ANÁLISIS DE ALGÚN MÉTODO NUMÉRICO PARA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

JOHANS CAMILO PRADA LEAL
CODIGO: 171211214

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
2017

ANÁLISIS DE ALGÚN MÉTODO NUMÉRICO PARA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

JOHANS CAMILO PRADA LEAL
CODIGO: 171211214

Asesor:
NESTOR ORLANDO FORERO DÍAZ
Magister en Matemáticas

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
2017

Tu guíaste mi destino,
tu te convertiste en fuente de mi vida
mi amiga, mi consuelo eres tu.
Tu eres una de las razón de vivir,
eso eres tu en mi vida, gracias por enseñarme y guiarme.
Dedicado a
mi madre.

AGRADECIMIENTOS

Le agradezco a Dios primeramente por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por darme sabiduria, experiencias, felicidad y sobre todo amor.

A mi asesor de tesis Néstor Forero Díaz, Magister en matemáticas, por la orientación y ayuda que me brindo para guiar esta tesis, porque me brindo su amistad permitiéndome aprender, mucho más de lo estudiado en el presente proyecto.

Agradezco a mi esposa por confiar en mis decisiones; por ser parte importante en mi vida,apoyo incondicional en este camino; a mi madre por los valores que me han inculcado y las lecciones de vida, por haberme enseñado que con esfuerzo, trabajo y constancia todo se consigue y que en esta vida nadie regala nada; y a mis compañeros quienes de uno u otro modo me impulsaron en este proyecto con su carisma y acompañamiento.

A la universidad de Cundinamarca; por permitir enriquecer mi conocimientos y principios imperecederos de calidad educativa.

Y no sin menos importancia a todos los docentes quienes aportaron con sus conocimientos en mi proceso de formación.

Índice general

Objetivos **7**

1. Preliminares **1**
1.1. Series de Taylor . . . 1
1.2. Series de Taylor de varias variables . . . 2
1.3. Metodo de Euler . . . 2

2. Estimacion de los errores **3**
2.1. Teorema de Existecia de Unicidad . . . 3
2.2. Estimativa para el error de Euler . . . 3
2.3. Demostración para obtener el método final . . . 6

3. Método en varias variables **10**
3.1. Proceso para obtener el método en varias variables . . . 10
3.2. Explicación final del método en varias variables . . . 12

4. Aplicaciones **19**
4.1. Sistemas dinamicos . . . 19
4.2. Metodos utilizados . . . 20
4.3. Ejemplo numerico . . . 21

5. Conclusiones **29**
5.1. Conclusiones . . . 29

Bibliografía **30**

INTRODUCCIÓN

En análisis numérico se aplican métodos como, Euler, Runge kutta, series de Taylor y serie de Taylor de varias variables, entre otros, ofreciendo un aporte significativo en las matemáticas. En términos generales nos centraremos en el estudio de varios métodos numéricos, para aproximar un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Por otro lado se establece un método nuevo, con el fin, de hallar soluciones aproximadas de un problema de valor inicial apartir del método de Euler, series de Taylor y series de Taylor de varias variables, por esa razón se estudia por su simplicidad en la derivación de la fórmula y de la determinación del error. Además se hace una comparación entre los métodos de Euler y series de Taylor de varias variables, teniendo en cuenta que no todos los métodos son sencillos de desarrollar.

El trabajo consta de cinco capitulos; en el primero se dan las nociones basicas, conceptos necesarios para desarrollar el metodo; en el segundo se procede a plantear las condiciones iniciales que se dan en el metodo, y de este modo demostrar la aproximacion del metodo que garantize un error mas pequeño; en el tercer capitulo se plantea un sistemas de ecuaciones en dos variables, con el fin de analizar la convergencia de dicho proceso; en el cuarto capitulo se plantea varios sistemas dinamicos lineales y no lineales, los cuales se van estudiar para analizar su convergencia y poder comparar, el cual se va modelar en un software libre llamado Octave y para finalizar se concluye lo analizado, a partir del modelo.

Objetivos

Objetivo General

Hallar una estimativa para un error de un método numérico para ecuaciones diferenciales ordinarias, sugerido

Objetvos Especificos

- Analizar los métodos de Euler y runge kutta.
- Desarrollar varios métodos numéricos a partir de la serie de Taylor.
- Aplicar los métodos encontrados a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, lineales y no lienales autonomas.

Capítulo 1

Preliminares

El presente capítulo tiene por finalidad, introducir los conceptos que serán necesarios para desarrollar el metodo de Euler, series de Taylor y series de Taylor de varias variables.

1.1. Series de Taylor

El teorema final en esta revisión del cálculo se describe los polinomios de Taylor. Estos polinomios se utilizan ampliamente en análisis numérico. [2]

Supongamos que $f \in C^n[a,b]$, existe que $f^{(n+1)}$ en $[a,b]$, y $x_0 \in [a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$, Existe un número $\epsilon(x)$ entre x_0 y x con

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{1.1}$$

Donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{1.2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \tag{1.3}$$

Luego el residuo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \tag{1.4}$$

1.2. Series de Taylor de varias variables

Supongamos que $f(x, y)$ y todas sus derivadas parciales de orden inferior o igual a $n+1$ son continua en $D = [(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d]$, y dejar $(x_0, y_0) \leq D$. Por cada $(x, y) \in D$, existe ϵ entre x y x_0 y entre y y y_0 con:

$$f(t, y) = P_n(x, y) + R_n(x, y), \tag{1.5}$$

Donde,

$$P_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \left[(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] +$$

....

$$+\left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x - x_0)^{n-j}(y - y_0)^j\,\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0, y_0)\right]$$

Luego con el margen de error,

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}(x - x_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j\,\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(\xi, \mu) \tag{1.6}$$

La función $P_n(x, y)$ se llama el polinomio de Taylor enésimo en dos variables para la función f sobre (x_0, y_0) ,y $R_n(x, y)$ es el término que resta asociado con $P_n(x, y)$.[3]

1.3. Metodo de Euler

Es la aproximación elemental para resolver problemas de valor inicial de. A pesar de que rara vez se utiliza en la práctica, la simplicidad de su derivación puede ser utilizada para ilustrar las técnicas involucradas en la construcción de algunos de las más avanzadas técnicas.

El objetivo del método de Euler es obtener aproximaciones al valor inicial bien planteado:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \tag{1.7}$$

Interpretando la E.D.O $y' = f(x, y)$ Como un campo de direcciones en el plano $x-y$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$ como un punto (x_0, y_0) de dicho plano, podemos aproximar la función solución $y(x)$ por medio de la recta tangente a la misma que pasa por ese punto:

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + R_n(x), \tag{1.8}$$

Para seguir estudiando un poco más en la aplicacion del metodo, lo encontramos acontinuación [3].

Capítulo 2

Estimacion de los errores

En este trabajo se va a revisar como converge este método:

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$
$$+\left(\frac{f(x_0,y_0) - f(x_0 - h, y_0)(x_0, y_0)}{h_x} + \frac{f(x_0,y_0) - f(x_0, y_0 - h)f(x_0, y_0)}{h_y}\right)\frac{(x - x_0)^2}{2}$$

Que se desarrolla con series de Taylor y series de Taylor de varias variables.

Las convergencia de este método esta garantizado por el teorema de existencia de unicidad de ecuaciones diferenciales.[4]

Aquí se mostraran las condiciones que se plantean, para poder demostrar paso a paso el método, que nos garantiza la convergencia bajo determinadas condiciones.

2.1. Teorema de Existecia de Unicidad

Sean las funciones y y $(\partial f)/(\partial y)$ continuas en algun rectangulo $\alpha < x < \beta$, $\varphi < y < \delta$ que contiene el punto (x_o, y_o) entonces en algun intevalo $x_o - h < x < x_o + h$ contenido en $\alpha < x < \beta$, existe una solución unica $y = \phi(x)$ del problema con valor inicial; $y = f(x.y); y(x_0) = y_0$; el cual se toma del libro Boyce Diprima.[4]

2.2. Estimativa para el error de Euler

Vamos a calcular el error para Euler, series de Taylor en varias variables, con el cual se va estimar los errores de cada metodo. Dada la ecuación diferencial

$$y\prime = f\,(x, y)$$

$$y\,(x_0) = y_0$$

se va calcular el error del método Euler, teniendo encuenta la condición dada en la ecuación diferencial.

DESARROLLO DEL METODO

luego de haber propuesto la ecuacion inicial, se coje el método y se le agrega los errores a cada variable, donde $h_x = x_1 - x_0$ y $h_y = y_1 - y_0$. Luego se halla el método de forma finita utilizando el método de Euler y series de Taylor.

Un punto $P = (x_0, y_0)$ de dicho plano ($P \in (x, y)$). Se aproxima la función solución $y(x)$ por medio de la serie de Taylor en P:

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + R_2(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + R_2(x - x_0), \tag{2.1}$$

donde $R_n(h) = o(h^n)$, para mejorar la aproximacion se toman mas terminos de la serie, para este caso hasta el segundo termino, (recordar que $y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y'(x)$)

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + \Big(f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)y'(x_0)\Big)\frac{(x - x_0)^2}{2} + R_3(x - x_0) \tag{2.2}$$

en este caso

$$R_3(x - x_0) = \Big(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_xf_y + f_y^2f\Big)(\epsilon_x, \epsilon_y)\frac{(x - x_0)^3}{3!} = M_2(\epsilon_x, \epsilon_y)\frac{(x - x_0)^3}{3!} \tag{2.3}$$

donde $(\epsilon_x, \epsilon_y) \in (x_0, x) \times (y_0, y)$,donde este es el error de la serie de Taylor en varias variables y se aplica la ecuación diferencial inicial para dejarlo solo en terminos de $f(x, y)$, si esta función tiene segunda derivada continua R_3 queda acotado y por tanto se puede calcular el error del metodo.
Para las derivadas parciales se aproximan por diferencias divididas hacia atras.

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - h_x, y_0)}{h_x} + R_{x,2}(h_x) \tag{2.4}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 - h_y)}{h_y} + R_{y,2}(h_y) \tag{2.5}$$

De modo que los errores para cada diferencia son:

$$R_{x,2}(h_x) = f_{xx}(\epsilon_x, y_0)\frac{h_x}{2} = M_{x,2}\frac{h_x}{2}$$

$$R_{y,2}(h_y) = f_{yy}(x_0, \epsilon_y)\frac{h_y}{2} = M_{y,2}\frac{h_y}{2}$$

donde otra vez se obtiene $(\epsilon_x, \epsilon_y) \in (x_0 - h_x, x_0) \times (y_0 - h_y, y_0)$, los cuales se hallan gracias al teorema de Taylor, luego se reemplazan (2.4) y (2.5) en (2.2)

$$y(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) + \Bigg(\frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - h_x, y_0)}{h_x} + \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 - h_y)}{h_y} f(x_0, y_0)\Bigg)\frac{(x - x_0)^2}{2} + R_t(x - x_0) \tag{2.6}$$

entonce, $R_t(x - x_0) = \Bigg(R_{x,2}(h_x) + fR_{y,2}(h_y)\Bigg)\frac{(x-x_0)^2}{2} + R_3(x - x_0) =$

$$\Bigg(f_{xx}(\epsilon_x, y_0)\frac{h_x}{2} + f f_{yy}(x_0, \epsilon_y)\frac{h_y}{2}\Bigg)\frac{(x - x_0)^2}{2} + M_2\frac{(x - x_0)^3}{3!} \tag{2.7}$$

donde M_2 es el dado en(2.3), al hacer esta primera aproximación se encuentra que R_t se puede calcular, de la ecuación (2.6), la cual genera dos metodos; el primero es tomando de;

$$h_y = y_{n+1} - y_n = y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + R(h_x) = f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + R(h_x) \tag{2.8}$$

y

$$h_x = x_{n+1} - x_n \tag{2.9}$$

donde

$$R(h_x) = (f_x + f_y f)(\epsilon_x, \epsilon_y)\frac{h_x^2}{2} \tag{2.10}$$

tomando a $x = x_2 = x_1 + h_x = x_0 + 2h_x$ y con la notación $y(x_n) = y_n$, reemplazando (2.8) (2.9) y cambiando x_0 por x_1 en la serie (2.6)

$$y(x_2) = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \Bigg(f(x_1, y_1) - f(x_1 - h_x, y_1) + f(x_1, y_1) - f(x_1, y_1 - h_y)\Bigg)\frac{(x_2 - x_1)}{2} + R_{t2}(x_2 - x_1)$$

$$y(x_2) = y_1 + f(x_1, y_1)h_x + \Bigg(f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1) + f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)\Bigg)\frac{h_x}{2} + R_{t2}(h_x)$$

luego simplificando

$$y(x_2) = y_1 + 2f(x_1, y_1)h_x - \Bigg(f(x_0, y_1) + f(x_1, y_0)\Bigg)\frac{h_x}{2} + R_{t2}(h_x)$$

se tiene que el (método A) queda de la forma;

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \Bigg(4f(x_{n+1}, y_{n+1}) - \Big(f(x_n, y_{n+1}) + f(x_{n+1}, y_n)\Big)\Bigg)\frac{h_x}{2}. \tag{2.11}$$

y el error es

$$R_{t2} = \frac{h_x R(h_x)\Delta_y f}{2(h_x f + R(h_x))} + R_t(h_x)$$

donde $\Delta_y f = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)$, R_t es el que esta dado en (2.7) y R es el dado en (2.10). Se evidencia que el método tiene un error grande, este depende de f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, h_x^3 tiene 4 partes y se acumula mas con cada interación, luego el metodo es facil de implementar pero el error no se deja manejar facilmente ademas que es grande, tambien se observa que si $|2(fh_x + R)| < |h_x R \Delta_y f|$ el método explota. La otra opcion es dejar el método por diferencias (2.6) (metodo B)

$$y_{n+2} = y_{n+1} + f(x_{n+1}, y_{n+1})h_x +$$
$$\left(\frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_{n+1})}{h_x} + \frac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_n)}{h_y} f(x_{n+1}, y_{n+1})\right)\frac{h_x^2}{2} \tag{2.12}$$

el error de este método es el que esta dado en R_t(2.7), la implementación es mas dificil que la del (metodo A) y su error es menor (comparando método A y B) aunque se sigue acumulando en cada iteracion.

Las convergencias de estos métodos hacia la solución de la e.d. estan garantizadas por el teorema de existencia de unicidad de ecuaciones diferenciales. Para que el método numerico converja la particion tiene que ser pequeña, porque cada sustitución que se hace se acumula un error; y_1 se obtiene aplicando método de Euler. La estabilidad para el "método B.en este caso depende de que la función y todas las derivadas hasta segundo orden esten acotadas, para el "método A"puede explotar si se toma mal h_x (por la restricción $|fh_x + R| < |h_x R \Delta_y f|$) .

2.3. Demostración para obtener el método final

Acontinuación mostraremos como obtenemos la parte final del metodo, apartir de series de Taylor.

En primera instancia vamos hallar la derivada para X y Y mas un errror, el cual llamaremos R_1, luego para hallar los errores se saca las segunda derivada respectivamente para R_1,R_2 y R_3, despues de hacer esto se suman todos los errores y nos da R el error del método, la cual se muestra acontinuación.

$$\acute{y} = f(x_1, y_1) + f_x(x_1, y_1)h_x + f_y(x_1, y_1)h_y + R_1 \tag{2.13}$$

luego se aplica Series de Taylor y se obtiene,

$$y\acute{} = f(x_1, y_1) + \left[\frac{f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)}{h_x}\right] h_x + \left[\frac{f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0)}{h_y}\right] h_y + R_2 h_x + R_3 h_y \tag{2.14}$$

Los errores que se obtiene son los siguientes:

$$R_1 = \left[f_{xx}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x^2 + 2f_{xy}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x h_y + f_{yy}((\epsilon_1, \epsilon_2)h_y^2\right] \frac{1}{2} \tag{2.15}$$

$$R_2 = \frac{f_{xx}(\epsilon, y_1)}{2} h_x^2 \tag{2.16}$$

$$R_3 = \frac{f_{yy}(x_{1,\epsilon})}{2} h_y^2 \tag{2.17}$$

donde;

$R = R_1 + R_2 + R_3$, los cuales se suman todos y se obtiene el error del metodo;

$$R = \left[f_{xx}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x^2 + 2f_{xy}(\epsilon_1, \epsilon_2)h_x h_y + f_{yy}((\epsilon_1, \epsilon_2)h_y^2\right] \frac{1}{2} + \frac{f_{xx}(\epsilon, y_1)}{2} h_x^2 + \frac{f_{yy}(x_{1,\epsilon})}{2} h_y^2 \tag{2.18}$$

ahora de realiza las operaciones respectivas y se reemplaza en el método obtenido,

$$y\acute{} = f(x_1, y_1) + [f(x_1, y_1) - f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)] + [f(x_1, y_1 - f(x_1, y_0)] + R \tag{2.19}$$

luego de hacer todos los calculos se saca las tres partes del método, y el error de Euler.

ERROR DE EULER

Primero vamos a encontrar el error de Euler, para asi mismo ver que tanto converge dicho método, teniendo encuenta que $\frac{y_1 - y_0}{h} + R = f(x_0, y_0)$, con su correspondiente error;

$$R_3 = f_x(\epsilon_1, y_0)h_x + f_y(x_0, \epsilon_2)h_y \tag{2.20}$$

donde,

$$h_x = x_1 - x_0 y h_y = y_1 - y_0 \tag{2.21}$$

luego de hacer las cuentas respectivas se obtiene el error de Euler para el método propuesto

$$\frac{y_2 - y_1}{h_x} + R_3 = 3f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1) + R \tag{2.22}$$

$$y_2 = [3f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1)]\, h_x + [R - R_3]\, h_x + y_1 \tag{2.23}$$

la cual $R_4 = [R - R_3]\, h_x$ y se reemplaza en el método y por ultimo se obtiene el método;

$$y_{n+2} = y_{n+1} + [3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_n) - f(x_n, y_{n+1})]\, h + R_4 \tag{2.24}$$

y ahora se realizara un ejemplo aplicando el método.

Ejemplo

$y' = x + y$, se toma como condición inicial
$y(0) = 1$
$y(2) =?$ y la partición es: $h = 2$

	x_n	y_n	
x_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	y_1
x_2	$\frac{4}{5}$	$\frac{91}{5}$	y_2
x_3	$\frac{6}{5}$	$\frac{39999}{625}$	y_3
x_4	$\frac{8}{5}$	$\frac{3168522027}{388750}$	y_4
x_5	2	$\frac{1012896389452...}{15126562500..}$	y_5

El primer termino lo hallamos con el método de Euler, teniendo en cuenta la siguiente aclaración que h tiene un intervalo de 0 a 2

$h = [0, 2]$

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$, método de Euler

$y_1 = 1 + \frac{2}{5}(0 + 1) = \frac{7}{5}$, Euler aplicando las respectivas operaciones.

luego aplicamos el método propuesto:

$y_2 = [3f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1)]\, h + y_1$

$y_3 = [3f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1) - f(x_1, y_2)]\, h + y_2$
$y_4 = [3f(x_3, y_3) - f(x_3, y_2) - f(x_2, y_3)]\, h + y_3$
$y_5 = [3f(x_4, y_4) - f(x_4, y_3) - f(x_3, y_4)]\, h + y_4$

ahora se reemplaza en cada de ellos, para cada partición:

$y_2 = \left[3(\frac{2}{5} + \frac{7}{5}) - (\frac{2}{5} + 1) - (0 + \frac{7}{5})\right] \frac{2}{5} + 1$

$y_2 = \frac{91}{5}$

$y_3 = \left[3(\frac{4}{5} + \frac{91}{5}) - (\frac{4}{5} + \frac{7}{5}) - (\frac{2}{5} + \frac{91}{5})\right] \frac{2}{5} + \frac{91}{5}$

$y_3 = \frac{39999}{625}$

$y_4 = \left[3(\frac{6}{5} + \frac{39999}{625}) - (\frac{6}{5} + \frac{91}{5}) - (\frac{4}{5} + \frac{39999}{625})\right] \frac{2}{5} + \frac{39999}{625}$

$y_4 = \frac{3168522027}{388750}$

$y_5 = \left[3(\frac{8}{5} + \frac{3168522027}{388750}) - (\frac{8}{5} + \frac{39999}{625}) - (\frac{6}{5} + \frac{3168522027}{388750})\right] \frac{2}{5} + \frac{3168522027}{388750}$

$y_5 = \frac{1012896389452...}{15126562500..}$

En conclusión se tiene que todos los métodos se parecen, pero el segundo se aproxima mas, aun asi teniendo un gran error.

Capítulo 3

Método en varias variables

En este capítulo se aplicaran los resultados analizados anteriormente a un modelo en varias variables, que se diseñó en Octave, un programa considerado el equivalente libre de MATLAB. Entre varias características que comparten, se puede destacar que ambos ofrecen un intérprete, permitiendo ejecutar órdenes en modo interactivo. Sino que está orientado al análisis numérico, este se analiza como un proceso y se evalúa su convergencia dadas las condiciones para que tenga un buen funcionamiento; se acota un sistema que se planteó en el trabajo anterior, dando un resultado especifico.

3.1. Proceso para obtener el método en varias variables

Se tomara la siguiente ecuación diferencial de varias variables de la forma $x' = f(x)$, con x una función parametrica se tiene, encuenta que f se va desarrollar con series de Taylor en varias variables y se obtiene que;

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n)h + R \tag{3.1}$$

$$= x_n + f(x_n)h + Df(x_n)h^2 + R; \tag{3.2}$$

se aplica series de Taylor;

$$= x_n + f(x_n)h + \begin{bmatrix} \partial x_1 f_1 & \partial x_1 f_1 & \partial x_1 f_1 \\ \partial x_2 f_2 & \partial x_2 f_2 & \partial x_2 f_2 \\ \partial x_3 f_3 & \partial x_3 f_3 & \partial x_3 f_3 \end{bmatrix} h^2 + R \tag{3.3}$$

luego, la solución de una ecuación diferencial en varias variables, es una función de la forma $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, es decir, una curva parametrizada.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), y(t), x(t)) \\ f_2(x(t), y(t), y(t)) \\ f_3(x(t), y(t), z(t)) \end{bmatrix}$$

junto con la condición inicial de

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

reescribiendo lo anterior utilizando la notación $X_n = (x_n, y_n, z_n)^t$ y $F = (f_1, f_2, f_3)^t$ con $h_t = t_{n+1} - t_n$ la e.d. toma la forma

$$\begin{aligned} X'(t) &= F(X(t)) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Operando de forma similar como se obtuvo método A se aplica (2.11) en

$$X_{n+2} = X_{n+1} + \frac{h}{2}(5F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n)) \tag{3.5}$$

Este método aunque es facil de implementar y corregir, es mucho mas inestable en las particiones que se deben tomar y tiene mucho error en su convergencia. El segundo método se obtiene por diferencias de forma similar al método B aplicando

$$\begin{gathered} X_{n+2} = X_{n+1} + h_t F(X_{n+1}) + \\ + \frac{h_t^2}{2}\Bigg(\left(\frac{F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1})}{x_{n+1} - x_n}\right) f_1(X_{n+1}) + \\ + \left(\frac{F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1})}{y_{n+1} - y_n}\right) f_2(X_{n+1}) + \\ + \left(\frac{F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n)}{z_{n+1} - z_n}\right) f_3(X_{n+1})\Bigg) \end{gathered}$$

el error de este método es similar al error de una variable

$$R_{t,3}(x - x_0) = \Big(f_1 F_{xx}(h_x) + f_2 F_{yy}(h_y) + f_3 F_{zz}(h_z)\Big)\frac{h_t^2}{2} + R_3(x - x_0)$$

Este método es mas estable y mantiene mas la forma, tiene un poco menos error que el método-A, mostrado anteriormente y es un poco mas dificil de programar, aunque cada vez que se incremente la dimensión se aumenta el error.

Error para el "Método-A"

$$\frac{h_x R_1(h_x)\Delta_x F}{2(h_x f_1 + R_1(h_x))} + \frac{h_y R_2(h_y)\Delta_y F}{2(h_y f_2 + R_2(h_x))} + \frac{h_z R_1(h_z)\Delta_z F}{2(h_z f_3 + R_3(h_z))} + R_{t,3}(x - x_0)$$

con

$$R_i(h_{x_i}) = \partial_t f_i(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)\frac{h_{x_i}^2}{2}$$

$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, es el error en cada variable, otra vez este método es inestable si $|2(f_i h_{x_i} + R_i)| < |h_{x_i} R\Delta_{x_i} f_i|$para cada i, $R_{t,3}$ es el error de Taylor; cada vez que se aumente la dimensión, se aumenta el error.

$$R_{t,3} = ((D^2F \cdot F)F + DF(DF \cdot F))(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)\frac{h_t^3}{3!}$$

.

3.2. Explicación final del método en varias variables

Se debe tener encuenta que una ecuación diferencial de varias variables de la forma $x = x(t)$, $y = y(t)$, es decir, una curva parametrizada y $f_1 : R \times R \to R$ y $f_2 : R \times R \to R$ con derivada continua, con el cual se arma la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x(t), y(t)) \\ f_2(x(t), y(t)) \\ f_3(x(t), y(t)) \end{bmatrix}$$

junto con la condición inicial de

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix}$$

este problema se va aproximar por diferencias divididas simplificando la notación, se va tomar;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix} = F(x, y, z) \quad \text{(ed-1)}$$

En la cual se toma la ecuación diferencial (ed-1), y se obtiene;

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \end{bmatrix}$$

para simplificar y usando notación vectorial $X = (x, y, z)^t$, teniendo en cuenta las condiciones dadas;

$$X' = F(x)$$
$$X_0 = X(t_0)$$

para hacer la aproximación se va hacer la serie de taylor en varias variables de $f(x, y, z)$ alrededor de $(x_0, y_0, z_0)^t$ es decir la función se puede escribir de la forma;

$$F(x,y,z) = F(x_0,y_0,z_0)+$$
$$(\partial_x F(x_0,y_0,z_0)x' + \partial_y F(x_0,y_0,z_0)y' + \partial_z F(x_0,y_0,z_0)z') + R(h^2)\ (d) \tag{3.6}$$

la aproximación de la solución de la ecuación diferencial por serie de taylor es;

$$X(t) = X_0 + X'(t_0)\,(t-t_0) + X''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + R(h^2) \tag{3.7}$$

reemplazando en la ecuación diferencial

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))\,(t-t_0) + D_x F(X(t_0))X'(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + R(h^2) \tag{3.8}$$

ahora lo que se obtiene anteriormente lo llamaremos (serie) y aplicamos serie de taylor, se obtiene la ecuación;

$$D_x F(X(t_0))X'(t_0)(t-t_0) = D_x F(X(t_0))(X - X_0) + R = F(X(t_1)) - F(X(t_0)) + R(h) \tag{3.9}$$

se deriva y se reemplaza en la (serie) con $X(t_1) = X_1$ y $X(t_2) = X_2$

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))\,(t-t_0) + (F(X_1)) - F(X_0))\,\frac{(t-t_0)}{2} + R(h^2) \tag{3.10}$$

reemplazando en cada una de las condiciones, $t = t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h$, se tiene que;

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (F(X_1)) - F(X_0))\,h + R(h^2) \tag{3.11}$$

con la ecuación anterior se obtiene el (metodo 1) y la formula se puede aproximar de varias formas, por ejemplo;

$$D_xF(X(t_0))X'(t_0)(t_1 - t_0) = D_xF(X(t_0))(X - X_0) + R(h)$$

$$= \partial_x F(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0)(y_1 - y_0) + R(h) \tag{3.12}$$

ahora aplicando diferencias divididas para poder obtener la serie;

$$\partial_x F(x_0, y_0) = \frac{F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1)}{x_1 - x_0} + R_1\left(h^2\right) \tag{3.13}$$

, y para

$$\partial_y F(x_0, y_0) = \frac{F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0)}{y_1 - y_0} + R_2\left(h^2\right) \tag{3.14}$$

la ecuación queda de la forma;

$$D_xF(X(t_0))X'(t_0)(t_1 - t_0) = \frac{F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) + \frac{F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0)}{y_1 - y_0}(y_1 - y_0) + R(h)$$

$$= 2F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0) - F(x_0, y_1) \tag{3.15}$$

reemplazando en la (serie) queda de la siguiente manera;

$$X(t) = X_0 + F(X_0)\,(t - t_0) + (2F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0)$$

$$- F(x_0, y_1))\frac{(t - t_0)}{2} + R(h^2) \tag{3.16}$$

teniendo en cuenta que $t = t_2$ y sin olvidar las condiciones iniciales.

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (2F(x_1, y_1) - F(x_1, y_0) - F(x_0, y_1))h + R(h^2) \tag{3.17}$$

asi que el (método 2) nos permite obtener el método en 3 dimensiones, el cual funciona de la siguiente manera;

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (3F(x_1, y_1, z_1)$$

$$- F(x_0, y_1, z_1) - F(x_1, y_0, z_1) - F(x_1, y_1, z_0))h + R(h^2) \quad (3.18)$$

y si la función depende claramente del parametro que se toma que en este caso es t, y asi obtenemos el siguinete método que lo denominaremos,(metodo 3).

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + (4F(x_1, y_1, z_1, t_1) - F(x_0, y_1, z_1, t_1) - F(x_1, y_0, z_1, t_1)$$

$$- F(x_1, y_1, z_0, t_1) - F(x_1, y_1, z_1, t_0))h + R(h^2) \quad (3.19)$$

la iteración n-esima quedaria para el caso de (método 3), que se obtuvo anteriormente.

$$X_{n+2} = X_n + (F(X_n) + F(X_{n+1}))h \quad (3.20)$$

y para el caso del (método 2) se tiene encuenta lo siguiente;

$$X_{n+2} = X_n + F(X_n)2h + (2F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n) - F(x_n, y_{n+1}))h \quad (3.21)$$

Ejemplo: Para la siguiente Ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -0{,}1x + 150y \\ -150y - 0{,}1x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

X_1 se aproxima por Euler y se busca tener $X = (0{,}1)$ con 200 iteraciones por el (método 1) obteniendose la grafica, de otra forma su aproximación, seria aplicando la siguiente ecuación;

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))\,(t - t_0) + D_x F(X(t_0))X'(t_0)\tfrac{(t-t_0)^2}{2} + R(h^2)$$

se reemplaza $X'(t_0)$

$$X(t) = X_0 + F(X(t_0))\,(t-t_0) + D_xF(X_0)F(X_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + R(h^2) \quad \text{(serie2)}$$

y se aproximan las derivadas con las diferencias divididas

$$X(t) = X_0 + F(X_0)\,(t-t_0) + \left[\left[\frac{F(x_1,y_1)-F(x_0,y_1)}{x_1-x_0}\right] f_1(x_0,y_0) + \left[\frac{F(x_1,y_1)-F(x_1,y_0)}{y_1-y_0}\right] f_2(x_0,y_0)\right]\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

y se hace $t = t_2$

$$X_2 = X_0 + F(X_0)2h + \left[\left[\frac{F(x_1,y_1)-F(x_0,y_1)}{x_1-x_0}\right] f_1(x_0,y_0) + \left[\frac{F(x_1,y_1)-F(x_1,y_0)}{y_1-y_0}\right] f_2(x_0,y_0)\right]2h^2$$

el método en general queda de la siguiente forma;

$$X_{n+2} = X_n + F(X_n)2h + \left[\left[\frac{F(x_{n+1},y_{n+1})-F(x_n,y_{n+1})}{x_{n+1}-x_n}\right] f_1(x_n,y_n) + \left[\frac{F(x_{n+1},y_{n+1})-F(x_{n+1},y_n)}{y_{n+1}-y_n}\right] f_2(x_n,y_n)\right]$$

y todo el método se multiplica por $2h^2$, para asi poder obtener un método mas exacto. luego, X_1 se aproxima por el método Euler y se busca tener $X = (0,1)$ con 200 iteraciones por el (método 1) obteniendose la grafica, que se muestra acontinuación;

Ahora utilizando el (método 2), con 200 iteraciones, se puede obtener la siguiente grafica que se muestra acontinuación.

Luego se hace una comparación con los métodos trabajados, el cual mostraremos acontinuación;

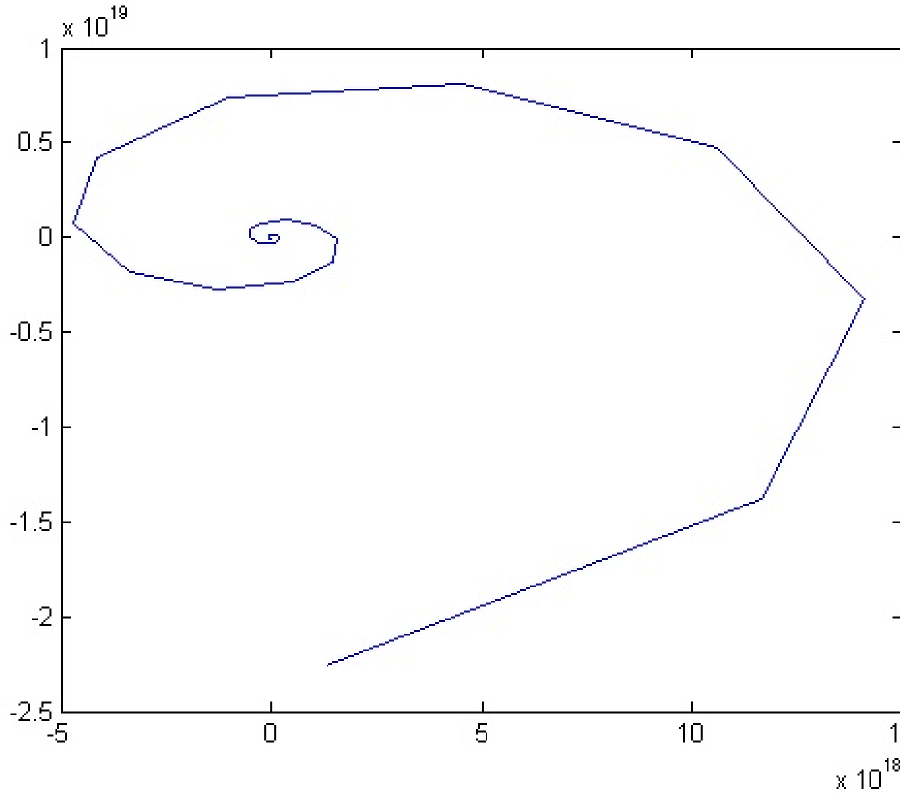

Figura 3.1: Caption for OLZ3WY02-1

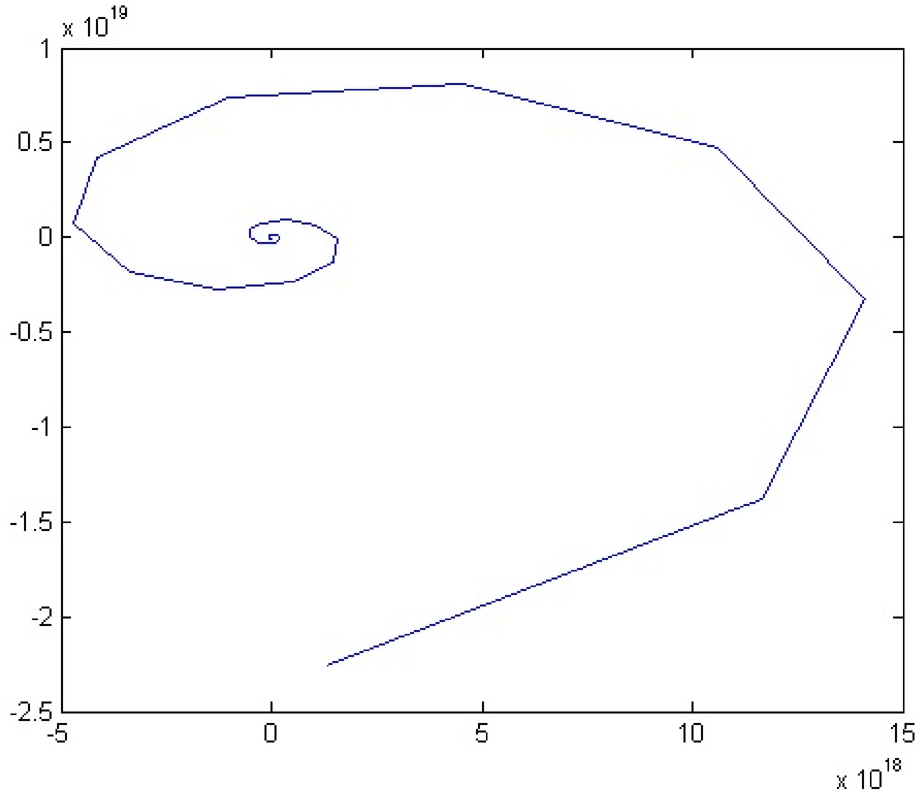

Figura 3.2: Caption for OLZ3WY03-1

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capitulo se aplicaran los resultados analizados anteriormente con ejemplos de sistemas dinamicos lineales y no lineales, que se diseñaron en Octave, es un programa libre para realizar cálculos numéricos. Este software permite ejecutar órdenes en modo interactivo, el cual nos permite ver la convergencia de cada simulación, utilizando el método sujerido en este trabajo.

4.1. Sistemas dinamicos

Para evaluar la teoria asociada al método de Euler y series de Taylor de varias variables, desarrollado en el presente trabajo se planteo varios sistemas dinamicos, que se plantea para evaluar el desempeño de cada error, mediante ecuaciones diferenciales lineales y no lineales , a partir de un proceso de modelacion, en el software Octave.

Octave, como su nombre lo indica es un equivalente libre de MATLAB. Desarrollé aquí los sistemas dinamicos el cual me permite realizar a cada sistema su propio codigo y poderlo ver en 3D.

La Espiral, muestra un sistema lineal, el cual se muestra cada una de sus graficas la cual denominamos (espiral-1) y (espiral-2). Se puede expresarse también como una ecuación polar simple.

$$\begin{aligned} &x' = -y - z; \\ &y' = x + ay; \\ &z' = -b + z(x - c); \end{aligned}$$

Lorenz, es un sistema determinista, el cual mostraremos sus respectivas graficas, las denominamos (Lorenz-1) y (Lorenz-2). Lo que significa que si se conocen los valores iniciales exactos de sus variables, en teoría, se puede determinar sus valores futuros a medida que cambian con el tiempo. Se empieza por la elección de este modelo algunos valores para x, y, z, y luego hacerlo de nuevo con diferentes valores, entonces se llega rápidamente a los resultados.

$$a = 10; , b = 28, c = 8/3;$$

$$\begin{aligned} x' &= a(-x + y); \\ y' &= x(b - z) - y; \\ z' &= xy - cz; \end{aligned}$$

Rossler, es un sistema dinamico simples de 3 dimensiones continuas, el cual mostraremos sus graficas respectivas, las denominamos (Rossler-1) y (Rossler-2). Las ecuaciones se derivaron originalmente para describir la cinética química lejos del equilibrio, x , y , z representan las cordenadas. El término no lineal mínimo es el último término de la tercera ecuación del sistema mostrado acontinuación.

$$a = 0{,}2; , b = 0{,}2; , c = 5{,}7;$$

$$\begin{aligned} x' &= -y - z; \\ y' &= x + ay; \\ z' &= b + z(x - c); \end{aligned}$$

4.2. Metodos utilizados

La siguiente notación, son las condiciones iniciales para desarrollar cada método;

$$X_n = (x_n, y_n, z_n) \tag{4.1}$$

El primer método que aplicamos es:

$$\begin{aligned} X_{n+2} = X_{n+1} + h(4F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}) \\ - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Este método aunque es facil de implementar y corregir, pero es mucho mas inestable en las particiones que se deben tomar y tiene mucho error en sus convergencia.

El segundo método que se aplica es el que mostraremos acontinuación:

$$X_{n+2} = X_{n+1} + h(F(X_{n+1}) + (((F(X_{n+1}) - F(x_n, y_{n+1}, z_{n+1})))/(x_{n+1} - x_n))F1(X_{n+1})$$

$$+((F(X_{n+1}) - F(x_{n+1}, y_n, z_{n+1}))/(y_{n+1} - y_n))F2(X_{n+1}) + ((F(X_{n+1})$$

$$- F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_n))/(y_{n+1} - y_n))F3(X_{n+1}))h) \tag{4.3}$$

Este método es mas estable y mantiene mas sus forma, pero tiene mas error que el primer metodo mostrado anteriormente y es un poco mas dificil de programar.

4.3. Ejemplo numerico

los métodos A y B se implementaron en Octave, y se pueden ejecutar en Matlab, se aplicaron a diferentes sistemas dinamicos primero a uno lineal, una espiral, no lineal, en este caso los osciladores de Rössler y Lorenz. Las graficas muestran cada oscilador aproximado por los métodos A y B respectivamente, estos sistemas son autonomos, si se quiere llevar a un sistema no autonomo, la deducción del método se hace en R^4

Se aproximo el oscilador de Lorenz

$$\begin{aligned} x' = &\quad -y - z; \\ y' = &\quad x + ay; \\ z' = &\quad b + z(x - c); \end{aligned}$$

con los parametros $a = 0{,}2$;, $b = 0{,}2$;, $c = 5{,}7$; y datos iniciales $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 1)$ este sistema es caotico y, por ser no lineal, muy sensible al error del método numérico; se hicieron 200 iteraciones para aproximar los valores (x, y, z) en $t = 10$ (con $n = 200$) primero por Euler y por los métodos A y B, en las siguientes tablas se presentan las ultimas 5 iteraciones.

Método de Euler

n	x_n	y_n	z_n
196	1,3813	1,3427	0,0490
197	1,3117	1,4252	0,0484
198	1,2380	1,5050	0,0478
199	1,1603	1,5820	0,0471
200	1,0789	1,6558	0,0464

.

Método A

n	x_n	y_n	z_n
196	1,4647	−3,3381	0,0411
197	1,6295	−3,2983	0,0424
198	1,7923	−3,2498	0,0437
199	1,9526	−3,1927	0,0452
200	2,1100	−3,1270	0,0467

.

Método B

n	x_n	y_n	z_n
196	1,3331	−2,5881	0,0412
197	1,4596	−2,5440	0,0422
198	1,5836	−2,4930	0,0433
199	1,7049	−2,4354	0,0444
200	1,8231	−2,3712	0,0456

Acontinuación se mostraran las graficas obtenidas:

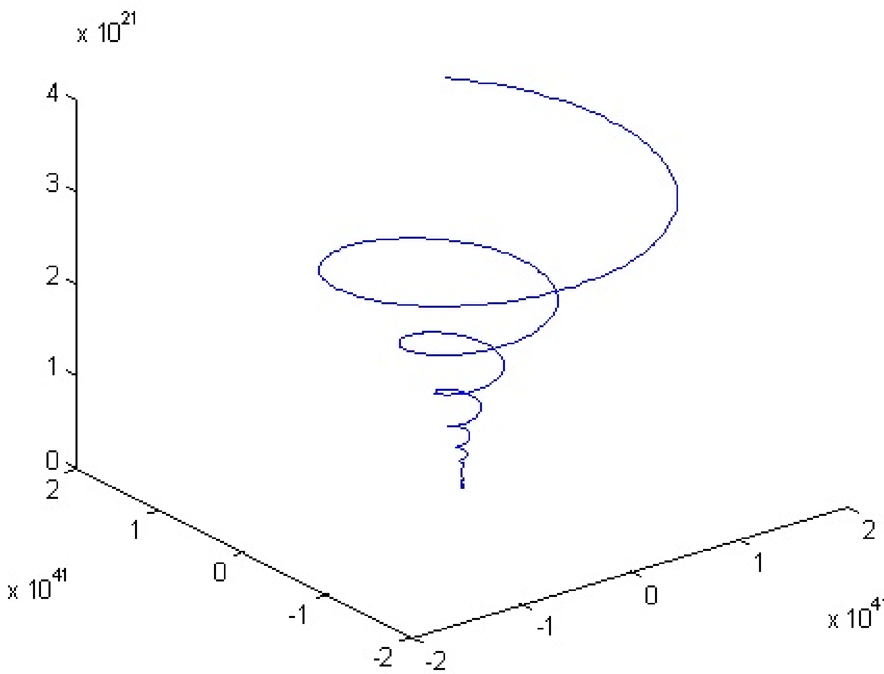

Figura 4.1: Espiral-1

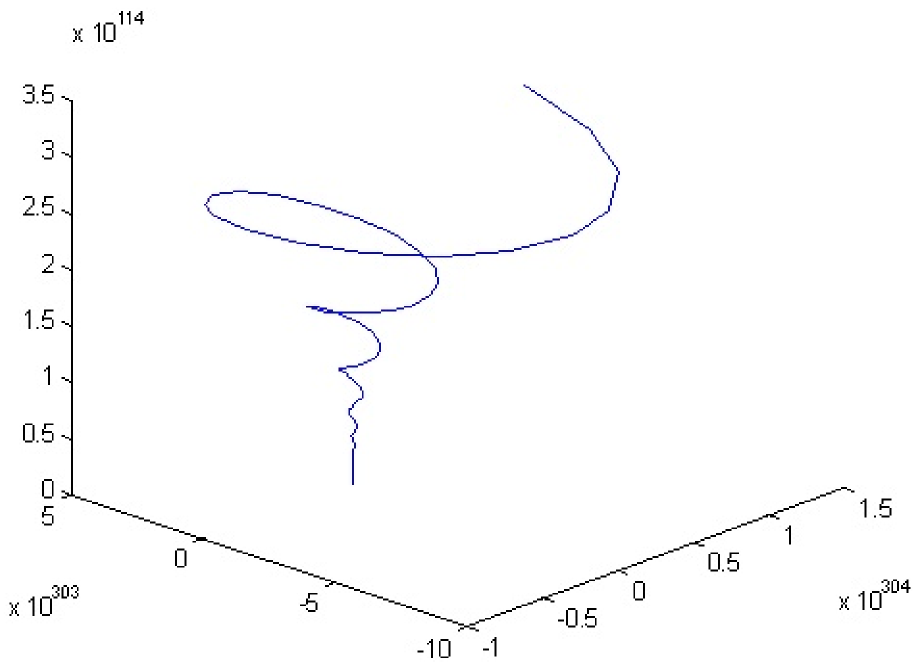

Figura 4.2: Espiral-2

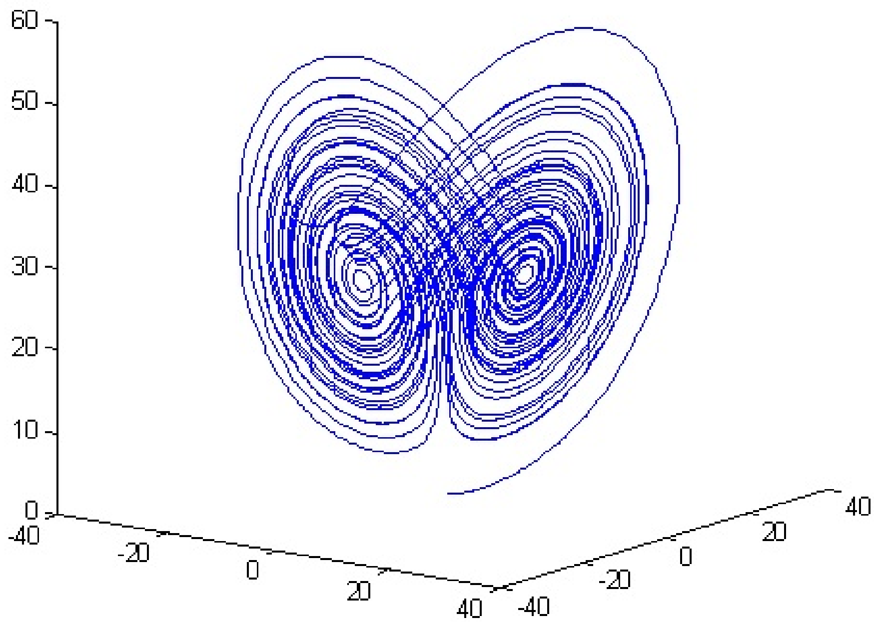

Figura 4.3: Lorenz-1

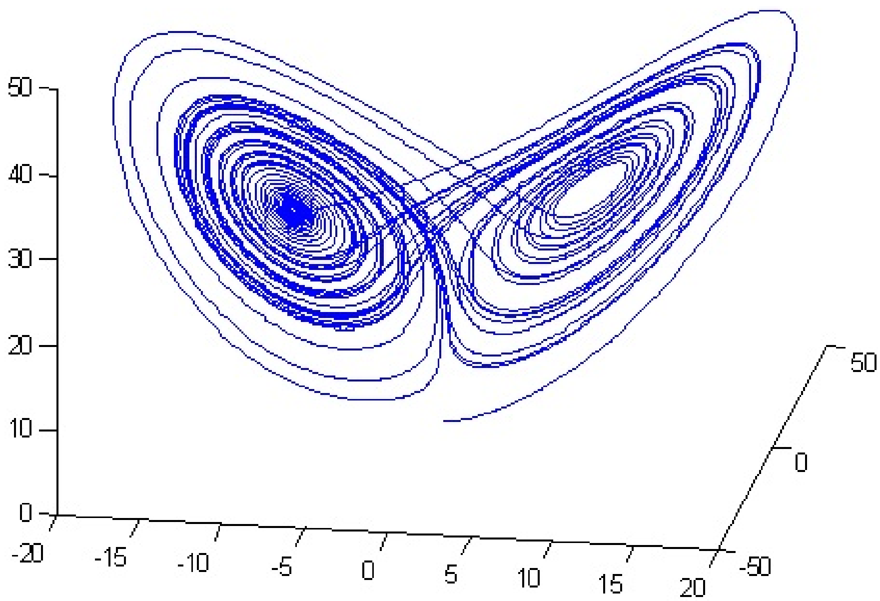

Figura 4.4: Lorenz-2

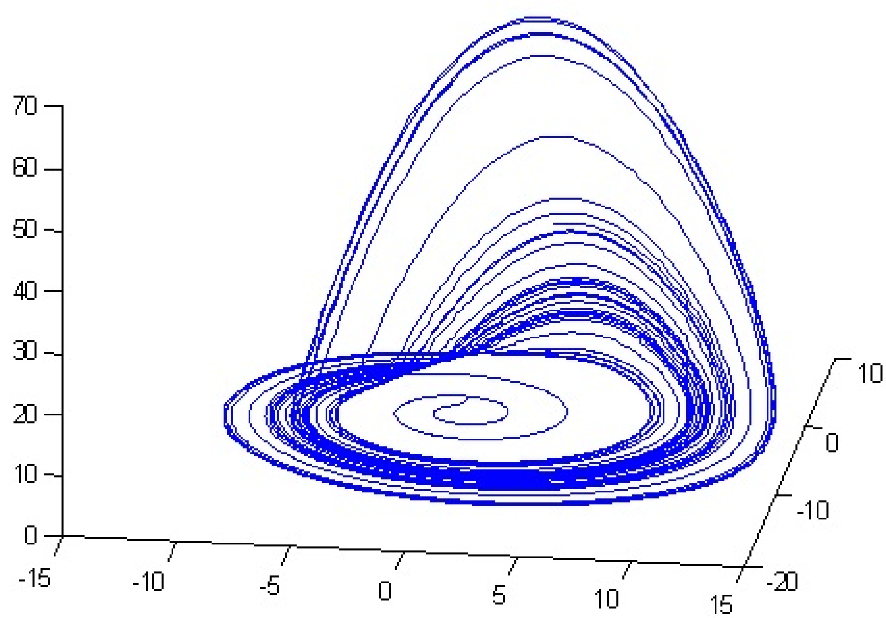

Figura 4.5: Roosler-1

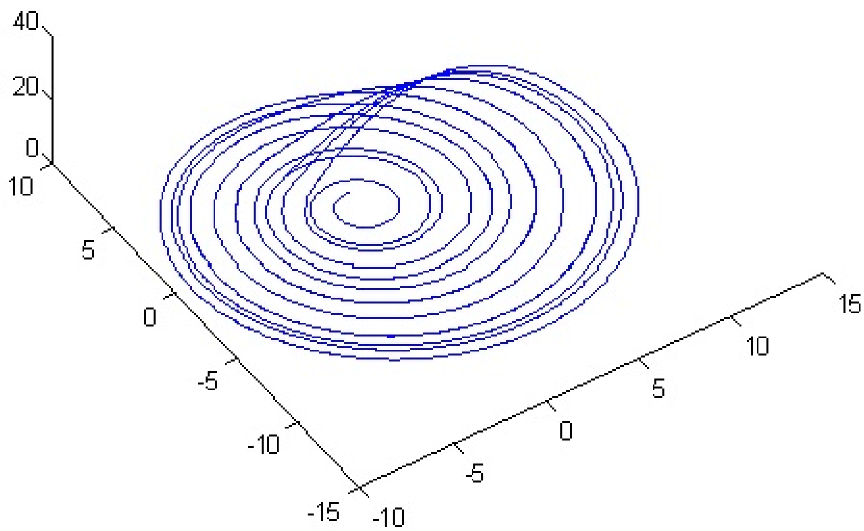

Figura 4.6: Roosler-2

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo, se recopilo métodos para poder asi aplicar los diferentes sistemas dinamicos lineales y no lienales y de este modo aplicar el método propuesto en este trabajo.

5.1. Conclusiones

- El primer metodo aunque tiene menos operaciones, ahi el error es mas grande, por lo tanto el problema es en la particion que se debe tomar n muy grande.
- Con los dos metodos se obtienen resultados parecidos, aunque en el primero acumula un error mas grande que en el segundo.
- Si el sistema es caotico y el método esta mal estructurado no va a converger.

Bibliografía

[1] 21 R. G. Bartle D. R.(1990). Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una Variable* . Ed. Limusa..

[2] Richard I. burden., J.Douglas.Faires-N.A.(2011). *Numerical Analysis.* Ed. 9.pag 10, pag 283.

[3] Dennis G. Zill. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* Ed. 6. International Thomson Editores.

[4] Boyce Diprima *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* Ed. 4.pag 54. Teorema 2.4.1