo un sistema de ED autónomas y con la siguiente estructura [25][26]:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = f_{(t,\bar{x})} \quad (13)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_m] \\ x_1 &= f_{1(t,x_1,x_2,\dots,x_{m-1},x_m)} \\ x_2 &= f_{2(t,x_1,x_2,\dots,x_{m-1},x_m)} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_m &= f_{m(t,x_1,x_2,\dots,x_{m-1},x_m)} \end{aligned} \quad (14)$$

Y con condiciones iniciales diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
x_{1(0)} &= x_{1,in} \neq 0 \\
x_{2(0)} &= x_{2,in} \neq 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x_{n(0)} &= x_{n,in} \neq 0
\end{aligned} \tag{15}$$

La solución a las ecuaciones diferenciales es la siguiente [26][25]:

$$x_{m,(n+1)} = x_{m,(n)} + \frac{1}{6} \left[\bar{a} + 2\bar{b} + 2\bar{c} + \bar{d} \right] \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}_n &= \{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m-1,n}, x_{m,n}\} \\
\bar{a} &= \Delta T f_{(t_n, \bar{x}_n)} \\
\bar{b} &= \Delta T f_{(t_n + \frac{\Delta T}{2}, \bar{x}_n + \frac{\Delta T}{2} \bar{a})} \\
\bar{c} &= \Delta T f_{(t_n + \frac{\Delta T}{2}, \bar{x}_n + \frac{\Delta T}{2} \bar{b})} \\
\bar{d} &= \Delta T f_{(t_n + \Delta T, \bar{x}_n + \Delta T \bar{c})}
\end{aligned} \tag{17}$$

3.2.3. Espacios de estado

Los espacios de estados son matrices que definen la interacción de un sistema mediante su multidependencia, cuando se analiza un sistema dinámico este puede depender de múltiples variables como un sistema MISO (múltiples entradas salida única) o MIMO (múltiples entradas múltiples salidas) [19].

Existen cuatro maneras de expresar en espacios de estado un conjunto de ecuaciones diferenciales:

- Forma canónica controlable
- Forma canónica observable

- Forma canónica diagonal
- Forma canónica de Jordan

Las formas presentadas anteriormente son representaciones de las variables de estado [19].

Las siguientes matrices que se presentan poseen la forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdot & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (18)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_o & b_2 - a_2 b_o & \cdot & b_n - a_n b_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_o u(k) \quad (19)$$

En teoría de control se encuentran ejemplos de sistemas modelados en espacios de estados tales como sistemas electromecánicos, sistemas hidráulicos, sistemas neumáticos, entre otros [19].

3.2.4. Teorema de estabilidad según Lyapunov

La estabilidad en el sentido de Lyapunov está determinada por una zona acotada sobre un punto de equilibrio (PE) [27]. Para determinar la estabilidad de un sistema bajo el criterio de Lyapunov existen dos métodos; el primero es el método indirecto de Lyapunov que consiste en hallar una función que posea todas las variables de estado e interacciones de estas, a esta se le conoce comúnmente como función de Lyapunov, de igual manera esta función debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} V_{(x)} &> 0 \\ \dot{V}_{(x)} &\leq 0 \\ \forall t &\geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Siendo la función de Lyapunov $V(x)$ para todos los valores de x (variable/s de estado/s) en toda su definición mayor que cero y su derivada en toda su definición debe ser menor o igual a cero. Una de las problemáticas que posee esta definición es el tener que encontrar una función de Lyapunov que dependa de todas las variables de estado de un sistema.

El otro método utilizado para definir la estabilidad de un sistema es el método directo de Lyapunov que consiste en hallar los valores propios de la matriz Jacobiana que contiene las derivadas parciales de las variables de estado analizadas en sus puntos de equilibrio:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dot{X}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &\vdots \\ \dot{X}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\end{aligned}\tag{21}$$

Con la ecuación anterior se determinan los PE de cada variable, luego de ello se plantea la matriz Jacobiana "A" equivalente a:

$$A = \frac{\partial f(x_n)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=PE}\tag{22}$$

Luego se determinan los valores propios de A, tal que:

$$Vp = \det(sI - A)\tag{23}$$

El arreglo Vp denota los valores propios de la matriz A (polos), entonces se puede considerar que el origen es asintóticamente estable si los valores de Vp son reales negativos, dado otro caso se tiene en cuenta la Tabla 1:

Punto de Equilibrio	Condición
<i>Nodo estable</i>	Si los polos son reales y se encuentran en el semiplano-izquierdo.
<i>Nodo inestable</i>	Si los polos son reales y se encuentran el semiplano-derecho.
<i>Foco estable (espira)</i>	Cuando los polos son complejos en el semiplano izquierdo.
<i>Foco inestable (espira)</i>	Cuando los polos son complejos en el semiplano-derecho.

<i>Centro</i>	Cuando los polos son complejos en el eje imaginario.
<i>Nodo silla</i>	Cuando hay un polo real en el semiplano izquierdo y otro en el semiplano derecho.
<i>Línea continua de puntos de equilibrio</i>	Cuando un polo es nulo.
<i>Puntos de equilibrio hiperbólico (estructuralmente estable)</i>	Conserva su comportamiento cualitativo ante pequeñas perturbaciones. Condición: las raíces del modelo linealizado tienen $\text{Re } \lambda \neq 0$.

Tabla 1. Determinación del sistema en función a los valores propios de la matriz jacobiana, tabla tomada de [28]

4. Capítulo 3. Metodología

Inicialmente se hizo una revisión crítica de los modelos dinámicos del proceso de digestión anaeróbica y se estableció el modelo que mayor correspondencia tuvo analizando los resultados experimentales que obtuvieron los diferentes autores. Luego de ello se implementó una solución numérica del modelo establecido utilizando el método de Runge – Kutta de cuarto orden, y finalmente, se implementó en una simulación el modelo dinámico con el fin de analizar el comportamiento de los parámetros que intervienen en la producción de metano. La metodología planteada previamente se puede visualizar en la Figura 3.

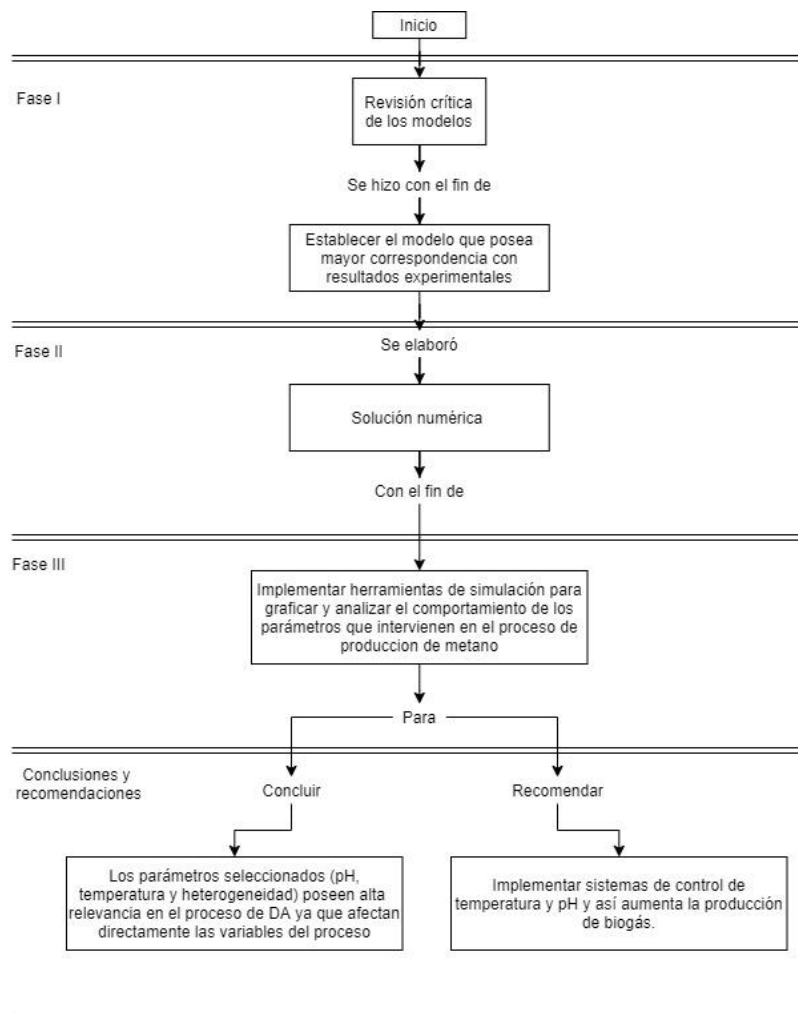


Figura 3. Proceso metodológico del proyecto, creación propia

5. Capítulo 4. Desarrollo matemático

En el presente capítulo se establecen las soluciones de las ecuaciones diferenciales propuestas en el capítulo 3.2.1; se presenta una solución numérica al modelo llamado AMOCO.

Como se mencionó anteriormente, el modelo de digestión anaeróbica es un proceso no lineal y multidependiente, dada esta naturaleza las ecuaciones diferenciales preestablecidas que se trabajan en este documento son un acercamiento al comportamiento real de un sistema anaeróbico de digestión, junto a eso las soluciones que se generan son de naturaleza numérica y no analítica.

5.1. Establecimiento del sistema de ecuaciones en espacio de estados

Se efectúa el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= U1 \\
 S_1 &= U2 \\
 X_2 &= U3 \\
 S_2 &= U4 \\
 Z &= U5 \\
 C &= U6 \\
 qCH4 &= Y1 \\
 qCO2 &= Y2
 \end{aligned} \tag{24}$$

El nuevo sistema de ecuaciones diferenciales pasa a ser:

$$\dot{U}1 = \left[u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} - \alpha_1 \right] U1 \tag{25}$$

$$\dot{U}2 = \beta [S_{1,in} - U2] - k_1 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 \tag{26}$$

$$\dot{U}3 = \left[u_{2\max} \frac{U4}{U4 + K_{s2} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} - \alpha_2 \right] U3 \quad (27)$$

$$\dot{U}4 = \beta [S_{2,in} - U4] + k_2 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 - k_3 u_{2\max} \frac{U4}{U4 + K_{s1} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} U3 \quad (28)$$

$$\dot{U}5 = \beta [Z_{in} - U5] \quad (29)$$

$$\dot{U}6 = \beta [C_{in} - U6] + k_4 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 + k_5 u_{2\max} \frac{U4}{U4 + K_{s1} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} U3 - K_{la} [U6 + U4 - U5 - K_H P] \quad (30)$$

Usando la forma canónica controlable:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}1 \\ \dot{U}2 \\ \dot{U}3 \\ \dot{U}4 \\ \dot{U}5 \\ \dot{U}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -\beta \\ -\alpha_2 \\ -\beta \\ -\beta \\ -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ U6 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} u_{1\max} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 u_{1\max} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{2\max} & 0 & 0 & 0 \\ k_2 u_{1\max} & 0 & -k_3 u_{2\max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 u_{1\max} & 0 & k_5 u_{2\max} & -K_{la} & K_{la} & -K_{la} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U1 \frac{U2}{U2 + K_{s1}} \\ U2 \\ U3 \frac{U4}{U2 + K_{s2} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} \\ U4 \\ U5 \\ U6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta S_{li,n} \\ 0 \\ \beta S_{2i,n} \\ \beta Z_{in} \\ K_{la} K_H P_T + \beta C_{in} \end{bmatrix} u \quad (31)$$

$$Y1 = k_6 u_{2\max} [U3] \left[\frac{U4}{U4 + K_{s2} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} \right] \quad (32)$$

$$Y2 = K_{la} \begin{pmatrix} U6 \\ -U5 \\ U4 \end{pmatrix} - K_{la} K_H P \quad (33)$$

Siendo:

$$U = \begin{pmatrix} U1 \\ U2 \\ U3 \\ U4 \\ U5 \\ U6 \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$ab = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\beta \\ -\alpha_2 \\ -\beta \\ -\beta \\ -\beta \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$A = \begin{bmatrix} u_{1\max} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 u_{1\max} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{2\max} & 0 & 0 & 0 \\ k_2 u_{1\max} & 0 & -k_3 u_{2\max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_4 u_{1\max} & 0 & k_5 u_{2\max} & -K_{la} & K_{la} & -K_{la} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta S_{1i,n} \\ 0 \\ \beta S_{2i,n} \\ \beta Z_{in} \\ K_{la} K_H P_T + \beta C_{in} \end{bmatrix} \quad (37)$$

En su forma diferencial:

$$\frac{dU}{dt} = abU + Af_{(U)} + Bu \quad (38)$$

5.2. Solución del modelo mediante Runge – Kutta de cuarto grado

Para la selección del método numérico se tuvieron en cuenta la precisión y el costo computacional de cinco tipos de soluciones numéricas: método de Heun, método de Euler, método de Runge – Kutta grado 3, método de Runge – Kutta grado 4 y el método de Butcher.

Se determinó el método de Runge – Kutta de grado 4 como el más apropiado para la solución numérica, ya que este posee un muy bajo error relativo porcentual y se encuentra sobre las cotas de gasto computacional Figura 4; se suprimió el método de Butcher ya que sale de las cotas de trabajo computacional.

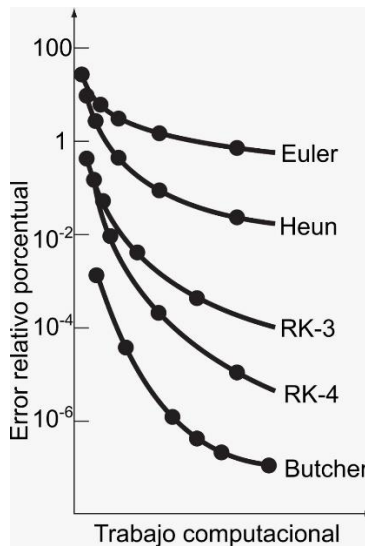


Figura 4. Comprobación del error relativo porcentual de los diferentes métodos numéricos, figura tomada de [25] capítulo 25, sección 3

Solución para la población bacteriana acidogénica:

$$\frac{dx_1}{dt} = \left[\frac{u_{1\max} S_1}{K_{s1} + S_1} - \alpha_1 \right] X_1 \quad (39)$$

$$X_{1(n+1)} = X_{1(n)} + [a + 2b + 2c + d] \Delta T$$

Solución para la población bacteriana metanogénica:

$$\frac{dx_2}{dt} = \left[\frac{u_{2\max} S_2}{K_{s2} + S_2 + \frac{S_2^2}{KI2}} - \alpha_2 \right] X_2 \quad (40)$$

$$X_{2(n+1)} = X_{2(n)} + [a + 2b + 2c + d] \Delta T$$

Solución para el comportamiento de la alcalinidad:

$$\frac{dZ}{dt} = \beta[Z_{in} - Z] \quad (41)$$

$$Z_{(n+1)} = Z_{(n)} + [a + 2b + 2c + d] \Delta T$$

Solución para el comportamiento del sustrato S1 (proteínas, lípidos y carbohidratos):

$$\frac{dS_1}{dt} = \beta[S_{1,in} - S_1] - \frac{k_1 u_{1\max} S_1}{K_{s1} + S_1} X_1 \quad (42)$$

$$S_{1(n+1)} = S_{1(n)} + [a + 2b + 2c + d] \Delta T$$

Solución para el comportamiento del sustrato S2 (Butirato, propionato, valérico, acetato):

$$\frac{dS_2}{dt} = \beta[S_{2,in} - S_2] + \frac{k_2 u_{1\max} S_1}{K_{s1} + S_1} X_1 - \frac{k_3 u_{2\max} S_2}{K_{s1} + S_2 + \frac{S_2^2}{KI2}} X_2 \quad (43)$$

$$S_{2(n+1)} = S_{2(n)} + [a + 2b + 2c + d] \Delta T$$

Solución para el comportamiento del carbono inorgánico.

$$\frac{dC}{dt} = \beta[C_{in} - C] + \frac{k_4 u_{1\max} S_1}{K_{s1} + S_1} X_1 + \frac{k_5 u_{2\max} S_2}{K_{s1} + S_2 + \frac{S_2^2}{KI2}} X_2 - K_{la} [C + S_2 - Z - K_H P_c] \quad (44)$$

$$C_{(n+1)} = C_{(n)} + [a + 2b + 2c + d] \Delta T$$

5.3. Análisis de estabilidad mediante el teorema de Lyapunov

Para determinar el análisis de estabilidad se tuvo en cuenta el teorema directo de Lyapunov. Debido a que las operaciones eran continuas y repetitivas se elaboró un algoritmo que las ejecutara; inicialmente, se hallaron los puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales, posteriormente se resolvieron las ecuaciones y se planteó la matriz jacobiana a partir de los PE del sistema modelado (AMOCO), y por último se hallaron los valores propios de esta matriz.

Inicialmente se determinaron los puntos de equilibrio de las variables que se tuvieron en cuenta (variables de estado), para ello se igualó a cero cada ecuación diferencial y se resolvió como se muestra en las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} \dot{U}1 &= \left[u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} - \alpha_1 \right] U1 = 0 \\ U2 &= \frac{K_{s1} \alpha_1}{u_{1\max} - \alpha_1} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}2 &= \beta [S_{1,in} - U2] - k_1 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 \\ U1 &= \frac{\beta [S_{1,in} - U2]}{k_1 u_{1\max} U2} [U2 + K_{s1}] \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}3 &= \left[u_{2\max} \frac{U4}{U4 + K_{s2} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} - \alpha_2 \right] U3 \\ U4 &= \frac{-[\alpha_2 - u_{2\max}] \pm \sqrt{[\alpha_2 - u_{2\max}]^2 - 4 \frac{\alpha_2^2}{K_{I2}} K_{s2}}}{2 \frac{\alpha_2}{K_{I2}}} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}4 &= \beta [S_{2,in} - U4] + k_2 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 - k_3 u_{2\max} \frac{U4}{U4 + K_{s1} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} U3 \\ U3 &= \left[U4 + K_{s1} + \frac{U4^2}{K_{I2}} \right] \left[\frac{1}{k_3 u_{2\max} U4} \right] \left[\beta [S_{2,in} - U4] + k_2 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
\dot{U}5 &= \beta[Z_{in} - U5] \\
\beta[Z_{in} - U5] &= 0 \\
U5 &= Z_{in}
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\dot{U}6 &= \beta[C_{in} - U6] + k_4 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 + k_5 u_{2\max} \frac{U4}{U4 + K_{s1} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} U3 - K_{la} [U6 + U4 - U5 - K_H P] \\
U6 &= \frac{\left[k_4 u_{1\max} \frac{U2}{U2 + K_{s1}} U1 + k_5 u_{2\max} \frac{U4}{U4 + K_{s1} + \frac{U4^2}{K_{I2}}} U3 + \beta[C_{in}] - K_{la} [U4 - U5 - K_H P_C] \right]}{\beta + K_{la}}
\end{aligned} \tag{50}$$

Luego se estableció la matriz Jacobiana J tomando los puntos de equilibrio:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial U1} [\dot{U}1] & \frac{\partial}{\partial U1} [\dot{U}2] & \frac{\partial}{\partial U1} [\dot{U}3] & \frac{\partial}{\partial U1} [\dot{U}4] & \frac{\partial}{\partial U1} [\dot{U}5] & \frac{\partial}{\partial U1} [\dot{U}6] \\ \frac{\partial}{\partial U2} [\dot{U}1] & \frac{\partial}{\partial U2} [\dot{U}2] & \frac{\partial}{\partial U2} [\dot{U}3] & \frac{\partial}{\partial U2} [\dot{U}4] & \frac{\partial}{\partial U2} [\dot{U}5] & \frac{\partial}{\partial U2} [\dot{U}6] \\ \frac{\partial}{\partial U3} [\dot{U}1] & \frac{\partial}{\partial U3} [\dot{U}2] & \frac{\partial}{\partial U3} [\dot{U}3] & \frac{\partial}{\partial U3} [\dot{U}4] & \frac{\partial}{\partial U3} [\dot{U}5] & \frac{\partial}{\partial U3} [\dot{U}6] \\ \frac{\partial}{\partial U4} [\dot{U}1] & \frac{\partial}{\partial U4} [\dot{U}2] & \frac{\partial}{\partial U4} [\dot{U}3] & \frac{\partial}{\partial U4} [\dot{U}4] & \frac{\partial}{\partial U4} [\dot{U}5] & \frac{\partial}{\partial U4} [\dot{U}6] \\ \frac{\partial}{\partial U5} [\dot{U}1] & \frac{\partial}{\partial U5} [\dot{U}2] & \frac{\partial}{\partial U5} [\dot{U}3] & \frac{\partial}{\partial U5} [\dot{U}4] & \frac{\partial}{\partial U5} [\dot{U}5] & \frac{\partial}{\partial U5} [\dot{U}6] \\ \frac{\partial}{\partial U6} [\dot{U}1] & \frac{\partial}{\partial U6} [\dot{U}2] & \frac{\partial}{\partial U6} [\dot{U}3] & \frac{\partial}{\partial U6} [\dot{U}4] & \frac{\partial}{\partial U6} [\dot{U}5] & \frac{\partial}{\partial U6} [\dot{U}6] \end{bmatrix} \tag{51}$$

Y por último se hallaron los valores propios de esta matriz mediante la siguiente operación:

$$A = \det(\lambda I - J) \tag{52}$$

Como resultado final, el arreglo A es equivalente a:

$$A = \begin{bmatrix} -20.193700787401575 \\ -0.731613791551209 \\ 0.139391427064855 \\ 0.104412926786390 \\ -0.407482526246387 \\ -0.393700787401575 \end{bmatrix} \quad (53)$$

Utilizando la Tabla 1 se puede identificar al sistema como un nodo silla dado que existen polos reales en el semiplano izquierdo y semiplano derecho, de esta manera se corrobora que el sistema que se modeló es un sistema caótico ya que existe una o más raíces inestables (silla) dado que algunos de los valores que contiene el arreglo A (polos) son mayores a cero (>0).

6. Capítulo 5. Simulación y software

El software que se utilizó fue MatLab, en este se elaboraron dos simulaciones:

La primera simulación indica el comportamiento de las variables de estado, variables de salida y el pH, junto a ello se presenta el comportamiento de algunas variables (X_1 , X_2 , S_1 y S_2) y producción de biogás (qCH_4) variando el parámetro de heterogeneidad. Para el desarrollo de la simulación se tuvo en cuenta el modelo planteado con anterioridad (AMOCO presentado en 3.2.1) y su solución numérica (Runge – Kutta grado 4 presentada en 5.2), se tomó un espacio muestral de 10000 puntos con un paso de 0.01 días para así simular un reactor de tanque continuo y agitado (RTCA) en un tiempo de 100 días. Como resultado se elaboró un programa .m que graficará el comportamiento de las variables de estado junto a la producción de metano, producción de dióxido de carbono y pH.

Diferentes autores presentan el modelo AMOCO sin tener en cuenta los coeficientes de decaimiento microbiano (Kd_1 y Kd_2) [24][29][23][14][12] mientras que otros presentan el modelo y agregan a la dinámica estos coeficientes [15][13] [16]; por lo mencionado con anterioridad la segunda simulación se centra en graficar las variables de estado del modelo AMOCO dados los dos casos (con coeficientes de decaimiento y sin coeficientes).

Los valores iniciales, constantes y coeficientes se tomaron de la siguiente literatura consultada: [12][24][23][15]. Estos valores se presentan en la Tabla 2:

Constante – Coeficiente	Valor	Unidad
k_1	42.1	
k_2	116.5	$\frac{mmol}{g}$
k_3	268	$\frac{mmol}{g}$
k_4	100	$\frac{mmol}{g}$
k_5	300	$\frac{mmol}{g}$
k_6	302	$\frac{mmol}{g}$
$u_{1,max}$	1.2	d^{-1}
$u_{2,max}$	0.74	d^{-1}
K_{s1}	7.1	$\frac{g}{L}$
K_{s2}	9.28	$\frac{mmol}{L}$
K_{I2}	256	$\frac{mmol}{L}$

$S_{1(0)}$	2	$\frac{g}{L}$
$X_{1(0)}$	0.6	$\frac{g}{L}$
$S_{2(0)}$	2	$\frac{mmol}{L}$
$X_{2(0)}$	0.6	$\frac{g}{L}$
$Z_{(0)}$	75.5	$\frac{mmol}{L}$
$C_{(0)}$	87.5	$\frac{mmol}{L}$
$S_{1,in}$	10	$\frac{g}{L}$
$S_{2,in}$	87.5	$\frac{mmol}{L}$
Z_{in}	87.5	$\frac{mmol}{L}$
C_{in}	9	$\frac{mmol}{L}$
P_T	1.003	atm
k_{la}	19.8	d^{-1}
K_H	27	$\frac{mmol}{L} atm$
K_b	6.53e-7	$\frac{mol}{L}$
pH	7	
qin	1	$\frac{L}{d}$
vl	2.54	L
T	310	K

Tabla 2. Valor de coeficientes, constantes y valores iniciales. Datos tomados de la literatura consultada.

6.1. Simulación del modelo AMOCO

En la Figura 5 se indica el comportamiento de las variables de estado en el proceso de digestión anaeróbica según el modelo AMOCO (S_1 para las proteínas, carbohidratos y lípidos, X_1 para la población bacteriana acidogénica, S_2 para los AGV, X_2 para la población bacteriana metanogénica, Z para la alcalinidad y C para el carbono inorgánico), como se puede observar, luego de un tiempo (transiente) el sistema tiende a estabilizarse.

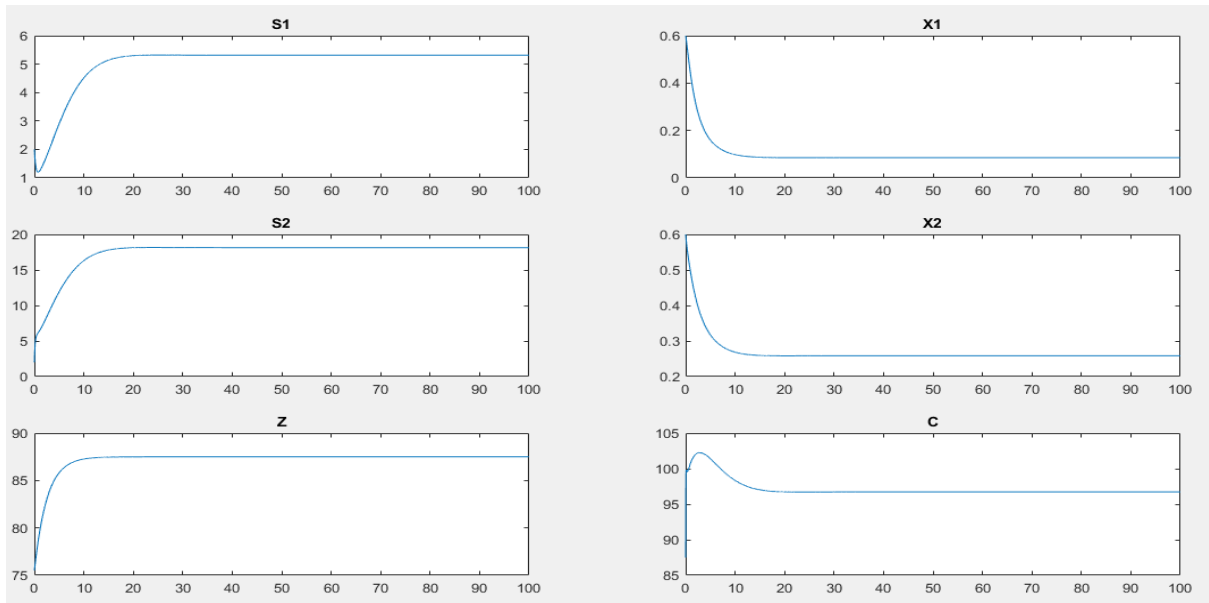


Figura 5. Comportamiento de las diferentes variables de estado del proceso de DA graficadas hasta su punto de estabilidad

Analizando el comportamiento de $S1$ en el tiempo, se nota que en el transiente sufre un abrupto cambio y luego se estabiliza en un punto determinado, gráficamente se puede notar que entre el día 0 y aproximadamente el día 3 hubo una disminución de la población bacteriana, luego de ello hubo un aumento de la población hasta el día 20 aproximadamente, para finalizar estabilizando entre 5 y 6 g/L.

La variable $S2$ posee un comportamiento particular, gráficamente tiene un incremento del día 0 hasta el día 20 (aproximadamente); luego estabiliza entre los 15 y 20 mmol/L; nótese que la ecuación parece tener una respuesta de primer orden, sin embargo, si se amplía la gráfica entre los días 0 y 2 (aproximadamente) se puede observar una discontinuidad en el incremento de la gráfica.

Aunque la forma de la ecuación diferencial de la alcalinidad es de tipo autónoma, esta posee un perfecto comportamiento de sistema de primer orden, debido a que es la única ecuación diferencial de tipo lineal e invariante en el tiempo (LIT) en todo el modelo. Una característica de esta ecuación es que su solución puede ser analítica.

A simple vista se nota un máximo en la gráfica que representa el comportamiento del carbono inorgánico, sin embargo, ampliando la zona de 0 a 20 días se observa que posee dos puntos máximos. Inicialmente esta variable posee un comportamiento creciente de 0 a 0.1 días, luego decrece y reacciona incrementando hasta el día tres en un máximo de 102.2 mmol/L (aproximadamente) y finalmente estabiliza en 96.74 mmol/L.

En la Figura 6 se presentan tres gráficas (q_{CH_4} , q_{CO_2} y pH), estas representan el comportamiento de las variables de salida y el pH a través del tiempo. Como se evidencia, las tres poseen un transiente donde se denota un punto máximo de producción o nivel (en el caso de pH) y luego se estabiliza en un valor constante.

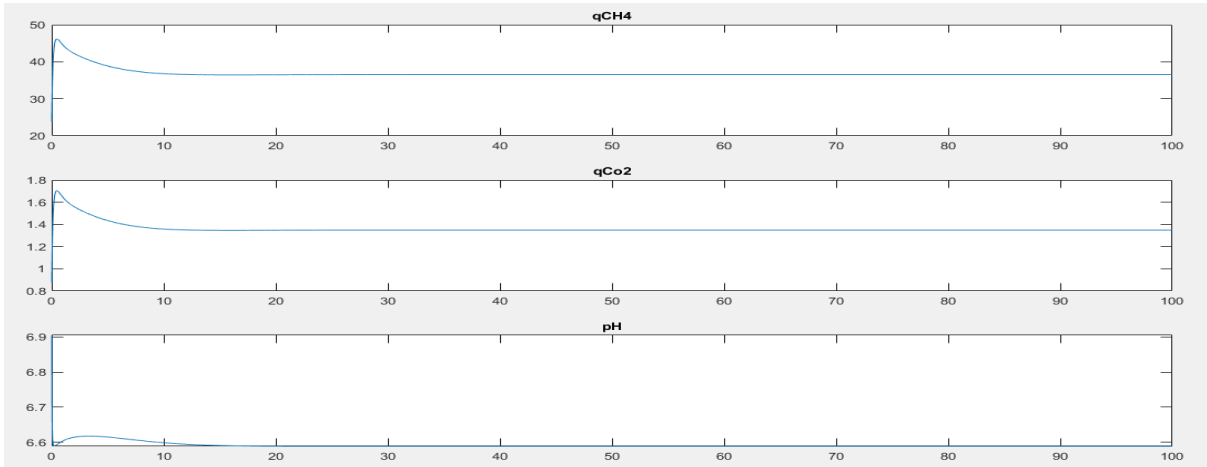


Figura 6. Comportamiento de las variables de salida q_{CH_4} , q_{CO_2} y pH

Analizando las gráficas se tiene que el pH se mantiene en la zona de trabajo (6 a 8 según O Bernard [12]), este aspecto determina que la simulación presentada cumple con la cota para el pH propuesta por el autor del modelo.

Un parámetro de relevancia dado en el proceso de DA es la heterogeneidad ($0 \leq \alpha \leq 1$) de la mezcla; $\alpha = 1$ representa un reactor RTCA y $\alpha = 0$ representa un reactor de lecho fijo [12], en la Figura 7 se observa que al disminuir este parámetro, la población bacteriana aumenta. Lo anterior se debe a que en los reactores de lecho fijo existe una capa en la parte baja del mismo donde hay una concentración bacteriana más alta que un reactor RTCA.

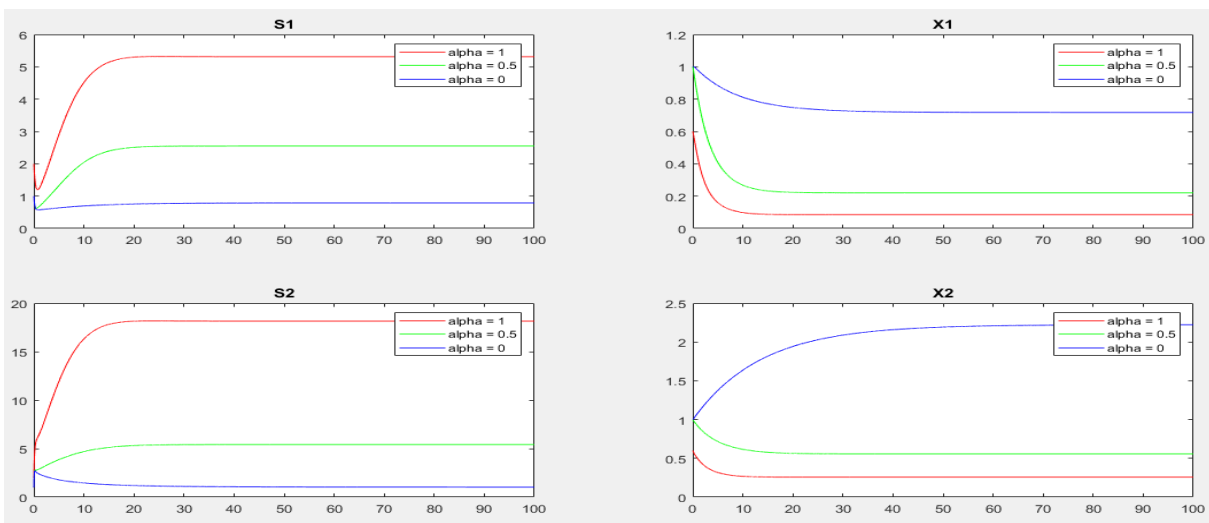


Figura 7. Comportamiento de algunas variables del modelo AMOCO bajo el parámetro de heterogeneidad

El aumento de la población bacteriana se refleja en la producción, habiendo una población bacteriana metanogénica más alta la cantidad de metano producido aumenta; esto se logra evidenciar en la Figura 8, para un $\alpha = 1$ (línea roja), $\alpha = 0.5$ (línea verde) y $\alpha = 0$ (línea azul).

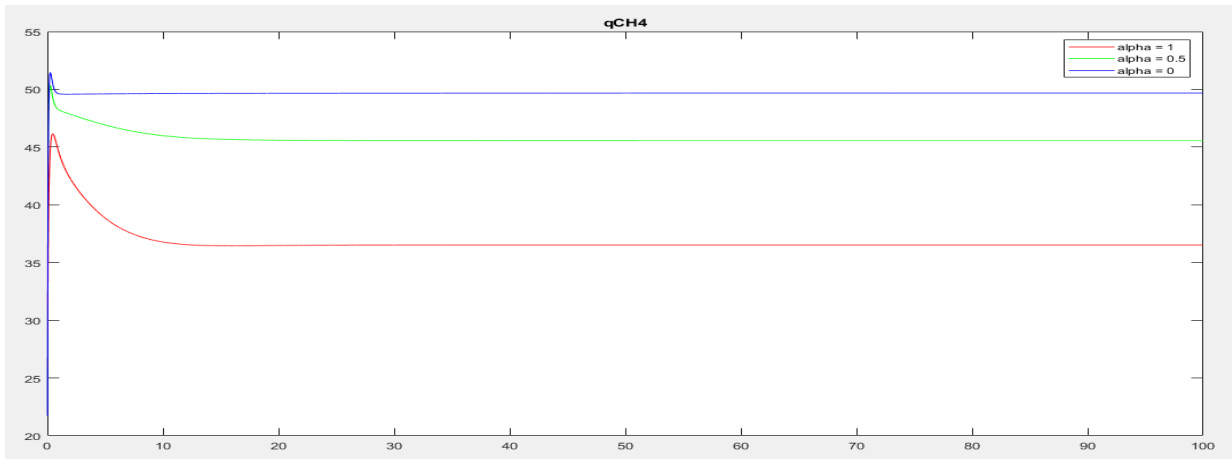


Figura 8. Comportamiento de la producción de metano bajo el parámetro de heterogeneidad

6.2. Simulación comparativa del modelo AMOCO

En la Figura 9 se presenta un conjunto de gráficas comparativas de dos modelos; el modelo con línea azul es AMOCO propuesto por Machado [24], en línea de color naranja se presenta en modelo AMOCO modificado, desarrollado en este documento.

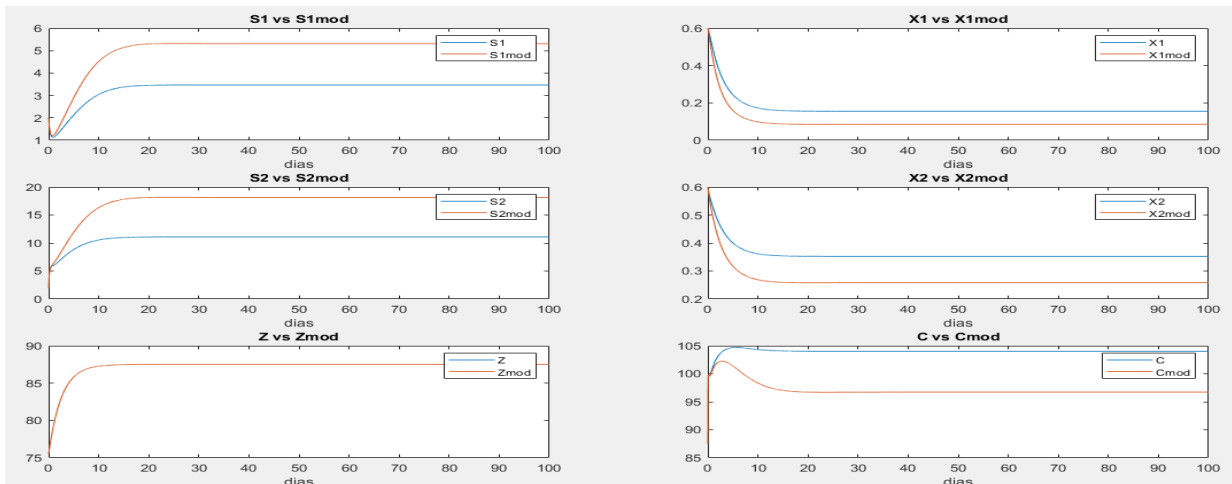


Figura 9. Comportamiento de las variables de estado, las líneas azules son las respuestas del modelo propuesto por Machado y las líneas naranjas son las soluciones por el modelo puesto en el presente trabajo

En las gráficas se observa que en estado estable los valores de las poblaciones bacterianas ($X1$ y $X2$) disminuyen y los valores de los sustratos ($S1$ y $S2$) aumentan; debido al proceso biológico que se genera dentro del reactor. Si disminuye la población bacteriana aumenta la cantidad de alimentos ya que el reactor está siendo constantemente alimentado (en un RTCA), este análisis se puede comparar con el modelo de presa – depredador [30]. La gráfica de la alcalinidad es la misma, esto sucede porque en el modelo, la alcalinidad no depende de la población bacteriana, concentraciones de sustratos o el carbono inorgánico. En la gráfica del carbono inorgánico se puede evidenciar un gran cambio, debido al aumento de bacterias la cantidad de carbono generado se reduce.

7. Capítulo 6. Plan de trabajo y análisis de resultados

En este capítulo se presenta el plan de trabajo y se dan a conocer los resultados obtenidos; el plan de trabajo se sustenta sobre las actividades propuestas y avaladas por el comité de trabajos de grado en el marco del proyecto “Prototipo de sistema de generación de energía eléctrica a partir de residuos sólidos orgánicos de la plaza de mercado del municipio de Fusagasugá”. Dichas actividades se pueden observar en la Tabla 3 columna: “actividades aprobadas por el comité”.

7.1. Plan de trabajo

El plan de trabajo se encuentra segmentado en tres fases: En la primera se realizó una revisión crítica de los modelos dinámicos del proceso de digestión anaeróbica con el fin de establecer el modelo que posea mayor correspondencia con resultados experimentales. Luego de ello, se implementó una resolución numérica para establecer la solución del sistema de ecuaciones seleccionado en la fase I. Por último, se simuló el modelo seleccionado graficando y analizando el comportamiento de los parámetros que intervienen en el proceso de producción de metano.

En la Tabla 3 se presentan las actividades aprobadas por el comité de trabajos de grado, junto a la relación con los objetivos específicos propuestos y las subactividades que corresponden al cumplimiento de cada objetivo.

Objetivo específico	Actividades aprobadas por el comité	Subactividades	Semana																												
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Realizar una revisión crítica de los modelos dinámicos del proceso de digestión anaeróbica con el fin de establecer el de mayor correspondencia con resultados experimentales reportados en la literatura.	Búsqueda en las bases de datos de los modelos dinámicos no lineales que involucren el proceso de DA	Estado del arte de los modelos de DA	X	X	X	X																									
		Selección y análisis del modelo				X	X																								
		Presentación del modelo en espacio de estados					X	X	X																						
		Análisis de estabilidad del modelo seleccionado									X	X	X																		
Implementar un método de resolución numérica que establezca solución de las ecuaciones del modelo dinámico del proceso de DA.	Simular el modelo matemático de digestión anaeróbica.	Planteamiento de la solución numérica del sistema de ecuaciones (MODELO AMOCO)										X	X	X																	
		Elaboración de software de simulación Fase I														X	X	X													
		Elaboración de software de simulación Fase II																		X	X	X									
		Elaboración de software de simulación Fase III, Final																			X	X						X	X	X	X
Simular un modelo dinámico del proceso de DA con el fin de analizar el comportamiento de los parámetros que intervienen en la producción de metano.	Determinar rangos y límites de la temperatura, pH y velocidad de agitación obtenidos de las búsquedas y consultas del proceso bioquímico de DA.	Análisis de parámetros que se presentan dentro del proceso de DA y análisis de estabilidad del modelo seleccionado.																		X	X	X									

Tabla 3. Actividades del proyecto

7.2. Análisis de resultados

Uno de los resultados que arrojó la búsqueda en las bases de datos fue la Tabla 2; en esta se indican los valores iniciales, coeficientes y constantes del proceso de digestión anaeróbica para el modelo AMOCO.

En la simulación del RTCA se logra evidenciar que las variables de mayor relevancia en el proceso de digestión anaeróbica llegan a un estado estable.

Durante el periodo del transiente de las variables de estado, el pH posee un transitorio, sin embargo, este valor de pH no sobrepasa las cotas propuestas por el creador de modelo (O Bernard et al). Este comportamiento verifica la validez de la solución implementada en este trabajo.

Al disminuir el valor del parámetro de heterogeneidad (*alpha*) la producción de metano aumenta, como se puede inferir en a la Figura 8 la heterogeneidad es inversamente proporcional a la producción de CH₄. Cabe resaltar que un *alpha* = 1 representa un reactor RTCA y *alpha* = 0 representa un reactor de lecho fijo.

En la literatura encontrada se determina que en los rangos mesofílicos y termofílicos la producción de biogás aumenta debido a que las poblaciones bacterias encontradas en el proceso de digestión anaeróbica tienden a aumentar cuando el reactor se encuentra entre estos rangos.

Al utilizar el método directo de Lyapunov se logra evidenciar que el tipo de sistema implementado (AMOCO con coeficientes de decaimiento) genera en los PE (puntos de equilibrio) un nodo - silla (inestable) debido a los polos generados por los valores propios de la matriz Jacobiana (53) porque estos son de tipo real, y se encuentran entre valores positivos y negativos.

La simulación del modelo AMOCO sin coeficientes de decaimiento genera una gráfica con una mayor población bacteriana produciendo una disminución en la cantidad de sustrato.

8. Capítulo 7. Conclusiones

Al realizar la revisión crítica de los modelos dinámicos que corresponden al proceso de DA se establece a AMOCO como el modelo que posee la mayor correspondencia con resultados experimentales que se reportaron en la literatura.

Debido a la inestabilidad del proceso de DA, el control es fundamental para lograr que las variables de estado alcancen su estado estable ya que algunos parámetros presentan variabilidad (pH, heterogeneidad) durante la digestión y/o pueden ser afectados por factores externos (temperatura).

La gráfica del pH (Figura 6) comprueba que la simulación cumple con los límites propuestos por el autor del modelo, por ende, se determina el pH como un parámetro de relevancia dentro del proceso de DA.

Todos los modelos encontrados se representan mediante ecuaciones diferenciales autónomas; junto a ello utilizan la cinética de crecimiento microbiano de Monod y/o Haldane para describir el comportamiento bacteriano, balances de masas para describir la dinámica de los sustratos y en su mayoría existe(n) una(s) ecuación(es) para modelar el equilibrio electroquímico.

El parámetro de heterogeneidad (*alpha*) posee una relación estrecha con la producción de metano, una disminución de este representa un aumento en la producción de biogás.

De acuerdo con la literatura revisada, en el proceso de digestión anaeróbica la temperatura es un parámetro de relevancia; estase encuentra fuertemente ligada al crecimiento bacteriano.

De todas las variables presentadas en el modelo AMOCO, la alcalinidad (Z) posee un comportamiento de ecuación de primer orden lineal e invariante en el tiempo, la ecuación es de tipo autónoma y su solución puede ser analítica.

La mayor diferencia que existe en el modelo AMOCO sin coeficientes de decaimiento y con coeficientes de decaimiento radica en los valores de estado estable, la implementación de estos coeficientes genera una disminución en la población bacteriana y por ende un aumento en el sustrato, asimismo la forma de la respuesta de las variables cambia a excepción de la alcalinidad.

Al implementar mediante herramientas de simulación el modelo AMOCO se logra evidenciar y analizar el comportamiento de las variables y parámetros que intervienen en la producción de metano. El método numérico implementado fue el de Runge – Kutta de cuarto orden con un paso de 0.01 días.

En la práctica, el pH está sujeto a cambios, junto a ello es bastante complejo garantizar una entrada constante de alimentos (S_1) debido a la variabilidad de los nutrientes con los que se alimenta el biodigestor. De acuerdo con lo anterior, la simulación representa en un estado ideal las condiciones propuestas para el modelo y su comportamiento, sin embargo, si se controlan las condiciones previamente propuestas o se trabaja en un rango de operación (para el pH es de 6 a 8 y temperatura de 35 a 38 °C [12]) se puede utilizar el modelo para predecir el comportamiento del sistema de digestión anaeróbica.

9. Presupuesto

El proyecto se encuentra financiado por el Ministerio de Ciencias Tecnologías e Innovación Minciencias antes Colciencias. En la Tabla 4 se muestra el presupuesto destinado para cada uno de los rubros del proyecto.

Rubro	Presupuesto destinado	Presupuesto invertido
Materiales e insumos	\$ 28.250.000	\$ 772.200
Personal científico	\$ 161.717.094	\$ 40.549.273
Servicios técnicos	\$ 41.000.000	\$ 120.000
TOTAL	\$ 289.017.670	\$ 41.441.473

Tabla 4. Presupuesto del proyecto de Minciencias

En siguiente tabla se presentan los rubros que se utilizaron para el desarrollo del presente trabajo.

Ítem	Descripción	Precio unitario	Cantidad	Precio total
Horas de trabajo	Cantidad de horas trabajadas	\$ 20.000	132	\$ 2'640.000
Computador	Recurso propio	-----	----	----
Internet	Recurso propio	-----	----	----
Total				\$ 2'640.000

Tabla 5. Rubros utilizados para la elaboración del presente trabajo

10. Referencias

- [1] G. B. Otoniel BUENROSTRO, Silke CRAM, Gerardo BERNACHE, "LA DIGESTIÓN ANAEROBIA COMO ALTERNATIVA DE TRATAMIENTO A LOS RESIDUOS SÓLIDOS ORGÁNICOS GENERADOS EN LOS MERCADOS MUNICIPALES," vol. 16, no. 1, 2000.
- [2] G. López Martínez, "Biodigestión anaerobia de residuos sólidos urbano. Alternativa energética y fuente de trabajo," *Rev. Tecnura*, vol. 7, no. 13, pp. 31–43, 2003.
- [3] G. Bastin and D. Dochain, *On-line estimation and adaptive control of bioreactors*, vol. 243. 1991.
- [4] Nigel Horan. Abu Zahrim Yaser. Newati Wid, *Anaerobic Digestion Processes*, no. 9789811081286. 2018.
- [5] M. C. Díaz-Báez, S. L. E. Vargas, and F. M. Pérez, "Digestión anaerobia: una aproximación a la tecnología," *Livest. Res. Rural Dev.*, p. 168, 2002, doi: 958-70-1-196-1.
- [6] D. J. Batstone *et al.*, "The IWA Anaerobic Digestion Model No 1 (ADM1).," *Water Sci. Technol.*, vol. 45, no. 10, pp. 65–73, 2002, doi: 10.2166/wst.2002.0292.
- [7] E. Chorukova and I. Simeonov, "Mathematical modeling of the anaerobic digestion in two-stage system with production of hydrogen and methane including three intermediate products," *Int. J. Hydrogen Energy*, no. xxxx, pp. 1–9, 2019, doi: 10.1016/j.ijhydene.2019.01.228.
- [8] S. Diop, E. Chorukova, and I. Simeonov, "Modeling and specific growth rates estimation of a two-stage anaerobic digestion process for hydrogen and methane production," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 12641–12646, 2017, doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.2232.
- [9] S. U. A. Camberos, K. J. Gurubel, E. N. Sanchez, S. A. Aguirre, and R. G. Perez, "Neuronal Modeling of a Two Stages Anaerobic Digestion Process for Biofuels Production," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 13, pp. 408–413, 2018, doi: 10.1016/j.ifacol.2018.07.313.
- [10] M. Fedailaine, K. Moussi, M. Khitous, S. Abada, M. Saber, and N. Tirichine, "Modeling of the anaerobic digestion of organic waste for biogas production," *Procedia Comput. Sci.*, vol. 52, no. 1, pp. 730–737, 2015, doi: 10.1016/j.procs.2015.05.086.
- [11] S. Yang and Y. Pan, "A design simplified of anaerobic digestion mathematic

- model,” *2011 IEEE 3rd Int. Conf. Commun. Softw. Networks, ICCSN 2011*, pp. 442–444, 2011, doi: 10.1109/ICCSN.2011.6014087.
- [12] O. Bernard *et al.*, “Dynamical Model Development and Parameter Identification for an Anaerobic Wastewater Treatment Process,” 2001.
- [13] E. Ficara, S. Hassam, A. Allegrini, A. Leva, F. Malpei, and G. Ferretti, *Anaerobic Digestion Models : a Comparative Study* *, vol. 45, no. 2. IFAC, 2001.
- [14] K. C. Draa, H. Voos, M. Alma, A. Zemouche, and M. Darouach, “LMI-based H^∞ nonlinear state observer design for anaerobic digestion model,” *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2017*. pp. 678–683, 2017, doi: 10.1109/MED.2017.7984196.
- [15] S. Hassam, E. Ficara, A. Leva, and J. Harmand, “A generic and systematic procedure to derive a simplified model from the anaerobic digestion model No. 1 (ADM1),” *Biochem. Eng. J.*, vol. 99, pp. 193–203, 2015, doi: 10.1016/j.bej.2015.03.007.
- [16] O. A. Jacobo, U. E. Jimenez, and A. Vargas, “Modelo matemático para la digestión anaerobia de residuos sólidos orgánicos,” pp. 23–25, 2019, [Online]. Available: www.amca.mx.
- [17] M. Hernández-sarabia, “Mathematical modelling and simulation for biogas production from organic waste Mathematical modelling and simulation for biogas production from organic waste Liliana Delgadillo-Mirquez and Maximiliano Machado-Higuera *,” no. July, 2018, doi: 10.1504/IJESMS.2018.10013112.
- [18] S. Catarina, “Mass balance calculations of the organic solid wastes treatment in anaerobic reactor,” no. Figure 1, pp. 386–391, 2015, doi: 10.1109/CISIS.2015.91.
- [19] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. .
- [20] B. A. Parra-orobio *et al.*, “INFLUENCIA DEL pH SOBRE LA DIGESTIÓN ANAEROBIA DE BIORRESIDUOS DE ORIGEN MUNICIPAL INFLUENCE OF pH ON ANAEROBIC DIGESTION OF MUNICIPAL BIO-WASTES,” pp. 553–562.
- [21] K. Ogata, *Dinámica de Sistemas*. .
- [22] A. Hajji, M. Rhachi, M. Garoum, and N. Laaroussi, “The effects of pH, temperature and agitation on biogas production under mesophilic regime,” *2016 3rd Int. Conf. Renew. Energies Dev. Ctries.*, pp. 1–4, 2016, doi: 10.1109/REDEC.2016.7577510.
- [23] L. Delgadillo Mirquez, M. Machado Higuera, and M. Hernández Sarabia,

- “Mathematical modelling and simulation for biogas production from organic waste,” *Int. J. Eng. Syst. Model. Simul.*, vol. 10, no. 2, p. 97, 2018, doi: 10.1504/ijesms.2018.10013112.
- [24] M. Machado-Higuera, “Una alternativa numerica en la solución de un sistema que modela la producción de biogás,” *Revista Mexicana de Métodos Numéricos*, vol. 2, pp. 1–10, 2018, [Online]. Available: https://www.scipedia.com/public/Machado_2017a.
- [25] R. P. C. Steven C. Chapra, *Métodos Numéricos para Ingenieros*, 5th ed. McGraw-Hill, 2006.
- [26] Myphysicslab.com, “Runge Kutta Method,” 2001. <https://www.mypysicslab.com/explain/runge-kutta-en.html>.
- [27] F. Gordillo, “Estabilidad de sistemas no lineales basada en la teoría de Liapunov,” *RIAI - Rev. Iberoam. Autom. e Inform. Ind.*, vol. 6, no. 2, pp. 5–16, 2009, doi: 10.1016/s1697-7912(09)70088-3.
- [28] A. M. Juan, P. G. José, and A. Cuevas, “Estabilidad de Sistemas No-lineales : Sistema de Nivel de Líquidos de Dos Tanques Interconectados .,” vol. 5, no. 2, pp. 6–12, 2008.
- [29] K. C. Draa, H. Voos, M. Darouach, and M. Alma, “A Formal Modeling Framework for Anaerobic Digestion Systems,” *Proc. - UKSim-AMSS 17th Int. Conf. Comput. Model. Simulation, UKSim 2015*, no. 2, pp. 426–431, 2016, doi: 10.1109/UKSim.2015.68.
- [30] J. Asencio Oganician, “Modelo Depredador- Presa de Lotka-Volterra,” p. 30, 2017.

Apéndice 1: Tablas

Variable o Parámetro	Significado	unidad
k_i ($i = 1,2,3,4,5,6$)	k_1 : rendimiento para la degradación de la DQO k_2 : rendimiento para la producción de AGV k_3 : rendimiento para el consumo de AGV k_4 : rendimiento para la producción de CO2 k_5 : rendimiento para la producción de CO2 k_6 : rendimiento para la producción de CH4	$\frac{mmol}{g}$
S_1	Alimento para las bacterias acidogénicas (proteínas, lípidos y carbohidratos denotadas por su concentración caracterizada por su DQO)	$\frac{g}{L}$
r_1	Tasa de reacción acidogénico	
u_1	Tasa de crecimiento específica en las bacterias acidogénicas	d^{-1}
X_1	Bacterias acidogénicas.	
S_2	AGV (ácidos grasos volátiles), su concentración.	$\frac{mmol}{L}$
r_2	Tasa de reacción metanogénicas	
u_2	Tasa de crecimiento específica en las bacterias metanogénicas	d^{-1}
X_2	Bacterias metanogénicas	
α	Parámetro de homogeneidad	
D	Tasa de dilución del fermentador	d^{-1}
K_{la}	Coeficiente de transferencia de líquido a gas	
K_H	Constante de Henry's para el CO2	
P_c	Presión parcial de gas CO2	atm
B	Concentración de bicarbonato	$\frac{mmol}{l}$
C, C_{in}	Concentración total de carbono inorgánico	$\frac{mmol}{l}$
P_T	Presión total del reactor	atm
q_c	Tasa de flujo del dióxido de carbono	$\frac{mmol}{l * d}$

q_m	Tasa de flujo del metano	$\frac{mmol}{l * d}$
E	Vector de variables del proceso	
K_{si} (i =1,2)	Constantes de saturación media de los sustratos S1 y S2 para i=1: S1 y para i =2 : S2	
K_I	Constante de inhibición para los AGV o sustrato S2	
$u_{1,max}$	Tasa de crecimiento bacteriano acidogénico máximo	
$u_{2,max}$	Tasa de crecimiento bacteriano metanogénico máximo	

Tabla 6. Variables, coeficientes y constantes presentadas en el proceso de DA según el modelo AMOCO.