26.

FECHA	jueves, 30 de noviembre de 2017

Señores
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
BIBLIOTECA
Ciudad

UNIDAD REGIONAL	Sede Fusagasugá
TIPO DE DOCUMENTO	Trabajo De Grado
FACULTAD	Educación
NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO	Pregrado
PROGRAMA ACADÉMICO	**Licenciatura en Matemáticas**

El Autor(Es):

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS	No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN
Baquero Romero	Yair Alonso	1069748345
Jiménez Rivera	Edwin Adrian	1069751982

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

APELLIDOS COMPLETOS	NOMBRES COMPLETOS
Forero Díaz	Néstor Orlando

TÍTULO DEL DOCUMENTO
RECONTRUCCIÓN DE LA MAXIMIZACIÓN DEL MODELO RAMSEY ADAPTADO AL BIEN CAPITAL LIBREMENTE TRANSFERIBLE ENTRE INDUSTRIAS

SUBTÍTULO (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciado(s) en Matemáticas

AÑO DE EDICION DEL DOCUMENTO	NÚMERO DE PÀGINAS
23/11/2017	57

DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
ESPAÑOL	**INGLÉS**
1.Capital	1.Capital
2.Modelo de crecimiento	2. Growth model
3.Optimización	3.Optimization
4.Reconstrucción	4. Reconstruction
5.Bienestar	5. Wellness
6.Producción	6. Production

RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS
(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

RESUMEN

El desarrollo teórico del Modelo de Ramsey adaptado a un modelo bisectorial con bien capital movible es un tema económico poco comprensible y de difícil interpretación. Los documentos que hacen mención de él ofrecen un tratamiento limitado, superficial, corto y resumido. Por ende, este tipo de temas son muy poco consultados y trabajados, además de ser poco conocidos. Para que el campo de las ciencias económicas sea una alternativa de investigación es necesario que estos temas sean más accesibles a la comunidad académica.

El objetivo de este trabajo fue presentar una reconstrucción de ese desarrollo teórico en el que se pueda ofrecer una interpretación más completa y detallada, basada en el libro Variational Methods in Economics[1]. Con este fin, la pregunta de investigación es la siguiente: ¿Qué procedimientos económicos e interpretaciones económicas hacen más comprensible el modelo de Ramsey aplicado al bien capital libremente transferible entre industrias?

Dar solución a esta interrogante implica la realización de un estudio previo de la información seleccionada para tener un manejo y dominio, la reinterpretación de la teoría de la aplicación proponiendo ideas sustentadas en los antecedentes escogidos, completar los procedimientos matemáticos y complementar el análisis gráfico realizado. Entonces, los resultados del trabajo se derivan de describir minuciosamente los procesos matemáticos y de interpretación teórica.

Teniendo esto en cuenta, se puede observar como estos resultados poseen una mayor precisión en su interpretación encontrando así el contexto económico en el que es llevada la aplicación.

ABSTRACT

The theoretical development of the Ramsey Model adapted to a bisectorial model with movable capital good is an economic issue that is not very comprehensible and difficult to interpret. The documents mentioning it offer limited, superficial, short and summary treatment. Therefore, this type of topics are very little consulted and worked, besides being little known. For the field of economic sciences to be an alternative for research, it is necessary that these topics be more accessible to the academic community.

The objective of this work was to present a reconstruction of this theoretical development in which a more complete and detailed interpretation can be offered, based on the book Variational Methods in Economics [1]. To this end, the research question is as follows: What economic procedures and economic interpretations make the Ramsey model applied to capital good freely transferable between industries more understandable?

Solving this question implies carrying out a preliminary study of the selected information to have a management and mastery, the reinterpretation of the theory of the application, proposing ideas based on the chosen background, completing the mathematical procedures and complementing the graphical analysis carried out. Then, the results of the work derive from thoroughly describing the mathematical and theoretical interpretation processes.

Bearing this in mind, it can be observed how these results have a greater precision in their interpretation, thus finding the economic context in which the application is carried out.

AUTORIZACION DE PUBLICACIÒN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una “X”:

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.		X

2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	X	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	X	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, *"Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores"*, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

Información Confidencial:

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI ___ NO** _x__.
En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

LICENCIA DE PUBLICACIÒN
Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características: a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente). b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial. c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica. d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no

contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.

f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el "Manual del Repositorio Institucional AAAM003"

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia Creative Commons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.

j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia Creative Commons Atribución- No comercial- Sin derivar.

Nota: 0
Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).

Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)	Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)
1.reconstrucciondelamaximizaciondelMRadaptadoalBCLTEI.pdf	Texto
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS	FIRMA (autógrafa)
Baquero Romero Yair Alonso	Yair B
Jiménez Rivera Edwin Adrian	Edwin Jimenez

12.1.50

RECONSTRUCCIÓN DE LA MAXIMIZACIÓN DEL MODELO DE RAMSEY ADAPTADO AL BIEN CAPITAL LIBREMENTE TRANSFERIBLE ENTRE INDUSTRIAS

EDWIN ADRIÁN JIMÉNEZ RIVERA
YAIR ALONSO BAQUERO ROMERO

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
FUSAGASUGÁ-COLOMBIA
2017

RECONSTRUCCIÓN DE LA MAXIMIZACIÓN DEL MODELO DE RAMSEY ADAPTADO AL BIEN CAPITAL LIBREMENTE TRANSFERIBLE ENTRE INDUSTRIAS

EDWIN ADRIÁN JIMÉNEZ RIVERA
YAIR ALONSO BAQUERO ROMERO

ASESOR:
NÉSTOR ORLANDO FORERO DÍAZ

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
FUSAGASUGÁ-COLOMBIA
2017

Índice

Índice de figuras

1. INTRODUCCIÓN

"Podemos tener una interpretación de la realidad donde sea posible que las cuentas de la economía se puedan alterar, al menos eventualmente, por las imágenes de la poesía"

— **Mauricio García Villegas**

El presente documento corresponde al trabajo investigativo realizado en la modalidad de tesis y hace referencia a la reconstrucción teórica de una aplicación en el campo de las ciencias económicas. Trata, en concreto, del análisis del Modelo de crecimiento óptimo de Ramsey adaptado al Modelo de crecimiento bisectorial de Uzawa bajo la premisa del capital movible.

La praxis investigativa en el programa de Licenciatura en Matemáticas en relación con el área de la economía es escaza y, la trascendencia y utilidad de la teoría matemática en este caso son poco conocidas. Por ello, este trabajo tiene el propósito de ser un estudio introductorio a la investigación sobre esta área, además de poder constituir una referencia bibliográfica para futuras investigaciones. Todo lo anterior motivó la elección del tema y determinó el interés por mostrar como las teorías matemáticas del Control óptimo y de Variaciones eras utilizadas en el análisis económico. Para delimitar esta elección, se optó trabajar en la teoría de crecimiento económico centrando la atención en un caso particular presentado en el libro *Variational Methods in Economics* [1].

Sin embargo, para cumplir ese propósito se requiere que el tema tratado en este trabajo sea claro y detallado. Entonces, el principal objetivo es reconstruir en detalle el desarrollo teórico de la aplicación del Modelo de crecimiento óptimo en un Modelo de crecimiento bisectorial en el caso en el que el bien capital es libremente transferible. Se hace necesario presentar un desarrollo completo de los procedimientos y resultados obtenidos matemáticamente, brindar una interpretación más detallada de esos desarrollos y ofrecer una explicación más completa del análisis económico realizado, además de reunir y seleccionar la información más relevante del tema para un previo estudio y describir los resultados generales del proceso de optimización en la aplicación. Así, se reúnen varias fuentes de información, en su mayoría libros y artículos, y se escogen las más relevantes de acuerdo a su proximidad con el tema de estudio. Luego se estudia la teoría de la aplicación y se proponen ideas sustentadas en los antecedentes escogidos para ser agregadas en cada punto de la reconstrucción y se realizan los procedimientos matemáticos que hacen falta.

En los siguientes apartados es posible encontrar la definición del problema de investigación relacionada con la aplicación económica, los antecedentes en los que se basa el análisis del escenario económico y la teoría y conceptos necesarios para interpretar el desarrollo teórico de los modelos de crecimiento. También se encuentran la metodología llevada a cabo en el trabajo y, principalmente, la reconstrucción del desarrollo teórico de la aplicación económica, la descripción de los resultados generales del proceso de optimización en la aplicación y las conclusiones de este trabajo.

2. RESUMEN

El desarrollo teórico del Modelo de Ramsey adaptado a un modelo bisectorial con bien capital movible es un tema económico poco comprensible y de difícil interpretación. Los documentos que hacen mención de él ofrecen un tratamiento limitado, superficial, corto y muy resumido. Por ende, este tipo de temas son muy poco consultados y trabajados, además de ser poco conocidos. Para que el campo de las ciencias económicas sea una alternativa de investigación es necesario que estos temas sean más accesibles a la comunidad académica.

El objetivo de este trabajo es presentar una reconstrucción de ese desarrollo teórico en el que se pueda ofrecer una interpretación más completa y detallada, basada en el libro *Variational Methods in Economics*[1]. Con este fin, la pregunta de investigación es la siguiente: *¿Qué procedimientos económicos e interpretaciones económicas hacen mas comprensible el modelo de Ramsey aplicado al bien capital libremente transferible entre industrias?* En este caso, es de mencionar que el análisis matemático implica un manejo previo de conceptos sobre teoría de crecimiento económico, microeconomía y macroeconomía, y de matemática avanzada como lo es la teoría de control óptimo.

Dar solución a esta interrogante implica la realización de un estudio previo de la información seleccionada para tener un manejo y dominio, la reinterpretación de la teoría de la aplicación proponiendo ideas sustentadas en los antecedentes escogidos, completar los procedimientos matemáticos y complementar el análisis gráfico realizado. Entonces, los resultados del trabajo muestran que es fundamental e indispensable tener ciertas bases teóricas que faciliten la lectura del desarrollo teórico y, principalmente, que la interpretación mejora significativamente y ofrece una mejor idea de lo que sucede al analizar el escenario económico en el que es llevada la aplicación.

Teniendo esto en cuenta, es recomendable dejar registro de cualquier nueva idea o interpretación que se tenga a modo de bitácora y ponerlas en debate y discusión. También lo es conservar el formalismo del desarrollo estudiado de los modelos económicos y manejar una estructura de análisis consecutiva organizada de las deducciones concebidas.

Palabras claves

Aplicación, modelo de crecimiento, economía, análisis económico, reconstrucción, optimización, interpretación, sectorial, bien capital, bienestar, consumo, movible, inversión, utilidad, bienes, producción.

3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

3.1. Planteamiento

Al cursar la carrera de Licenciatura en Matemáticas, fueron vistos algunos tópicos y temas en donde existía aplicabilidad de las distintas ramas de la Matemática. Fue entonces de interés ver como trascendía esta de su estudio netamente teórico y era de utilidad para explicar hechos y fenómenos de la realidad. También se podía observar como en semilleros de investigación surgían propuestas de trabajo y alternativas para aplicar la matemática. Algunos de estos trabajos se basaban en el estudio de la física, la didáctica, los fenómenos biológicos y otros. Surgió la curiosidad de conocer cómo eran aplicadas las matemáticas en otros campos de investigación y pensando en las posibilidades futuras de investigar se prestó atención a la trascendencia matemática en las ciencias económicas. Este campo de la ciencia presentaba escaza exploración investigativa en el programa. Inicialmente no se disponía de mucha información al respecto, no obstante, se recibieron sugerencias de compañeros docentes y se eligió investigar un modelo matemático de economía que involucraba una parte de las matemáticas avanzada en complejidad; el cálculo de variaciones. Este modelo se denominaba Modelo de Ramsey y su aplicación al modelo bisectorial donde el bien capital es libremente transferible se seleccionó como tema de investigación, por lo que se optó estudiar la teoría desarrollada en el libro [1]. Sin embargo, este desarrollo era poco entendible y detallado, dificultando de manera significativa su interpretación.

3.2. Formulación

Revisando la teoría desarrollada en el libro [1] sobre la aplicación del modelo de crecimiento óptimal de Ramsey a un modelo bisectorial en el que el bien de inversión es movible notamos que las descripciones relativas a los fenómenos económicos y los resultados matemáticos en esta son poco comprensibles y presentan dificultad en su interpretación. Se requiere entonces de un tratamiento teórico más detallado y con descripciones más completas para un mejor estudio de este tema.

Pregunta de investigación

¿Qué procedimientos económicos e interpretaciones económicas hacen mas comprensible el modelo de Ramsey aplicado al bien capital libremente transferible entre industrias?

3.3. Justificación

El presente trabajo es llevado a cabo por el vacío explicativo que posee este tema y la dificultad que presenta la interpretación del desarrollo teórico de esta aplicación económica. Además, dada la escaza disponibilidad de información resultado de investigaciones relacionadas con esta área, es necesario un documento introductorio a la investigación de las ciencias económicas que pueda constituir una referencia bibliográfica para demás compañeros del programa.

3.4. Objetivos

3.4.1. General

Reconstruir en detalle el desarrollo teórico del Modelo de crecimiento óptimal de Ramsey aplicado a un modelo económico bisectorial donde el bien capital es libremente transferible entre industrias.

3.4.2. Específicos

- ☛ Reunir y seleccionar información con más relevancia para estudiar e interpretar la teoría de variaciones, de control óptimo y la teoría de crecimiento económico.
- ☛ Presentar un desarrollo completo de los procedimientos y resultados obtenidos matemáticamente en cada punto de la aplicación.
- ☛ Ofrecer una interpretación más detallada del desarrollo matemático de la aplicación y una explicación más completa del análisis que recibe ese escenario económico.
- ☛ Describir desde el punto de vista económico los resultados obtenidos durante proceso de optimización del modelo bisectorial mediante la interpretación de diagramas de fase.

4. ESTADO DEL ARTE

4.1. Marco de Antecedentes

OPTIMAL GROWTH AND THE GOLDEN RULE IN A TWO-SECTOR MODEL OF CAPITAL ACCUMULATION

Senouci(2011), Realizo un estudio en Paris School of Economics, con el objetivo de contribuir a la literatura sobre crecimiento optimo de dos sectores, resolviendo, por primera vez el problema de Ramsey con una función de utilidad cóncava en un entorno de dos sectores sin progreso técnico en el caso discreto. Para el cumplimiento de este propósito presenta el modelo, las anotaciones necesarias, así como la suposición de intensidad de capital, describe el único estado estacionario y la regla de oro, a continuación analiza el patrón de transición de una economía que inicialmente tiene menos capital de lo que se desea a largo plazo, en el caso de que el sector de consumo sea siempre relativamente intensivo en capital, y el caso en que el sector de inversión es siempre relativamente intensivo en capital. Finalmente analiza los efectos dinámicos de los choques en la tasa de descuento subjetiva.
Obteniendo los siguientes resultados de su investigación: cualquier economía que comience a partir de una relación de capital k_0 que sea menor que la relación equilibrada k_* monótonamente converge al estado estacionario (k^*, p^*). La transición óptima siempre tiene lugar con aumentos en los salarios relativos, independientemente de cualquier supuesto de intensidad de capital. El alquiler relativo disminuye a medida que se acumula el capital. El capital se volvería más barato a medida que se haga más abundante junto con la transición. Si el sector de consumo es relativamente intensivo en capital, entonces las ganancias de capital son naturales durante la transición; pero si el sector de inversión es relativamente intensivo en capital, la transición tiene lugar con una disminución suave en el precio relativo del capital. y Finalmente al considerar el progreso técnico en el modelo presentado, gracias a la centralidad del sector de capital en la expresión de la regla (cuasi)-oro probablemente inducirá diferentes efectos sobre el consumo y el PIB, pero también sobre los salarios, los precios relativos, los precios de los activos, etc.
Esta investigación muestra resultados importantes del estudio de un modelo bisectorial, ademas de ilustrar el lugar que ocupan estos en el estudio del crecimiento económico

MATHEMATICAL OPTIMIZATION AND ECONOMIC THEORY

Intriligator (2002), a través de la sociedad de matemática industrial y aplicada (SIAM) presenta en los Angeles California una reedición íntegra de la obra publicada por primera vez por Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1971.
Libro que proporciona una introducción y un estudio autónomo de las técnicas de programación y control matemático y sus aplicaciones a problemas estáticos y dinámicos en la economía, respectivamente. Se distingue por cubrir en profundidad tanto los pro-

blemas estáticos como los problemas dinámicos de optimización y las técnicas de su solución, presentado muchas aplicaciones de estas técnicas a la economía.
El texto comprende una cantidad considerable de temas para mostrar sus importantes interrelaciones y la lógica del desarrollo. A través de este se encuentran diversos problemas que exigen la manipulación de técnicas, pero en su mayoría son problemas de enseñanza o de investigación, que sugieren nuevas ideas y ofrecen un desafío a los interesados en el material.

El desarrollo de su trabajo muestra esta divido en las siguientes partes : La I como capítulo introductorio, que analiza la relación entre los problemas economizadores y la teoría económica. La II y III se refieren a problemas estáticos, definidos en un punto en el tiempo. Especificamente la II presenta técnicas de optimización estática (programación), que incluyen programación clásica, programación no lineal, programación lineal y teoría de juegos y la III presenta aplicaciones de estas técnicas a problemas en la asignación económica, que incluyen la teoría del hogar, la teoría de la empresa, el equilibrio general y la economía del bienestar. La IV y V se refieren a problemas dinámicos, definidos en un intervalo de tiempo. Exactamente la IV presenta técnicas dinámicas de optimización (control), que incluyen el cálculo de variaciones, la programación dinámica, el principio máximo y los juegos diferenciales y la V presenta las aplicaciones de estas técnicas a un problema de asignación económica a lo largo del tiempo, a saber, el del crecimiento económico óptimo.
De todo su trabajo se hace referencia a esta ultima (Parte V, aplicaciones de la optimización dinámica), por su capitulo de crecimiento económico optimo, el cual describe los supuestos y las condiciones del modelo de crecimiento neoclásico, luego hacen uso de la técnicas de optimización dinámica para analizar el crecimiento económico óptimo neoclásico, posterior a esto expone el modelo de crecimiento de dos sectores presentando las variables económicas y sus relaciones estáticas y dinámicas para resolver el funcional de utilidad con descuento, por ultimo generalizan el mismo modelo para permitir diferentes tipos de bienes de capital.

INTRODUCTION TO THE THEORY OF ECONOMIC GROWTH

Ramanathan(1982) profesor emérito en la Universidad de California, San Diego. Publica este libro como consecuencia de años de enseñanza e investigación en el área de crecimiento económico. No se encontraba satisfecho con los últimos libros publicados sobre el tema, por ser trabajos desiguales en cuanto a su dificultad técnica, que si bien eran excelentes, resultaban ser dificiles para los estudiantes de posgrado de primer año y para los estudiantes avanzados, por otro lado encontraba libros expositivos como el de Solow que se iban al otro extremo (en cuanto a complejidad), entonces su objetivo principal fue cerrar esta brecha y lanzar un texto apropiadamente al nivel de un estudiante típico matriculado en un curso inicial de teoría del crecimiento.
La cobertura de la publicación incluye un capítulo sobre comercio internacional y creci-

miento económico y otro sobre la velocidad del ajuste. El libro comienza con los modelos simples de Harrod-Domar, Solow-Swan y gradualmente lleva al lector a modelos más complicados que incluyen progreso técnico, dinero y crecimiento, crecimiento óptimo, modelos de dos sectores. Se referencia específicamente los capítulos 9 y 10 que proporcionan introducciones al crecimiento óptimo y modelos de crecimiento de dos sectores, respectivamente. Puntualmente el noveno expone la optimizacion inter-temporal, las interpretaciones económicas y el análisis del diagrama de fase del crecimiento optimo. El décimo muestra las condiciones y las relaciones entre las variables comprendidas en el modelo estático y dinámico de dos sectores, la estabilidad de equilibrio a largo plazo y la extensión al caso de la tasa de ahorro variable.

ELEMENTS OF DYNAMIC OPTIMIZATION

Chiang(1992) economista matemático estadounidense y profesor emérito de economía en la Universidad de Connecticut publica este trabajo como continuación de los Métodos Fundamentales de la Economía Matemática, fiel a su estilo mantiene su paciencia expositiva, con el deseo de brindar claridad y legibilidad. La discusión de las técnicas matemáticas siempre se refuerza con ilustraciones numéricas, ejemplos económicos y problemas de ejercicio.

En los ejemplos se evidencia el uso de modelos económicos apropiados en la ilustración de la función de las técnicas matemáticas particulares en estudio. Incluye tanto aplicaciones recientes a la época de publicación como clásicas, con el objetivo de estudiar los nuevas panoramas económicos, sin dejar de lado los artículos clásicos excelentes para fines ilustrativos porque la estructura del modelo esta despejada con suposiciones complicadas secundarias. Ademas, al combinar modelos económicos antiguos y nuevos proporciona una visión interesante del desarrollo del pensamiento económico.

A pesar de trabajar el calculo de variaciones y la teoría de control optimo minuciosamente y explicar la programación dinámica en tiempo discreto es un texto introductorio de técnicas matemáticas y problemas económicos útiles en el propósito de explorar modelos y situaciones económicas mas complejas.

En especial se cita el capitulo cinco, horizonte de planificación infinito en el que se expone el modelo de Ramsey, describiendo los supuestos y relaciones económicas necesarias para establecer el funcional objetivo. Se aplica las técnicas de calculo variacional para determina la solución del modelo, la cual es interpretada mediante el diagramas de fase.

APUNTES DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

Sala-i-Martín (2000), economista estadounidense y profesor de la cátedra de economía en la Universidad de Columbia, publicó un libro como resultado de recopilar varios apuntes de clase, motivado por algunos de sus compañeros y profesores colegas. En este es presentada una descripción del pensamiento económico contemporáneo en temas de crecimiento económico con el propósito de acercar esta teoría al estudiante de economía. Entre otras cosas, se analizan con detalle los modelos de tasa de ahorro e inversión constantes, la economía de mercado, los modelos lineales y de crecimiento endógeno, y los modelos neoclásicos de optimización. Sin embargo, este libro se basa en la metodología y los conceptos desarrollados por los economistas neoclásicos de la segunda mitad del siglo XX.

En el capítulo primero se describe el modelo de Solow y Swan y se introducen los conceptos más relevantes que se encontrarán a lo largo del libro. Además, este ofrece una idea de cómo se plantea un modelo de tipo neoclásico y las implicaciones que tiene en las interrelaciones socio-económicas. Ya en el capítulo quinto, la teoría que es analizada trata del crecimiento óptimo con el enfoque neoclásico en el que el modelo de optimización del bienestar intertemporal o Modelo de Ramsey es planteado. En este punto, son varios los supuestos modificados y otros agregados, por cuanto el modelo es más complejo y requiere de una teoría matemática más avanzada.

Evidentemente, se trata de un texto que ofrece un recurso teórico valioso. El tratamiento que recibe el tema por parte del autor es conciso y muy concreto, aunque el nivel matemático que demanda no es, en principio, fácil de manejar. La descripción que se encuentra en él con relación al Modelo de Ramsey es ilustrativa y las ideas bien organizadas en ambos apartados, además de brindar una deducción detallada de cada expresión matemática desarrollada en el mismo.

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA Y TEORÍA ECONÓMICA

Bonifaz F. y *Lama R.* (1999), profesores de la Facultad de Economía y miembros del centro de investigación de la Universidad del Pacífico en Lima, Perú, recopilaron sus experiencias al dirigir el curso Métodos de Optimización Económica y las documentaron en el presente libro. Su realización tuvo como principal motivo la inaccesibilidad a textos universitarios en el mercado bibliográfico de ese país, escritos en español y que abarcaran el tema. De esta manera, estudiantes tanto de pregrado como de posgrado no tendrían tantas limitaciones al profundizar cualquiera de los temas desarrollados.

El texto pretende ser un documento introductorio a las técnicas matemáticas de optimización intertemporal más importantes aplicadas al análisis económico, tales como cálculo de variaciones, control óptimo y programación dinámica, y presenta la teoría de las aplicaciones económicas. Además, tiene la finalidad de constituir un aporte bibliográfico accesible para los profesionales que deseen estudiar ciencias económicas o reforzar su conocimiento en esta área.

El capítulo de interés en el documento se centra enteramente en la teoría de control óptimo y abarca los problemas de optimización y aplicaciones en algunos. Se presenta en primer lugar el problema de control óptimo básico; se describen las variables, las trayectorias temporales y se realizan gráficos de las sendas de esas variables. Posteriormente, se discute el tratamiento del problema comenzando por explicar cada condición al problema que se debe cumplir para que este sea factible. Después es realizada una comparación entre este problema y el de Cálculo de variaciones. Por último, se desarrolla el problema de control óptimo para el caso de un horizonte temporal infinito, de especial importancia para el manejo del tema de trabajo, pues en este, se presta atención a la aplicación del modelo neoclásico de crecimiento óptimal o Modelo de Ramsey.

Lo anteriormente expuesto constituye las razones de tomar este libro como referencia para el trabajo realizado, facilitando una mejor interpretación del tratamiento del problema de Ramsey en aspectos como la definición de los entes sociales, el comportamiento de las variables que reciben una descripción económica, su inmediata relación con la teoría matemática ubicada en el mismo apartado y, lo más importante: la interpretación económica lógica consecuente a la deducción de ecuaciones de equilibrio y la construcción de gráficas que explican la dinámica de crecimiento de la economía.

ON A TWO-SECTOR MODEL OF ECONOMIC GROWTH

Uzawa H. (1961), profesor emérito de la Universidad de Stanford y economista japonés, creó un artículo publicado en el Centro de Información Técnica de Defensa en Virginia, EE. UU, como resultado de una investigación apoyada por la Oficina de Investigación Naval bajo la tarea *NR-047-004* sobre el proceso de crecimiento en un modelo de acumulación de capital de dos sectores y el problema de estabilidad del balance de un crecimiento económico en equilibrio bajo las hipótesis neoclásicas. De forma preliminar, se formula el modelo neoclásico de crecimiento económico similar al desarrollo dado por Solow y Swan en términos de la función de producción agregada. Esta función específica la relación entre el producto y los factores de producción, y la acompaña el supuesto de que el producto se compone de unidades homogéneas equivalentes al capital o, por lo menos, la relación entre los precios de ambas es alguna constante.

La economía consiste en dos tipos de bien; de inversión y de consumo, producidos por dos factores; capital y trabajo y los precios de ambos bienes se determinan a fin de suplir el requisito de demanda. Se supone además que el capital se deprecia a una tasa fija, la tasa de crecimiento del trabajo es constante y se determina exógenamente, el ingreso de las empresas se gasta únicamente en bienes de inversión, el de los trabajadores en bienes de consumo, y la producción está sujeta a las condiciones neoclásicas. Bajo tales hipótesis, entonces, la investigación intenta mostrar que el estado de crecimiento estable existe y el proceso de crecimiento, comenzando con una composición arbitraria de capital y mano de obra, se acerca a ese crecimiento estable siempre que el sector de bienes de consumo sea más intensivo en capital que el sector de bienes de inversión.

Los resultados de este estudio se resumen en que dada una tasa de crecimiento de la mano de obra λ y una tasa de depreciación del capital μ que cumplen el requisito de que sumados se encuentren entre un conjunto de valores razonables de la producción marginal del bien de inversión, entonces existe al menos una relación capital-trabajo equilibrada y, para el proceso de crecimiento que se inicia en una composición arbitraria inicial de capital-trabajo, la relación capital-trabajo agregado $k(t)$ converge a una relación capital-trabajo equilibrada. Recibe especial atención una parte del desarrollo teórico que trata sobre la relación de precios de los productos asociada a la relación del salario-alquiler y a las asignaciones de minimización de costos. Se definen también los valores factibles de esas variables bajo ciertas restricciones, lo que es de gran utilidad para este trabajo.

4.2. Marco Teórico

En la reconstrucción del modelo se tuvieron en cuenta diversas teorías y puntos de vista de diferentes autores como: Xavier Sala i Martín, George Hadley y Murray Kemp, Jose Luis Bonifaz y Ruy Lama; en cuyos textos se encuentra información sobre los fundamentos neoclásicos del modelo de Solow-Swan, modelo de Ramsey y teoría de control. Conozcamos más respecto a ello.

FUNDAMENTOS NEOCLÁSICOS DEL MODELO DE SOLOW-SWAN

En el estudio de un modelo es indispensable conocer las bases y supuestos que lo sustentan para ejecutar procedimientos de acuerdo al área de trabajo delimitada por estos. Además de dar el contexto en el que se deben interpretar los resultados o deducciones alcanzadas. Por tal razón se comienza con la identidad de renta nacional, a la cual se reduce por medio de supuestos para ilustrar el modelo en cuestión. Entonces si:
$t \rightarrow$ tiempo en años
$Y_t \rightarrow$ Producto Interno Bruto
$C_t \rightarrow$ Consumo privado de las familias
$I_t \rightarrow$ inversión
$G_t \rightarrow$ gasto público
$NX_t \rightarrow$ exportaciones netas.
Se puede escribir la identidad nacional como:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + NX_t \tag{4.1}$$

mostrando que el producto interno bruto de un país en el año t puede ser divido en cuatro partes: la primera que compran las familias, C_t, la segunda que compran las empresas,I_t, la tercera la compra el gobierno,G_t, y finalmente la que se exporta al extranjero. Entonces, la parte de la izquierda puede ser interpretada como la oferta de la economía mientras los términos de la derecha se denominan componentes de la demanda agregada. Como cada uno de estos componentes presenta un comportamiento complejo dificultando el estudio de todos a la vez, el economista de acuerdo a sus intereses de investigación, decide aislar los que considere más importantes. Así; en este modelo se estudia el papel de la inversión en capital físico como impulsor esencial del crecimiento económico a largo plazo y determinar si la tasa de crecimiento se puede aumentar si el gobierno aumentará la tasa de inversión nacional. Para tal propósito se aísla la inversión de los demás aspectos de la economía, entonces se simplifica la identidad (4.1) bajo los siguientes supuestos: no hay exportaciones $NX_t = 0$ y el gobierno no gasta nada $G_t = 0$, es decir se plantea una economía sin gasto publico, cerrada porque no hay exportaciones, sin movimientos de capitales, por lo que la economía no puede pedir prestado, lo que implica invertir todo lo ahorrado dentro del propio país. De este modo la identidad nacional se reduce a

$$Y_t = C_t + I_t \tag{4.2}$$

Por lo tanto, cuando la economía está cerrada y no hay gasto público, el producto nacional se distribuye entre consumidores y inversores. Obsérvese que si restamos el consumo de los dos lados de (4.2) obtenemos que el ahorro (la producción o renta que no se consume) es igual a la inversión: $Y_t - C_t \equiv S_t = I_t$, *donde* S_t *es el ahorro. Por lo tanto, en una economía cerrada sin gasto público, el ahorro de las familias es igual la inversión o la demanda de las empresas* [1].

Se encuentra que la función de producción en la que se basa el modelo es neoclásica, la cual se revisa a continuación. El modelo, considera que en la encomia hay oferta o producción al combinar tres factores fundamentales (inputs). El primero es el factor trabajo, pero en la realidad hay diferentes clases de trabajo, por lo tanto distintos tipos de trabajadores, aspecto obviado al suponer a todos lo trabajadores idénticos y la suma de todos ellos se representa como L_t indicando la cantidad de trabajadores de la economía en el instante t. El segundo es el factor capital simbolizado por K_t. "El concepto de capital estará relacionado con las maquinas u otros utensilios físicos que utilizan las empresas en el proceso de producción (este concepto incluirá edificios, estructuras, instrumentos, ordenadores, material electrónico y un largo etcétera). Una característica de las maquinas es que son bienes materiales que las empresas compran a otras empresas "[2]. Y el tercero corresponde a la tecnologia, cuyo nivel se representa por A_t, la cual indican la proporción precisa en que se deben combinar capital y trabajadores.
Los factores de producción se distinguen por la siguiente característica "los bienes capital y trabajo son bienes rivales, mientras la tecnología no es rival. El concepto de rivalidad es muy importante. Se dice que un bien es rival sino puede ser utilizado por mas de un usuario a la vez. Si un bien puede ser Utilizado por mucha gente al mismo tiempo se dice que no es rival" [3].
Al reunir estos tres factores, se une para empezar a producir bienes finales, Y. Lo cual se puede puede representar mediante la siguiente función de producción

$$Y_t = \Psi\left(K_t, L_t, A_t\right) \tag{4.3}$$

Entonces, la producción que son los valores que entrega esta función, aumenta si se pone a trabajar mas bienes de capital, mas trabajadores o se mejora la tecnología. Como se supone a la tecnología como contante para continuar de acuerdo al propósito de "ver si se puede crecer para siempre simplemente invirtiendo una fracción constante de la producción" [4]. Mantener la tecnología constante implica que la fución de producción solamente depende de K_t, y L_t, razon por la cual se determina rescribir (4.3) como

$$Y_t = \Psi\left(K_t, L_t\right) \tag{4.4}$$

[1]SALA I MARTIN, Xavier. *Apuntes de crecimiento económico.* Barcelona España. Antoni Bosch. 2012. Pág 11.

[2]Ibíd. Pág 12.

[3]Ibíd. Pág 12.

[4]Ibíd. Pág 12.

donde, el capital y el trabajo son continuamente sustituibles.
Se indico que esta es una función de producción es neoclásica, lo que le implica cumplir la siguientes propiedades :

I). *función de producción presenta rendimientos constantes a escala. Algebraicamente, esto quiere decir que si doblamos la cantidad del factor trabajo y del factor capital, la cantidad de producto se dobla. Si multiplicamos K y L por una constante arbitraria, λ, entonces la producción también se multiplica por la misma constante:*

$$\Psi\left(\lambda K_t, \lambda L_t, A_t\right) = \lambda \Psi\left(K_t, L_t, A_t\right).$$

Matemáticamente, esta propiedad se conoce con el nombre de homogeneidad de grado uno.

II). *El segundo supuesto que caracteriza la función de producción neoclásica es que la productividad marginal de todos los factores de producción es positiva pero decreciente. Otra manera de decir lo mismo es que la producción presenta rendimientos decrecientes del capital y del trabajo cuando éstos se consideran por separado. A medida que añadimos trabajadores adicionales, sin cambiar el stock de capital, la producción aumenta, pero lo hace tanto menos cuantos más trabajadores tengamos ya trabajando. Lo mismo pasa con el capital: a medida que aumentamos el número de máquinas, la producción aumenta, pero lo hace tanto menos cuantas más máquinas tengamos ya.*

Algebraicamente, esto significa que el producto marginal del capital y del trabajo son positivos (el producto marginal de un factor es la derivada parcial de la producción con respecto al factor en cuestión)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial K} > 0, \frac{\partial \Psi}{\partial L} > 0,$$

y decrecientes (las segundas derivadas son negativas):

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial K^2} < 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial L^2} < 0.$$

III). *El tercer supuesto que debe satisfacer una función de producción neoclásica, $\Psi\left(\bullet\right)$, se refiere a un conjunto de requerimientos llamados condiciones de Inada. Estas exigen que la productividad marginal del capital se aproxime a cero cuando el capital tiende a infinito y que tienda a infinito cuando el capital se aproxima a cero,*

$$\lim_{K \to \infty} \frac{\partial \Psi}{\partial K} = 0 \quad , \quad \lim_{K \to 0} \frac{\partial \Psi}{\partial K} = \infty.$$

Condiciones análogas se aplican al trabajo,[5].

$$\lim_{L\to\infty}\frac{\partial\Psi}{\partial L}=0 \quad , \quad \lim_{L\to 0}\frac{\partial\Psi}{\partial L}=\infty.$$

otros supuestos que se hacen en el modelo de Solow y Swan son: las familias consumen una parte constante de su renta o producción, también se considera una tase de depreciación constante, pues la empresas no invierten simplemente para poseer mas capital, sino para utilizar en la producción futura, este nuevo capital puede ser destinado al aumento del stock de capital o para remplazar el capital que se deteriora durante el proceso de producción, viendo estas consideraciones en términos de contabilidad nacional se tiene que

la inversión bruta (la cantidad de output adquirido por las empresas,I_t*) es igual a la inversión neta (el aumento neto del stock de maquinaria o capital) más la depreciación. Si denotamos el aumento de capital como* $\dot{K}\equiv\frac{dK}{dt}$ *tenemos* $I_t=\dot{K}_t+\dot{D}_t$ *donde* D_t *es la depreciación. Para simplificar nuestro análisis, supondremos que en cada momento del tiempo, una fracción contaste de las maquinas,* δ*, se deteriora por lo que la depreciación total es igual a la tasa de depreciación* δ *multiplicada por la cantidad de maquinas existentes:* δK_t*. Esto nos permite escribir la anterior igualdad como* $I_t=\dot{K}+\delta K_t$*. El supuesto de depreciación constante también nos indica que las maquinas son siempre productivas mientras no se deterioran.*[6]

Por ultimo, se asume que toda la población trabaja y crece a una tasa exogena y constante $n=\frac{\dot{L}}{L}$.

MODELO DE RAMSEY

La formulación modelo de crecimiento económico de dos sectores, con capital libremente transferible entre industrias, se apoya en el modelo de Ramsey para poner en contraste las implicaciones de los supuestos que se hacen, por tal razón a continuación se expone este modelo para dar a conocer consideraciones que el desarrollo de la reconstrucción permite aclarar argumentos y supuestos que van apareciendo.

En el modelo de Ramsey de un sector la tasa de inversión, esto es, la tasa de variación temporal del stock de capital es una variable que la sociedad puede controlar como lo considere conveniente. Pero que no podia cambiar con el tiempo de cualquier forma. En pocas palabras Ramsey buscó una trayectoria temporal del stock del capital que maximizara determinado funcional de utilidad, satifaciendo ciertas limitaciones técnicas de producción

Entrando en detalle, en el mundo de Ramsey hay un solo bien homogéneo que se produce con la ayuda del stock de capital K y la fuerza de trabajo L. Sin embargo, se supone que la fuerza de trabajo es constante, de modo que la producción Y puede escribirse

[5]Ibíd. Pág 13-15.

[6]Ibíd. Pág 17,18.

como una función de una única variable $Y = \Psi(K)$. Se asumirá que Ψ,$\Psi \in C''$, es una función cóncava. Se asumirá también que no hay deterioro o depreciación del stock de capital. La producción se divide entre el consumo C y la inversión $\dot{K}\left(\equiv \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}\right)$. Así

$$C + \dot{K} = Y = \Psi(K)$$

por tanto que

$$C = \Psi(K) - \dot{K} \tag{4.5}$$

Se requiere que $C \geq 0$ (una tasa de consumo negativa no es posible) y que $\Psi(K) \geq 0$ (una tasa de producción negativa no es posible). Sin embargo, se permite que $\dot{K}$ sea negativo; Dado que la depreciación es asumida lejana (es decir, no hay depreciación), esto implica que el capital puede ser consumido. Esto completa la descripción de los aspectos tecnológicos de la economía.

La economía que se acaba de describir será imaginada para que funcione durante todo el tiempo futuro, es decir, el "horizonte de planificación" es infinitamente distante.

Queda por considerar el funcional de utilidad cuya maximización determina el desarrollo de la economía a través del tiempo. Si se especifica un programa de inversión $\dot{K}(t)$, se determina la tasa de consumo C en función de t.

Al desarrollar una medida de utilidad se busca asociar con cada función $C(t)$ un número $\mathscr{U}[C(t)]$ que proporcione una evaluación numérica de todo el programa de consumo. El número se conoce como la utilidad de la función $C(t)$, es decir, del programa de consumo. Esta asociación define un funcional $\mathscr{U}$ en el espacio de funciones que consta de todos los posibles programas de consumo.

Esta no es la única forma en la que se puede definir $\mathscr{U}$ de manera convincente. Ramsey definió $\mathscr{U}$ como

$$\mathscr{U}[\,C\,] = \int_0^\infty U(C(t))\,\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

donde U es una función de la tasa de consumo; real, continua, cóncava y no decreciente. U se puede ver como la medición de la "utilidad instantánea" o la tasa de utilidad en cualquier instante particular t. En la práctica se hará referencia a $U(C(t))$ como función de utilidad. Por lo tanto, la evaluación numérica colocada en un programa $C(t)$ es la integral en todo el tiempo futuro de la función de utilidad $U(C(t))$. No se admite descuento o ponderación de utilidades. Esta medida tiene una serie de propiedades convenientes, incluyendo la de aditividad temporal (las tasas de consumo de diferentes períodos hacen una contribución aditiva). Sin embargo, tiene la desventaja de que en general, es decir, en ausencia de restricciones aún no especificadas sobre U y Ψ, la integral puede divergir, lo que implica que el dominio de $\mathscr{U}$ no puede incluir todos los programas $C(t)$. Restricciones sobre U y Ψ serán consideradas en breve.

Surge la pregunta ¿ cuánta libertad hay en la elección de U (y por tanto $\mathscr{U}$) y cuán susceptible es el camino óptimo al elegir U?. El requisito de que la contribución del consumo en diferentes puntos de tiempo haga una contribución aditiva limita severamente la elección del $\mathscr{U}$. Si $\mathscr{U}_1$ es un funcional de utilidad específica, entonces cualquier otra funcional de utilidad $\mathscr{U}$ con las mismas propiedades de aditividad está relacionada con $\mathscr{U}_1$ por una transformación afín positiva, de modo que $\mathscr{U} = a\mathscr{U}_1 + b$, $a > 0$. Esto a su vez restringe todas las posibles funciones de utilidad U a la forma $U = aU_1$, $a > 0$. Ahora las ecuaciones de Euler y las condiciones de esquina no cambian si F es reemplazado por aF. Así, para el problema de Ramsey, la política o regla óptima es invariante bajo la elección de la función de utilidad de la clase de funciones que se puede utilizar en lugar de U_1.

El problema entonces es determinar la trayectoria $K(t)$ de la acumulación de capital que maximiza $\mathscr{U}\,[\,C\,]$, es decir, maximiza la integral no descontada de la utilidad sobre todo el tiempo futuro, con el capital inicial dado. Después de aplicar (4.5) a (4.6), el problema es el de encontrar la función $K(t)$ suave a trozos que maximiza

$$J\,[\,K\,] = \int_0^\infty U\left(\Psi(K) - \dot{K}\right) \mathrm{d}t \tag{4.7}$$

sujeto a $K(0) = K_0$. Así, se observa que K y $\dot{K}$ están sujetos al requisito de que $C \geq 0$ y, por tanto, $\dot{K} \leq \Psi(K)$. Cuando el intervalo de integración es ilimitado, el problema se formula correctamente y la teoría sólo es aplicable cuando la integral converge para el conjunto de funciones permisibles $K(t)$. Como se ha observado, esto no será cierto para (4.7) para una elección arbitraria de la función de utilidad y la función de producción.

Para la convergencia de la integral es necesario que U como una función del tiempo vaya a cero cuando t va al infinito. Y para la satisfacción de esta condición es necesario que (a) exista algún valor finito de K, dígase K^* que sea tal que $0 = U[\Psi(K^*)] \geq U[\Psi(K)]$ para todo K, o (b) $U[\Psi(K)]$ sea una función creciente de K y $\lim_{K\to\infty} U[\Psi(K)] = 0$.

La condición (a) se satisface si U tiene la forma representada en la Figura 2.15 y si, para algún K, $\Psi(K) = C^*$; se satisface también si U es de la forma representada en la Figura 2.16 y si Ψ tiene la forma mostrada en la Figura 2.15 (con Ψ sustituido por U, K por C y K^* por C^* y con el origen del eje vertical desplazado hacia abajo) y alcanza un máximo de C^* en K^*. La condición (b) se satisface si U tiene la forma mostrada en la Figura 2.14 y si Ψ no tiene límites; se satisface también si U tiene la forma de la Figura 2.15 o de la Figura 2.16 y si $\lim_{K\to\infty} \Psi(K) = C^*$.

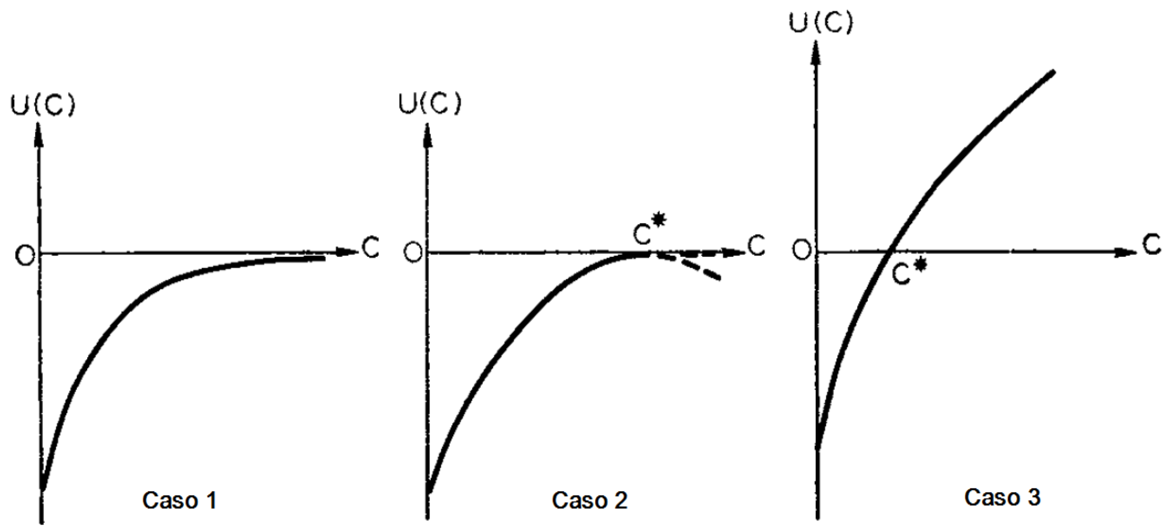

Figura 1: Producción-utilidad

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

Por lo tanto, se puede permitir que las curvas de utilidad tomen cualquiera de las formas mostradas en los tres casos. En el caso 1, $\sup U(C(t))$ existe pero $U(C(t))$ no posee un máximo; $\sup U(C(t))$ se aproxima asintóticamente cuando C se acerca al infinito. En el caso 2, $\sup U(C(t))$ existe y hay al menos un valor de C para el cual $U(C(t)) = \sup U(C(t))$. En el caso 3, $\sup U(C(t))$ no existe. Si $\sup U(C(t))$ existe, es costumbre decir que la función de utilidad se *satura*. En el caso la función de utilidad se satura a un valor finito de C; En el caso 1 se satura a medida que C se acerca al infinito. En los tres casos las curvas se han dibujado de tal manera que $U(0)$ se define. Sin embargo, esto no es algo en lo que se insista; Está permitido que $U(C)$ tenga una asíntota vertical en $C = 0$ o que $U(C)$ se defina solamente para valores de C mayores que algún valor positivo mínimo.

De manera similar, se podría permitir que la función de producción tuviera cualquiera de las formas ilustradas el la figura de los tres casos. (Por supuesto, los ejes deben ser adecuadamente etiquetados de nuevo y el origen del eje vertical desplazado hacia abajo.) La función de producción, que se dice saturada de $\sup \Psi(K)$, existe. Puede saturarse en cualquiera de las formas descritas en el caso 1 y el caso 2.

De las nueve parejas de funciones de producción y de utilidad sugeridas por los tres casos de la Figura 1, se debe omitir aquella que contiene funciones de utilidad y producción ilimitadas; Pues entonces la integral no puede hacerse convergente. Por otro lado, para parejas que contienen funciones de utilidad y producción ambas delimitadas, puede ser necesario tratar por separado el caso en que el límite superior de la utilidad es el resultado de la saturación de función de utilidad y el caso en el que, a largo plazo, la utilidad está limitada por la saturación de la función de producción. Supongase, por tanto, que $U(C)$ es de la forma representada en el caso 2 y que la gráfica de $\Psi(K)$ tiene una de las formas que se muestran en el caso 1 y el caso 2. Siempre que $C^* \leq \sup \Psi(K)$ dígase que la función de utilidad determina la utilidad alcanzable más grande; Y siempre que $C^* > \Psi(K)$ pueda decir que el límite superior de utilidad a largo plazo está determinado por consideraciones tecnológicas. El comportamiento del sistema puede variar considerablemente de un caso a otro; Por lo tanto los dos casos deben ser tratados por separado.

Así, la atención se limita a los casos en que al menos una de las funciones $U(C)$ y $\Psi(K)$ tiene un supremo. Ahora definiendo U^* como el supremo de niveles de utilidad que se puede mantener indefinidamente. Si la función de utilidad tiene un supremum, se pone $U^* = \sup U(C)$. Si sólo la producción posee un supremum, se pone $U^* = U[\sup \Psi(K)]$. Así, en todo caso U^* está definido; y en todos los casos $U^* = 0$. Siguiendo a Ramsey, U^* será llamado el nivel de *satisfacción* de utilidad.
Se han impuesto severas restricciones al conjunto de pares de funciones de producción y de utilidad admisibles. Sin embargo, ellos no aseguran por sí mismos que la integral (4.7) converge o que se tiene un problema significativo en el cálculo de las variaciones. Más adelante se vera que en los casos en que la satisfacción no puede alcanzarse con un stock finito de capital, todavía es posible que la integral diverja (a menos infinito) para todo $K(t)$ posible. Sin embargo, si la satisfacción puede alcanzarse con capital finito, siempre existen trayectorias admisibles para las cuales la integral es finita . Entonces es posible, pero aún no es cierto, que $J[\,y\,]$ tenga un máximo.

Por ultimo, una característica ligeramente perturbadora de la misma. Supongamos que C^* se define por la saturación de la función de producción en $K^* = K$; $C^* = \Psi(K^*)$. Entonces requerimos que U sea tal que $U(C^*) = 0$. Esto significa que cualquier cambio en las condiciones técnicas de producción que cambie el valor de K^* requiere un cambio de compensación en U; de lo contrario, el problema deja de estar bien planteado. Por supuesto, esta dependencia precisa de las preferencias en las condiciones técnicas tiene poco sentido económico.

CONTROL ÓPTIMO

Después de plantear las relaciones y restricciones económicas estáticas y dinámicas del modelo de dos sectores con capital libremente transferibles entre industrias, se plantea el funcional objetivo en conformidad con estos. El cual se resuelve o se le hallan las sendas optimas de las variables, que describen el comportamiento del sistema dinámico, aplicando la teoría de control optimo.
Entonces en un problema de Control óptimo se debe identificar del conjunto de trayectorias admisibles las sendas temporales que optimizan los valores de ciertas variables y con ello el comportamiento de un sistema a través del tiempo. Detallando, un problema

básico de control óptimo consiste en:

$$\begin{array}{lll} Maximizar & J[y,u]=\int_0^T f(t,y,u)\,\mathrm{d}x & \\ sujeto \quad a & y'=g(t,y,u) & \\ & y(0)=y_0 \quad (y_0 \quad dado) & [0,T] \\ & y(T)=y_T \quad (y_T \quad libre) & \\ & u(t)\in\Omega \qquad \forall t\in[0,T] & \end{array} \tag{4.8}$$

El tratamiento de este problema en la teoría del control óptimo, establece tres tipos de variables. La *variable temporal* t, la *variable de estado* $y(t)$ y la variable $u(t)$ llamada *variable de control*. "La variable de control, está sujeta a la decisión del agente que enfrenta el problema de optimización intertemporal, mientras que la segunda variable, la de estado, refleja el resultado de las decisiones tomadas sobre la variable de control"[7]. Centrar el análisis en la variable de control, supone pasar a segundo plano la revisión de la variable de estado, esto es permitido si

la decisión sobre la trayectoria de la variable de control $u(t)$ origina, una vez determinada una condición inicial para la variable de estado $y(t)$, una inequívoca trayectoria de estado fruto de esa decisión concreta sobre la trayectoria de control. Es por ello por lo que un problema de control óptimo debe contener una ecuación que relacione a la variable de control $u(t)$ con la variable de estado $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt}=g[t,y(t),u(t)] \tag{4.9}$$

o de otra forma[8].

$$y'=g(t,y,u) \tag{4.10}$$

La anterior ecuación recibe el nombre de ecuación de movimiento o de estado, en donde se muestra la relacion entre la variación respecto al tiempo de la variable de estado (y') con las variables t, y y u por medio de una función $g(\bullet)$. Al determinar el valor optimo de la variable de control en un momento del tiempo t, la función $g(\bullet)$ establece la dirección y trayectoria de crecimiento de la variable de estado a través del tiempo. De este modo, " cuando el agente optimizador selecciona la senda óptima de la variable de control, afecta tanto de manera directa el funcional objetivo mediante la variable $u(t)$, como de manera indirecta a través de la variable $y(t)$, que se encuentra definida por la ecuación de movimiento."[9].

[7]BONIFAZ, José Luis. LAMA, Ruy *Optimización dinámica y teoría económica.* Lima Perú. Universidad del Pacífico, Centro de Investigación. 1999. Pág 98.

[8]RODRÍGUEZ URÍA, María Victoria et al. *Optimización dinámica.* Oviedo. Servicio de Publicaciones, Universidad de Oviedo. 1997. Pág 62.

[9]BONIFAZ. Op.cit. Pág 99.

En el problema (4.8) el valor de $y\,(T)$ es libre, debido a que en la obtención de la condición de primer orden del problema de control optimo se efectúa de acuerdo a las sendas de control factibles. A partir de la ecuación de movimiento para cada senda de control factible se puede determinar su respectiva trayectoria factible de la variable de estado.Si se considera un valor terminal dado, la sendas factibles de la variable de control deben ser seleccionadas previamente para garantizar el valor terminal de la variable de estado. Entonces un valor terminal libre permite obtener la condición de primer orden del problema de control optimo.
En cuanto a la variable de control $u(t)$, se puede decir que esta delimitada por el conjunto ω, que normalmente es compacto y convexo. Una restricción que permite la existencia de soluciones de esquina para el problema de control, lo cual lo diferencia de los problemas del calculo de variaciones en lo que se consideran solamente soluciones interiores. No todos lo problemas de control imponen esta restricción de $(\Omega = (-\infty, \infty))$, por tanto es posible encontrar problemas en los que la condición $u\,(t) \in \Omega$ no se incluye.
En la técnica de control optimo no se requiere la continuidad y diferenciabilidad de las taryectorias de las variables de control y de estado en todo el horizonte de tiempo $[0, T]$. Para la variable de control es suficiente con que sea continua por tramos, lo que le permite a la senda de control tener un cierto número puntos con discontinuidades, eso si con la condición de que dichos puntos no se tienda a infinito. En cuanto a la variable de estado, como mínimo dese ser continua y diferenciable por tramos, es decir que puede tener puntos en los que no se puede diferenciar respecto al tiempo. Lo que gráficamente significa que la trayectoria abarca puntos con esquina.
En cuanto a la condición de primer orden: principio del máximo se tiene que
en el control óptimo, a partir de la función intermedia $f\,(t, y, u)$, la ecuación de movimiento $y' = g\,(t, y, u)$ y una variable auxiliar $\lambda\,(t)$, denominada variable de coestado, se determina la función Hamiltoniana del siguiente modo:

$$H\,(t, y, u, \lambda) = f\,(t, y, u) + \lambda\,(t)\, g\,(t, y, u) \tag{4.11}$$

*Para determinar la senda de las variables de control y estado que resuelven el problema, a partir de la función Hamiltoniana se emplea una condición de primer orden, denominada **principio del máximo**.*[10].
El principio del máximo indica que las trayectorias $u^*\,(t)$, $y^*\,(t)$ y $\lambda^*\,(t)$ resuelve el problema (4.8) si cumple las siguientes condiciones impuestas a la función Hamiltoniana (4.11):

$$\begin{aligned} &a. \quad \max_u H\,(t, y, u, \lambda) \quad sujeto \quad a \quad u\,(t) \in \Omega \\ &b. \quad y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ &c. \quad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &d. \quad \lambda\,(T) = 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

[10]Ibíd. Pág 101.

La primera condición establece que el Hamiltoniano debe ser maximizado con respecto a la variable de control, sujeto a la restricción dada por el conjunto Ω. *La maximización del Hamiltoniano puede brindar básicamente dos tipos de soluciones: una solución al interior del conjunto* Ω *o una solución en el contorno. Si* H *dependiera de manera no lineal de "u", para maximizar* H, *en el punto máximo se debe cumplir que la primera derivada con respecto a la variable de control sea igual a cero y que el Hamiltoniano sea cóncavo con respecto a "u"*

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0$$

Por otra parte, con el mismo conjunto Ω, *si* $H\left(T\right)$ *dependiera linealmente de la variable de control, la primera derivada nunca se haría igual a cero. En este caso, la maximización daría una solución de esquina*

$$\frac{\partial H}{\partial u} > 0$$

La segunda condición constituye la ecuación de movimiento de la variable de estado. La tercera condición representa la ecuación de movimiento de la variable de coestado. Estas dos ecuaciones, simultáneamente, se denominan sistema canónico o sistema Hamiltoniano. Finalmente, la cuarta condición consiste en la condición de transversalidad para el problema de control óptimo, cuando el valor terminal de la variable de estado es libre.[11].

El problema de control optimo (4.8) puede sufrir cambios como: valor final de la variable de estado determinado (y_T, T libre), un horizonte de tiempo indeterminado (T libre), o un valor final de la variable de estado que dependa del tiempo (curva terminal $y_T = \phi\left(T\right)$). Entonces, para dar solución al problema de control optimo sujeto a estos tres casos, es necesario establecer condiciones de transversalidad diferentes a las expuestas en el principio del máximo (4.12). La condición de transversalidad genérica para estos tres casos es:

$$\left[H\right]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\Delta y_T = 0 \tag{4.13}$$

Por lo tanto, a continuación se muestra los casos especiales de la condición de transversalidad:

I). *Caso 1.- Valor terminal y horizonte temporal fijo*

Cuando el valor terminal de la variable de estado y el horizonte temporal se encuentran prefijados, se cumple que sus diferencias Δy_T *y* ΔT *son iguales a cero. En este sentido, para determinar la solución del problema de control óptimo, basta emplear la condición;*[12].

$$y\left(T\right) = y_T \quad (T,\ y_T \quad libre) \tag{4.14}$$

[11]Ibíd. Pág 102.
[12]Ibíd. Pág 118.

II). *Caso 2.- Valor terminal fijo*

En este caso, como el valor terminal de la variable de estado es constante, se cumple que su primera diferencia Δy_T *es igual a cero. En este sentido, para que se satisfaga la condición (4.13) independientemente del valor que tome la diferencia del horizonte de tiempo* ΔT, *debe cumplirse:*

$$[H]_{t=T} = 0 \tag{4.15}$$

Es decir, el Hamiltoniano debe ser igual a cero en el último período.[13].

III). *Caso 3.- Curva terminal*

En este último caso, el valor terminal de la variable de estado depende del horizonte de tiempo a través de la función $y_T = \phi(T)$. *Aplicando diferencias, obtenemos una condición que relaciona la variación del horizonte temporal* ΔT *con la variación del valor terminal* $\Delta y_T : y_T = \phi'(T)\,\Delta T$. *Reemplazando esta condición en (4.13) obtenemos:*

$$[H]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\phi'(T)\,\Delta T = [H - \lambda\phi']_{t=T}\Delta T = 0 \tag{4.16}$$

Para un valor arbitrario de ΔT, *bastará que se cumpla la condición de transversalidad:*[14]

$$[H - \lambda\phi']_{t=T}\Delta T = 0 \tag{4.17}$$

[13]Ibíd. Pág 120.
[14]Ibíd. Pág 123.

4.3. Marco conceptual

- *Crecimiento económico*: Es el aumento del valor de los bienes y servicios producidos.

- *Stock*: Variable expresada como una cantidad en un momento del tiempo. Un stock es una cantidad medida en un determinado momento del tiempo. por una economía durante un período de tiempo

- *Flujo*: Es una cantidad medida por unidad de tiempo.

- *Capital*: Factor de producción que estará relacionado con las máquinas y otros utensilios físicos que utilizan las empresas en el proceso de producción (este concepto incluirá edificios, estructuras, instrumentos, ordenadores, material electrónico, etcétera). La variable que mide el capital se denota por $K(t)$.

  2. Fondos para financiar la acumulación de equipo y estructuras.

- *Trabajo*: Factor de producción que se relaciona con la población y la mano de obra. Se supondrá que que todos los trabajadores son idénticos y la suma de todos ellos se indicará con la letra $L(t)$. Es decir, $L(t)$ será la cantidad de trabajadores de la economía en el momento t.

- *Producción*: Es la oferta de mercancías y bienes y, a su vez, es la renta de un sector económico determinado. Se denota por $Y(t)$ o Y.

- *Inversión*: Bienes comprados por las personas y las empresas para aumentar su stock de capital. Se denota por $I(t)$ o I

- *Consumo*: Bienes y servicios comprados por los consumidores. La variable que mide el consumo se denota por $C(t)$ o C.

- *Depreciación*: Reducción del stock de capital que se produce con el paso del tiempo debido al envejecimiento y al uso.

- *Descuento*: Reducción del valor de los gastos e ingresos futuros, en comparación con los gastos e ingresos actuales.

- *Factor de Descuento*: Factor de ponderación que refleja el grado de impaciencia intertemporal del individuo, y que tiene la finalidad de asignarle una menor ponderación o una menor valoración a las utilidades provenientes de períodos más alejados con respecto al presente.

- *Valor Presente*: Comparación entre flujos de dinero provenientes del futuro con respecto al tiempo presente.

- *Ingreso Disponible*: cantidad de dinero remanente con la que cuenta el agente,en un periodo cualquiera, para gastos de consumo.

- *Ecuación de movimiento*: Determina el comportamiento del ingreso disponible en el tiempo.
- *Variable de Estado*: Refleja el resultado del problema y no es directamente controlable por el agente.
- *Variable de Control*: Es aquella que debe elegir un agente con el fin de optimizar la función objetivo

5. MARCO METODOLÓGICO

5.1. Línea y tipo de investigación

Como se ha mencionado el presente trabajo se encargó de detallar el planteamiento, la formulación económica, la optimización dinámica y el análisis gráfico del sistema dinámico, del modelo bisectorial, en el que el bien capital es libremente transferible entre industrias y se busca maximizar el funcional objetivo de Ramsey.

Se reunió cuidadosamente información bibliográfica con conceptos, situaciones económicas, modelos similares y técnicas matemáticas para dar un tratamiento minucioso al modelo mencionado anteriormente. Así, la investigación que se implementó en la ejecución de este proyecto fue de tipo explorativa y descriptiva.

Explorativa, porque se realizó un acercamiento a un temática de poco conocimiento y familiarización , en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Cundinamarca sede Fusagasugá, con el propósito de despertar el interés por este tema y así, en el futuro se desarrollar investigaciones más complejas, ya que en la actualidad el programa en mención registra muy pocos estudios en el campo económico, a pesar de que el perfil académico lo permite.

Descriptiva, porque se especificó y caracterizo matemática y económicamente los procedimientos y resultados que fueron apareciendo en el modelo; dando el porqué de cada uno de estos.

6. RESULTADOS

6.1. Apliación del Modelo óptimal de Ramsey al Modelo bisectorial de bien capital movible

Introducción

Un análisis de un escenario económico donde la sociedad participa en las dinámicas de demanda y oferta de un solo sector económico es una referencia ahora necesaria. En este, la teoría de crecimiento económico respondía al problema de la sociedad de aumentar su propia renta y mejorar la calidad de vida de cada individuo, ofreciendo además información para que ésta tomara las decisiones más convenientes. El planteamiento de este problema constituyó el *Modelo de Ramsey* y su propósito fue la optimización del bienestar de las generaciones presentes y futuras de la sociedad controlando su consumo, capital y producto a lo largo de un periodo de tiempo.

Los supuestos que ilustraron el mudo económico de Ramsey fueron: un solo bien homogéneo que se produce con la ayuda del capital y la fuerza de trabajo disponible, mano de obra constante que implica una producción solamente en función del stock de capital, función cóncava y con segunda derivada continua, además el capital no se deprecia y la producción en cada instante t se distribuye entre consumo e inversión.

En este capítulo los supuestos mencionados serán menos estrictos, concretamente la economía, produce un bien de consumo especializado en una industria y un bien de inversión especializado en otra industria, procesos de producción que se distinguen de una industria a otra pues sin importar el factor de alquiler, la relación entre el capital que minimiza costos y mano de obra no necesariamente son iguales. Además, se asume que la población (mano de obra) crece autónoma y exponencialmente a una tasa gamma (γ). Por último, se mantiene la condición de capital inmortal, es decir no se deprecia. Con estos cambios se establecen nuevas relaciones estáticas y dinámicas.
En el estudio, análisis y detalle del modelo se asumen supuestos adicionales para conservar el sentido del modelo, dando el contexto requerido para estos.
Este modelo bisectorial resulta de unir el modelo de Ramsey y Uzawa aumentado la complejidad del análisis que se hace en los modelos unisectoriales, aunque está alejado de la dificultad encontrada en los modelos multisectoriales, los modelos de dos sectores ayudan a disuadir dudas que se encuentran en esta teoría avanzada del crecimiento económico.

Recostrucción del Modelo

En el siguiente modelo el capital de la economía distribuido entre las industrias se puede mover sin costo ni demora, es decir, es libremente transferible.

La producción de dos bienes especializados cambia el planteamiento del problema de Ramsey. En general, el consumo de la sociedad se suple únicamente por la industria de bienes de consumo, eliminado la posibilidad de ser complementada con el stock de capital o, en otras palabras, el capital no puede ser consumido.

Se presenta un problema de asignación de factores de producción a resolver en cada instante. En el planteamiento de Ramsey tratado anteriormente no existía esta situación al destinar todo el capital y mano de obra a la única industria encargada de la producción. Ahora en el nuevo mundo de dos mercancías se debe decidir para cada t que porción de los factores de producción le corresponde a cada industria.

Surge la pregunta ¿ Quién controla cada una de las cuatro asignaciones de los factores y de que forma lo hace? hay dos opciones: que sean controlados directamente por la Autoridad de planificación y posteriormente se determina la trayectoria optima en el tiempo para cada asignación, o se podría pensar que esta asignación de factores recae sobre los directivos de las empresa competitivas que desean maximizar benéficos de acuerdo a los precios de los productos y de los alquileres de factores establecidos por el Planificador directamente o indirectamente. Los resultados dependen del mecanismo que se adopte, aspecto que no se entrara a detallar. en el presente modelo se supondrá que la asignación de factores sera controlada por la Autoridad de planificación indirectamente al establecer la relación de precios de los productos, y los gerentes de las firmas individuales se ajustan tanto a estos precios como los de alquiler de los factores que se determinan de forma competitiva.

Al saber que porción de los factores le corresponde a cada industria, se determina la producción de cada una y ademas la tasa de acumulación de capital. Ademas conociendo la cantidad de factores que posee inicialmente la comunidad y la trayectoria temporal de los precios permite explorar el rumbo futuro de toda la economía. con una demanda de productos regulada por la Autoridad de planificación.

Otro aspecto relevante en el actual planteamiento, es el del argumento de la función de Utilidad instantánea U. Como la población crece exponecialmente a través del tiempo, la utilidad estará en función del consumo promedio únicamente. Así el tamaño de la población no afecta el bienestar. Al comparar con el modelo sencillo de Ramsey como la población se mantenía constante, no era una asunto de importancia y era mas un aspecto de forma matemática si se consideraba la utilidad en función del consumo promedio o total.

Así, el problema de la Autoridad de planificación es determinar la trayectoria de precios de los productos que maximiza:

$$\int_0^{\infty} U(c(t))dt, \tag{6.1}$$

donde $c(t)$ de acuerdo a lo mencionado en lineas anteriores, representa el consumo promedio en el instante t.

La maximización del funcional de utilidad se debe realizar de acuerdo a las condiciones que definen el modelo en estudio. Se muestra el engranaje económico que ilustra como los precios de los productos afecta la trayectoria del consumo promedio.
Sean Y_1 y Y_2 las tasas de producción de cada uno de los bienes especializados, logradas al emplear la mano de obra (L) y el capital (K) disponible. L y K representan trabajo y capital total de la economía. Si K_j es la cantidad de capital invertido en la industria j, y L_j es la cantidad de mano de obra empleada en la industria j, la relación de producción de la j-esima industria puede ser escrita como:

$$Y_j = \Psi_j(K_j, L_j) \quad j = 1, 2. \tag{6.2}$$

Como los outputs del bien capital y del bien de consumo, están sujetos a funciones de producción neoclásicas, Ψ_j se supone cóncava y diferenciable. Para calcular la produccion promedio de la industria j dividimos por la cantidad de trabajadores o mano de obra empleada por esta:

$$\frac{Y_j}{L_j} = \frac{1}{L_j}\Psi_j\left(K_j, L_j\right) \quad j = 1, 2 \tag{6.3}$$

Como Ψ_j cumple con la propiedad matemática de ser homogénea de grado uno, que económicamente equivale a los rendimientos constantes a escala, entonces:

$$\frac{Y_j}{L_j} = \Psi_j\left(\frac{K_j}{L_j}, \frac{L_j}{L_j}\right) \quad j = 1, 2 \tag{6.4}$$

El termino $\frac{K_j}{L_j}$ indica cuanto capital le corresponde a cada trabajador, esto es, la relación capital:trabajo per cápita en la industria j, nombrando $k_j \equiv K_j/L_j$, se tiene :

$$\frac{Y_j}{L_j} = \Psi_j\left(k_j, 1\right) \quad j = 1, 2 \tag{6.5}$$

Esta ecuación de la producción promedio en la industria j, al considerar $\psi_j(k_j) = \Psi_j(k_j, 1)$, es reescrita como:

$$\frac{Y_j}{L_j} = \psi_j\left(k_j\right) \quad j = 1, 2 \tag{6.6}$$

la cual solamente depende de la relación capital:trabajo k_j. Despejando Y_j de la anterior ecuación, se obtiene:

$$Y_j = L_j\psi_j\left(k_j\right) \quad j = 1, 2 \tag{6.7}$$

la cual muestra que la producción de la industria j equivale al producto del factor escala L_j con la función de $\psi(k_j)$, es decir, se multiplica la producción en promedio de un trabajador por el total de trabajadores de la industria j. Ahora nombrando $y_j = Y_j/L$, que es la producción per cápita de cualquier trabajador del bien j y $l_j = L_j/L$ que es la porción de trabajadores empleados en la industria j, se tiene que:

$$y_j = Y_j/L = \frac{L_j \psi_j (k_j)}{L} = \frac{L_j}{L}\psi_j (k_j) = l_j \psi_j(k_j) \tag{6.8}$$

Téngase en cuenta que si en alguna de las dos industrias el capital o la mano de obra disponible es igual a cero, su respectiva producción será nula, en términos matemáticos:

$$\Psi_j(0, L_j) = \Psi_j(K_j, 0) = 0 \quad j = 1, 2. \tag{6.9}$$

Ahora, se determinan las expresión que represente el cambio en la producción de la industria j ante un cambio en el capital, entonces se deriva la función de producción de la mercancía j respecto al capital K_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial K_j}\Psi(K_j, L_j) &= \frac{\partial}{\partial K_j} L_j \psi(k_j) \\ &= L_j \frac{d\psi(k_j)}{dk_j} \cdot \frac{d}{dK_j}\left(\frac{K_j}{L_j}\right) \\ &= L_j \frac{d\psi(k_j)}{dk_j}\frac{1}{L_j} \\ &= \frac{d\psi(k_j)}{dk_j} \equiv \psi'(k_j) \end{aligned} \tag{6.10}$$

lo mismo se hace para encontrar la expresión que represente el cambio de la producción de la industria j ante un cambio en la mano de obra, entonces se deriva respecto a L_j

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L_j}\Psi(K_j, L_j) &= \frac{\partial}{\partial L_j} L_j \psi(k_j) \\ &= \frac{\partial L_j}{\partial L_j} \cdot \psi(k_j) + L_j \frac{d}{dk_j}\left(\psi_j(k_j)\right) \cdot \left(\frac{d}{dL_j}\left(\frac{K_j}{L_j}\right)\right) \\ &= \psi_j(k_j) + L_j(\psi_j^{'}(k_j)) \cdot \left(-\frac{K_j}{L_j^2}\right) \\ &= \psi_j(k_j) - \left(\frac{L_j K_j}{L_2^2}\right) \cdot \psi_j^{'}(k_j) \\ &= \psi_j(k_j) - k_j \psi_j^{'}(k_j) \end{aligned} \tag{6.11}$$

Así, se han determinado los productos marginales del capital y mano de obra respectivamente. Estos dependen de k_j, es decir, solamente de la porción de los factores

de producción asignada a la industria j.
De acuerdo con la propiedades de la función de producción neoclásica, se tiene productividad marginal de los dos factores de producción positiva pero decreciente. En términos matemáticos

$$\psi'(k_j) > 0$$

si $k_j > 0$

$$\psi''(k_j) < 0$$

$k_j > 0$ indica que el capital por trabajador debe ser mayor, de lo contrario las condiciones anteriores carecerían de sentido. Se deduce de (6.9) que la producción promedio por trabajador tiende a cero cuando el capital disponible para este se acerca a cero. ahora en el caso en el que el capital por trabajador tiende a infinito su producción también tendera a este valor, por ser una función monótonamente creciente. A continuación se expresa algebraicamente estas condiciones junto con las de Inada

$$\begin{aligned}
\lim_{k_j \to 0} \psi_j(k_j) &= 0 \\
\lim_{k_j \to \infty} \psi_j(k_j) &= \infty \\
\lim_{k_j \to 0} \psi'_j(k_j) &= \infty \\
\lim_{k_j \to \infty} \psi'_j(k_j) &= 0
\end{aligned} \tag{6.12}$$

bajo las características y supuestos descritos de $\psi_j(k_j)$. Su gráfica se muestra en la Figura 2.

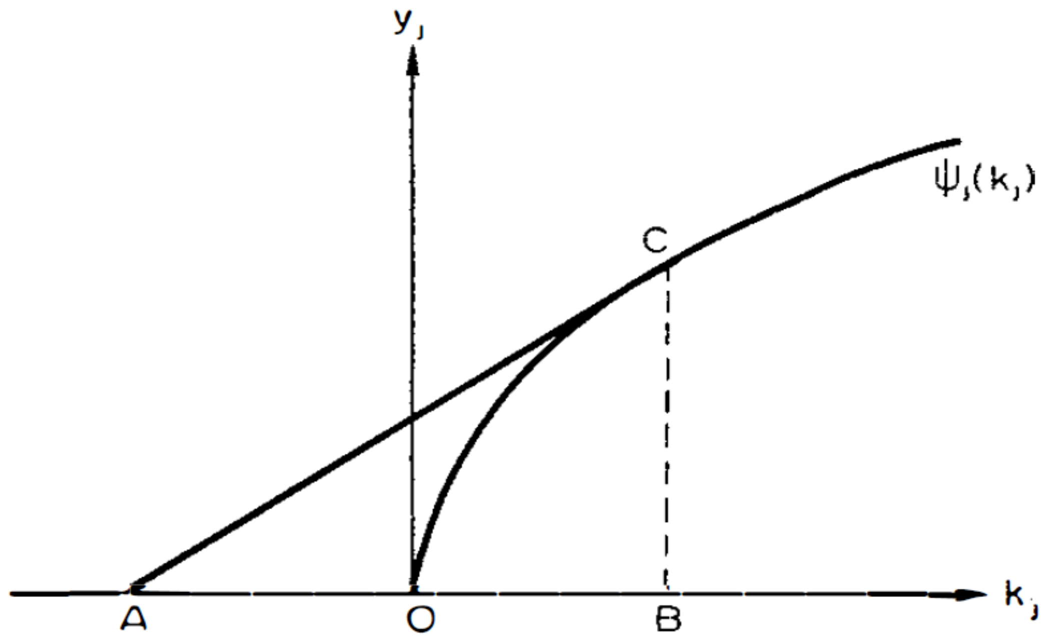

Figura 2: Función de Producción

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

Las personas trabajan a cambio de un salario w y los propietarios de bienes de capital lo alquilan a las industrias a una tasa r, que bajo condiciones de competencia perfecta son pagados de acuerdo a la teoría de la distribución según la productividad marginal. "En el contexto de la macroeconomía, nos dice que, bajo condiciones competitivas, el salario real se igualará a el producto marginal del capital como un todo, y que el rendimiento real por unidad de capital será igual a el producto marginal del capital como un todo", e igual en ambas industrias, entonces:

$$r = p_j \psi_j' \tag{6.13}$$

$$w = p_j(\psi_j - k_j \psi_j') \tag{6.14}$$

donde p_j es el precio de los bienes. esta forma de remunerar el trabajo y el alquiler de capital garantiza que no haya déficits o excedentes del producto total es asegurado por el teorema de Euler.
Definido el valor del salario (w), y del rendimiento real por unid de capital (r), se calcula la relación salario-alquiler de una unidad de capital o relación de recompensas de los

factores

$$\begin{aligned}\omega \equiv \frac{w}{r} &= \frac{p_j(\psi_j - k_j\psi_j')}{p_j\psi_j'} \\ &= \frac{\psi_j - k_j\psi_j'}{\psi_j'} \\ &= \frac{\psi_j}{\psi_j'} - \frac{k_j\psi_j'}{\psi_j'} \\ &= \frac{\psi_j}{\psi_j'} - k_j \qquad j = 1, 2.\end{aligned} \tag{6.15}$$

Para ver gráficamente el valor de ω se usa la Figura 2, suponiendo que $k_j = OB$, entonces se tiene que:

$$\psi_j(k_j) = BC$$
$$\psi_j'(k_j) = \frac{BC}{AB}$$

por lo tanto

$$\omega = \frac{BC}{\frac{BC}{AB}} - OB$$

Por ley de extremos y medios

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{BC \cdot AB}{BC} - OB \\ &= AB - OB \\ &= AO\end{aligned}$$

como w es el salario y r el alquiler de una unidad de capital, ω puede ser interpretado como la cantidad de salario que se paga por cada unidad de alquiler de capital pagada. Diferenciando ω con respecto a k_j recordando que $\frac{d\psi_j(k_j)}{dk_j} = \psi_j'$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dk_j} &= \frac{\psi_j'(k_j)\psi_j'(k_j) - \psi_j(k_j)\psi_j''(k_j)}{(\psi_j')^2} - 1 \\ &= \frac{(\psi_j'(k_j))^2}{(\psi_j')^2} - \frac{\psi_j(k_j)\psi_j''(k_j)}{\psi_j')^2} - 1 \\ &= 1 - \frac{\psi_j(k_j)\psi_j''(k_j)}{\psi_j')^2} - 1 \\ &= -\frac{\psi_j(k_j)\psi_j''(k_j)}{(\psi_j')^2}\end{aligned}$$

podemos invertirlo

$$\frac{dk_j}{d\omega} = -\frac{(\psi_j'(k_j))^2}{\psi_j(k_j)\psi_j''(k_j)} > 0 \tag{6.16}$$

mayor a cero por los supuestos de $\psi_j(k_j) > 0$,$\psi_j'(k_j) > 0$ y $\psi_j''(k_j) < 0$ y por ley de signos se deduce este hecho.
Para así, obtener el nivel competitivo de capital, $k_j(\omega)$, por trabajador en cualquiera de los sectores en función de la relación salarial-renta. La relación entre k_j y ω se ilustra en la siguientes figuras: Figura 3, caso en el que $k_1 > k_2$ es decir, la industria uno es mas intensiva en capital, Figura 4, caso en el que $k_2 > k_1$ es decir, la industria dos es mas intensiva en capital.

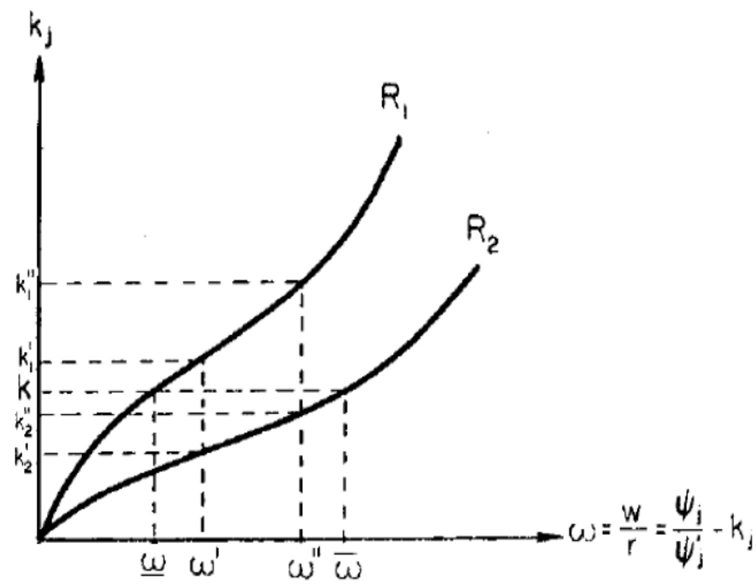

Figura 3: Relacion entre ω y k_j, caso 1
Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

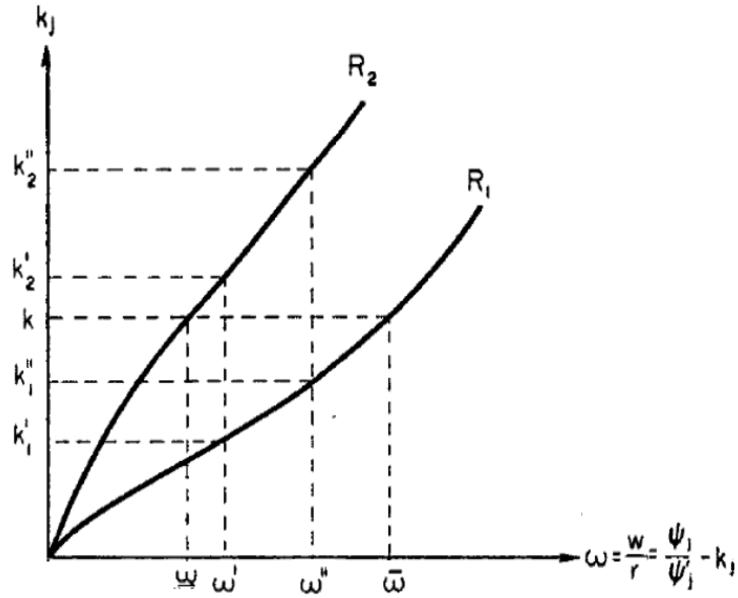

Figura 4: Relacion entre ω y k_j, caso 2

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

La $k_j(\omega)$-curva muestra, para la j-ésima industria, la relación entre el capital por trabajador en esa industria y la relación de las recompensas de los factores (que a su vez es igual a la proporción de productos marginales); de acuerdo a $(\frac{dk_j}{d\omega})$ el comportamiento de $k_j(\omega)$-curva es monotonamente creciente (se inclina hacia arriba de izquierda a derecha) y nace del origen de acuerdo a las condiciones de Inada. A cada remuneracion de factores (ω), le corresponde un par de relaciones de factores (una por cada industria), por ejemplo a ω', le corresponde k_1' y k_2'. Si se aumenta ω, por ejemplo a ω'', ambas industrias son inducidas a economizar en el empleo de mano de obra al ocuparse más capital por trabajador, y una nuevo par de relaciones de capital por trabajadores $k_1^{''}$ y $k_2^{''}$ se establece, la relación $k_j(\omega)$ implica la producción mas eficiente posible de acuerdo al salario y el alquiler pagado ese instante que permita minimizar costos. Lo anterior, se cumple para $k_j^{''} > k_j^{'}$.

Asignado ω, se tiene tambien k_j y por lo tanto se puede calcular el precio de oferta de los productos en cada industria que equivalen al valor total de los salarios, wL_j, más el valor total del alquiler, rK_j, en conformidad a los trabajadores y del capital ocupado en la industria j, matemáticamente

$$p_j = wL_j + rK_j$$

se divide entre $L_j\psi_j$,la producción total en la industria j (se tiene lo que produce en promedio un trabajador y se multiplica por la cantidad de trabajadores empleados en esa industria) para obtener el costo unitario en promedio de la producción de la mercancía j

$$p_j = \frac{wL_j + rK_j}{L_j\psi_j}$$

también se puede determinar el precio relativo. Así, si se denota por p^s el precio de oferta relativa de la segunda materia prima en cuanto a la primera, se tiene ,

$$\begin{aligned}
p^s(\omega) &= \frac{coste\ promedio\ de\ la\ produccion\ de\ la\ segunda\ mercancia}{coste\ promedio\ \ de\ la\ produccion\ de\ la\ primera\ mercancia} \\
&= \frac{\frac{wL_2+rK_2}{L_2\psi_2}}{\frac{wL_1+rK_1}{L_1\psi_1}} \\
&= \frac{\frac{L_2(w+r(K_2/L_2))}{L_2\psi_2}}{\frac{L_1(w+r(K_1/L_1))}{L_1\psi_1}} \\
&= \frac{r\left(\frac{\frac{w}{r}+k_2}{\psi_2}\right)}{r\left(\frac{\frac{w}{r}+k_1}{\psi_1}\right)} \\
&= \frac{\omega+k_2(\omega)}{\psi_2(k_2(\omega))} \Big/ \frac{\omega+k_1(\omega)}{\psi_1(k_1(\omega))}.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

$p^s(\omega)$ puede ser reescrito como

$$p^s(\omega) = \frac{\frac{1}{\psi_2'(k_2(\omega))}}{\frac{1}{\psi_1'(k_1(\omega))}} = \frac{{\psi_1}'(k_1(\omega))}{\psi_2'(k_2(\omega))}$$

ya que de (6.15) se tiene que

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{\psi_j}{\psi_j'} - k_j \\
\frac{\omega+k_j}{\psi_j} &= \frac{1}{\psi_j'}
\end{aligned}$$

Aplicando Ln a $p^s(\omega)$ se tiene que

$$Ln(p^s(\omega)) = Ln\left(\frac{{\psi_1}'(k_1(\omega))}{\psi_2'(k_2(\omega))}\right) = Ln({\psi_1}'(k_1(\omega))) - Ln(\psi_2'(k_2(\omega)))$$

lo cual se deriva con respecto a ω

$$\frac{1}{p^s}\cdot\frac{dp^s}{d\omega} = \frac{\psi_1''}{\psi_1'}\cdot\frac{dk_1}{d\omega} - \frac{\psi_2''}{\psi_2'}\cdot\frac{dk_2}{d\omega}$$

reemplazando $\frac{dk_j}{d\omega} = -\frac{(\psi_j')^2}{\psi_j\psi_j''}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^s}\cdot\frac{dp^s}{d\omega} &= \frac{\psi_1''}{\psi_1'}\cdot\left(-\frac{(\psi_1')^2}{\psi_1\psi_1''}\right) - \frac{\psi_2''}{\psi_2'}\cdot\left(-\frac{(\psi_2')^2}{\psi_2\psi_2''}\right) \\
\frac{1}{p^s}\cdot\frac{dp^s}{d\omega} &= -\frac{\psi_1'}{\psi_1} + \frac{\psi_2'}{\psi_2}
\end{aligned}$$

Aplicando $\frac{\psi_j'}{\psi_j} = \frac{1}{\omega+k_j}$ se tiene que

$$\frac{1}{p^s} \cdot \frac{dp^s}{d\omega} = -\frac{1}{\omega + k_1} + \frac{1}{\omega + k_2}$$

y multiplicando por ω en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\frac{\omega}{p^s} \cdot \frac{dp^s}{d\omega} = -\frac{\omega}{\omega + k_1} + \frac{\omega}{\omega + k_2} \tag{6.18}$$

donde $\frac{\omega}{\omega+k_j}$ puede reescribirse como

$$\frac{\omega}{\omega + k_j} = \frac{\frac{w}{r}}{\frac{w}{r} + \frac{K_j}{L_j}} = \frac{\frac{w}{r}}{\frac{wL_j + rK_j}{rL_j}} = \frac{rwL_j}{r(wL_j + rK_j)} = \frac{wL_j}{wL_j + rK_j}$$

la expresión del numerador representa el total de salarios de la industria j, y la expresión del denominador son los costos totales de la industria j, (se suman el total de salarios mas el total de alquiler de capital pagado en la industria j), entonces esta fracción representa la razón de participación del trabajo en la producción de la j-ésima industria. Ahora en cuanto al comportamiento de $p^s(\omega)$ respecto a ω se identifica que $p^s(\omega)$, es de pendiente positiva si $k_1(\omega) > k_2(\omega)$ de manera que la primera industria es relativamente intensiva en capital, y con pendiente negativamente si $k_2(\omega) > k_1(\omega)$, de modo que la segunda industria es relativamente intensiva en capital. La relación de ω con $p^s(\omega)$ se ilustra en las Figuras 5 y 6

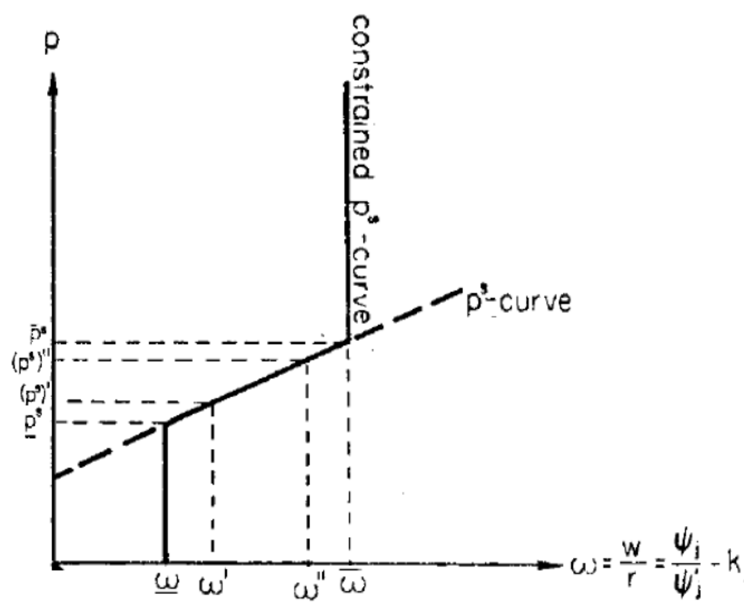

Figura 5: Relacion entre ω y p, caso 1

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

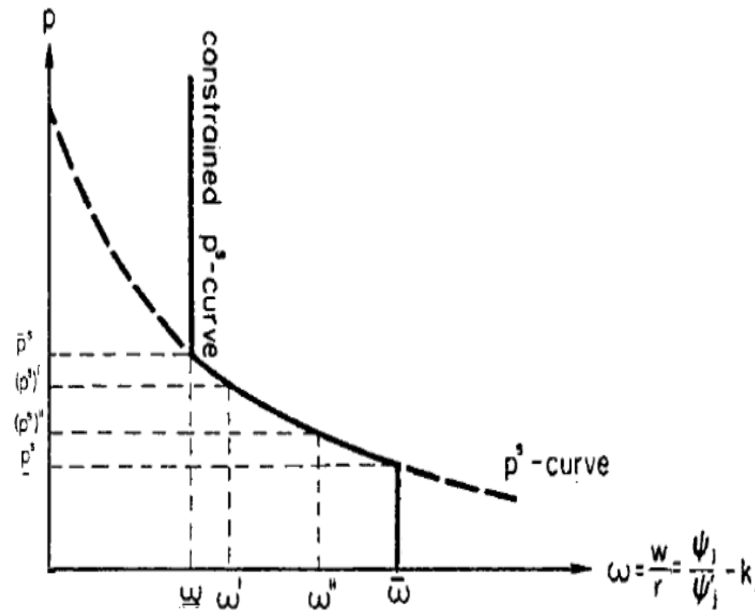

Figura 6: Relacion entre ω y p, caso 2

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

Por otra parte, la elasticidad de la p^s-curva es siempre menos de uno de magnitud. En cuanto al comportamiento de p^s cuando ω tiende a cero se hace de acuerdo a los supuestos hechos hasta hora sobre las funciones de producción. Entonces si $k_1(\omega) > k_2(\omega)$, p^s puede ir ya sea a cero o a un número finito positivo; y si $k_2(\omega) > k_1(\omega)$, p^s puede ir ya sea a infinito o a un número finito positivo.
para ver conjuntamente el comportamiento de $k_j(\omega)$ y $p^s(\omega)$ respecto a ω se acoplan por un lado las Figuras 3 y 5 obteniendo la Figura 7, para el caso en el que $k_1 > k_2$, y por otro lado las Figuras 4 y 6 obteniendo la Figura 8, para el caso en el que $k_2 > k_1$

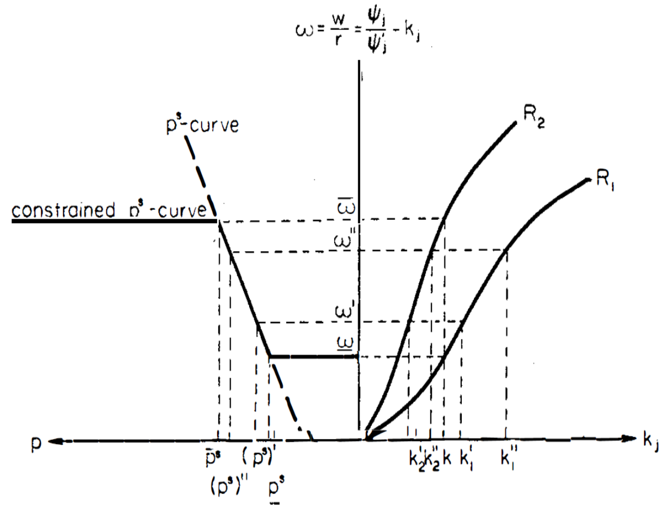

Figura 7: Relacion conjunta entre ω y k_j, ω y p, caso 1

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

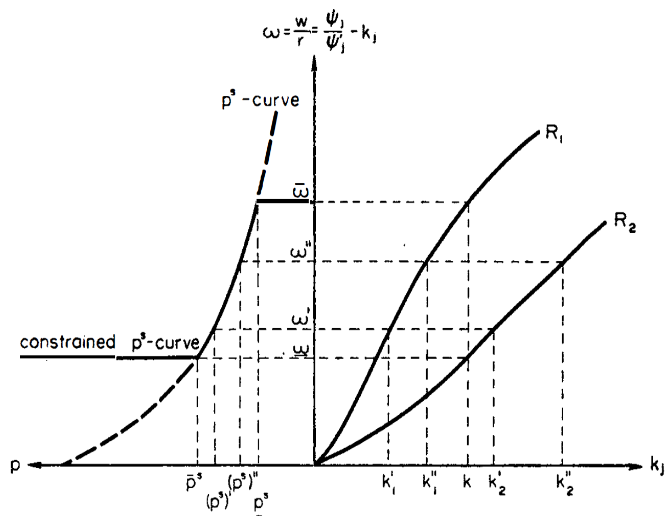

Figura 8: Relacion conjunta entre ω y k_j, ω y p, caso 2

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

El precio de la oferta relativa se define para todos los valores observables de ω. Sin embargo, no todos los valores positivos de ω son observables. En condiciones de competencia, este hecho se observa con las funciones de producción de tipo neoclásico, bajo las restricciones anteriores ($\psi(k_j) > 0,\ \psi'(k_j) > 0,\ \psi''(k_j) < 0$ para todo $k_j > 0$) y debiéndose emplear plenamente ambos factores, es decir,

$$L_1 + L_2 = L$$

$$K_1 + K_2 = K$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= 1 \\ k_1 l_1 + k_2 l_2 &= k \end{aligned} \tag{6.19}$$

En forma práctica, en estas ecuaciones de equilibrio, la oferta de trabajo y capital de la derecha deberá suplir plenamente los requerimientos de factores de la izquierda por parte de ambas industrias.

Aún así, para cualquier valor ω [y $k_j(\omega)$] positivo no se puede estar seguro de que en esta última igualdad se obtengan l_1 y l_2 no negativos. Por ello, se consideraran los valores acordes a lo supuesto y se asumirá entonces un l_j con el valor más pequeño que será 0 y otro con el más alto que será 1. En términos de la figura anterior, sean

$$\begin{aligned} \overline{\omega} &= max\{\omega_1, \omega_2\} \\ \underline{\omega} &= min\{\omega_1, \omega_2\} \end{aligned} \tag{6.20}$$

los valores extremo de la relación salario-alquiler ω donde, solo en este caso, ω_1 esta definido por $k = k_1(\omega)$ y ω_2 esta definido por $k = k_2(\omega)$ de forma única. Como es de esperar, cada valor de ω tiene un par de asignaciones y ω_1 y ω_2 tienen una nula, o en otras palabras, los recursos no son asignados a una de las industrias. Así, en el plano-$k_j(\omega)$, $\overline{\omega}$ y $\underline{\omega}$ se encuentran sucesivamente recorriendo desde k hasta encontrar las dos curvas-$k_j(\omega)$. Entonces cualquier ω mayor que $\overline{\omega}$ o menor que $\underline{\omega}$ inducirá a las dos industrias a adoptar coeficientes de factores situados en el mismo lado de k y prescindirán de recursos o les hará falta, por lo que será incompatible con el pleno empleo de ambos factores. Bajo condiciones competitivas, por lo tanto, se observarían sólo aquellos ω situados entre $\overline{\omega}$ y $\underline{\omega}$:

$$\underline{\omega} \leqq \omega \leqq \overline{\omega}$$

Por otra parte, si el plano-$p(\omega)$ se sitúa de forma que el eje de precio relativo sea vertical, se deduce que la curva-p^s restringida (la curva con trazo más grueso en el cuadrante izquierdo de la última figura) se vuelve perfectamente elástica en $\overline{\omega}$ y $\underline{\omega}$. Ahora se definen

$$\underline{p}^s = min\{p^s(\underline{\omega}), p^s(\overline{\omega})\} \tag{6.21}$$

y

$$\overline{p}^s = max\{p^s(\underline{\omega}), p^s(\overline{\omega})\} \tag{6.22}$$

como los valores extremo del precio de oferta relativa p^s y $p \equiv p_2/p_1$ como precio relativo de mercado de los bienes. Se interpretará la posición de este último en en eje de precio relativo. Suponiendo que se encuentra en o por debajo de $\underline{p}^s$, o

$$p \leq \underline{p}^s$$

es evidente que el país debe estar completamente especializado en la producción de la primera mercancía; con $\omega = \underline{\omega}$ de acuerdo a como la primera industria sea relativamente intensiva en capital, o con $\omega = \overline{\omega}$ de acuerdo a como la segunda industria sea

relativamente intensiva en capital.
Igualmente, si p se encuentra en o por encima de $\overline{p}^s$, o

$$\overline{p}^s \leq p$$

el país debe estar completamente especializado en la producción de la segunda mercancía; con $\omega = \underline{\omega}$ de acuerdo a como la primera industria sea relativamente intensiva en trabajo, o con $\omega = \overline{\omega}$ de acuerdo a como la segunda industria sea relativamente intensiva en trabajo.

Si una industria está inactiva, ambos productos marginales, de capital y de trabajo, son cero. Para que la posibilidad de una especialización completa en la producción exista es necesario expresar las recompensas o pago de los factores de forma menos restrictiva como

$$\begin{aligned} r &\geqq p_j\psi_j' \\ \omega &\geqq p_j(\psi_j - k_j\psi_j') \end{aligned} \tag{6.23}$$

con igualdad estricta para $j = 1$ y/o $j = 2$ dado que existen ambas o una de las asignaciones y con desigualdad cuando no existe la otra y el resultado es cero. Esto completa la descripción de las limitaciones estáticas del problema. De igual manera, se han reunido las relaciones necesarias entre las variables, y reunido restricciones sobre el comportamiento de esas relaciones para, en cualquier punto del tiempo t y sólo dada la razón capital-trabajo $k(t)$, regular la producción, la asignación de factores y el pago de cada factor por medio de un solo control; el precio relativo de los bienes.

Será conveniente tener estas restricciones reunidas en un solo lugar:

$$y_j = l_j\psi(k_j) \qquad j = 1, 2. \tag{6.24}$$

$$l_1 + l_2 = 1 \tag{6.25}$$

$$k_1l_1 + k_2l_2 = k \tag{6.26}$$

$$r \geqq p_j\psi_j'(k_j) \qquad K_j[r - p_j\psi_j'(k_j)] = 0 \tag{6.27}$$

$$w \geqq p_j(\psi_j - k_j\psi_j'(k_j)) \qquad l_j[w - p_j(\psi_j - k_j\psi_j'(k_j))] = 0 \tag{6.28}$$

$$\omega = \frac{\psi_j(k_j)}{\psi_j'(k_j)} - k_j \quad j = 1 \;\; \text{y/o} \;\; 2 \tag{6.29}$$

$$l_j \geqq 0 \quad \text{con} \begin{cases} l_1 = 0 & \text{si} \quad p > \overline{p}^s \\ \\ l_2 = 0 & \text{si} \quad p < \underline{p}^s \end{cases} \tag{6.30}$$

$$\omega_j \equiv \frac{\psi_j(k)}{\psi_j'(k_j)} - k \quad j = 1, 2. \tag{6.31}$$

$$\overline{\omega} = max\{\omega_1, \omega_2\} \tag{6.32}$$

$$\underline{\omega} = min\{\omega_1, \omega_2\} \tag{6.33}$$

$$\overline{p}^s = max\{p^s(\underline{\omega}), p^s(\bar{\omega})\} = max\left\{\frac{\psi_1'(k_1(\underline{\omega}))}{\psi_2'(k_2(\underline{\omega}))}, \frac{\psi_1'(k_1(\bar{\omega}))}{\psi_2'(k_2(\bar{\omega}))}\right\} \tag{6.34}$$

$$\underline{p}^s = min\{p^s(\underline{\omega}), p^s(\bar{\omega})\} = min\left\{\frac{\psi_1'(k_1(\underline{\omega}))}{\psi_2'(k_2(\underline{\omega}))}, \frac{\psi_1'(k_1(\bar{\omega}))}{\psi_2'(k_2(\bar{\omega}))}\right\}. \tag{6.35}$$

Se hablará sobre algunas pendientes de comentar. En la cuarta, quinta y sexta se ha presentado una expresión formal al hecho de que para cada industria las desigualdades marginales débiles se mantienen como iguales si se produce algo y como desigualdad cuando no hay producción en alguna y hay especialización completa en la producción de la otra. Además, se deben cumplir las igualdades a cero ya sea porque, en efecto, se produce algo y la diferencia agrupada es cero ó porque $K_j = 0$ y $l_j = 0$ dado que faltan factores de producción. Las últimas tres restricciones sirven para definir recursivamente $\underline{p}^s$ y $\overline{p}^s$. Como se ha notado, dado p y k, el sistema de restricciones anterior puede ser resuelto únicamente para las variables restantes. Así será posible escribir, por ejemplo,

$$y_j = y_j(p, k) \quad j = 1, 2. \tag{6.36}$$

Queda pendiente ahora, teniendo en cuenta estas restricciones, describir el proceso en el ambos factores de producción cambian con el tiempo. Se supone que la población y la mano de obra crecen a una misma tasa γ:

$$L(t) = L(0)e^{\gamma t} \qquad \gamma > 0.$$

El proceso de acumulación de capital, por otra parte, es descrito por $\dot{K}(t) = Y_2(t)$, de donde

$$\dot{k}(t) \equiv \frac{d}{dt}K(t)/L(t) = \frac{\dot{K}(t)L(t) - \dot{L}(t)K(t)}{[L(t)]^2} = y_2(p(t), k(t)) - \gamma k(t). \tag{6.37}$$

Al añadir esta última expresión a las restricciones estáticas anteriores es posible, dado sólo el valor de k en algún momento del tiempo, como

$$k(0) = k_0 \tag{6.38}$$

controlar las trayectorias de tiempo completas de producción, la asignación de factores y el pago de los factores por medio de un solo control, el precio relativo.

Se describirá ahora el problema de control óptimo de este este modelo pero primero trataremos más de cerca la función U de "utilidad instantánea".

Se supondrá que la primera industria produce el bien de consumo y la segunda industria el bien de capital. Entonces se tiene $U = U(y_1)$. Además, se tendrá en cuenta en este planteamiento del problema de maximización una condición que consistirá en que en todo momento el consumo medio no sea "demasiado bajo".

Para ello, se insistirá en que la producción percápita del bien de consumo $y_1(t)$ no sea menor que un nivel de "subsistenciaçonstante o variable determinado. Sin embargo, esta suposición es puede ser un inconveniente matemático ya que el consumo óptimo puede permanecer durante algún tiempo en la frontera así definida. En consecuencia, adoptamos el supuesto alternativo, debido a Koopmans:

$$\lim_{y_1 \to 0} U(y_1) = -\infty \tag{6.39}$$

Esta expresión es propia de uno de los casos en los que es posible graficamente observar como se comporta la utilidad frente al consumo promedio. Si la producción del bien de consumo tiende a ser nula, la utilidad tenderá a menos infinito y así será conveniente alejarse constantemente de esta frontera. Esta suposición asegura que nunca será óptimo no consumir nada.
Las restricciones que hemos impuesto a U y ψ_j no garantizan que la integral

$$\int_0^\infty U(y_1(t))dt$$

converge. El problema de la no convergencia puede ser eliminado restringiendo adecuadamente la función de utilidad y/o la función de producción única.

Sin embargo, como aquí se supone que la población y la fuerza de trabajo están creciendo exponencialmente; es posible relajar un poco las restricciones impuestas a las funciones de utilidad y producción o hacerlas más fáciles de satisfacer. Basta con suponer que existe un valor de k, digamos k^*, tal que

$$\phi \equiv \psi(k) - \gamma k$$

alcanza un máximo en k^* y tal que $U^* \equiv U(\phi(k^*)) = 0$ con $U(\phi)$ monotonamente creciente.

En el modelo actual de dos sectores, se elige una función de utilidad instantánea de manera que $U^* \equiv U(c^*) = 0$, $U'(c) > 0$. Donde c^* es el nivel más alto de consumo per cápita en consonancia con el crecimiento equilibrado de la economía, es decir, con salidas y asignaciones de factores que crecen a la misma tasa exponencial γ y todos los precios constantes. Por supuesto, es necesario que k^* exista; Y esto implica algunas restricciones adicionales sobre las funciones de producción. Así, para que ambos productos crezcan exponencialmente, es necesario llegar al estado estacionario donde $\dot{k} = 0$, esto es, que el stock de capital crezca a la misma tasa γ que la fuerza de trabajo, de modo que k sea una constante. Esto a su vez implica que

$$y_2(p, k) = \gamma k \tag{6.40}$$

como vemos de (6.37). El estado estacionario que conlleva al mayor nivel de consumo se llama la regla de oro de acumulación de capital. Ahora p debe ser elegido de modo que el consumo promedio $y_1(p, k)$ sea un máximo sujeto a (6.40). Diferenciando y_1 totalmente con respecto a p, e igualando a cero, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial p} y_1(p, k) + \frac{\partial}{\partial k} y_1(p, k) \cdot \frac{dk}{dp} = 0. \tag{6.41}$$

De (6.40), sin embargo,

$$\frac{dk}{dp} = \frac{\partial y_2(p,k)/\partial p}{\gamma - \partial y_2(p,k)/\partial k}$$

Además, en condiciones de competencia perfecta se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial p} y_1(p,k) + p \frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k) = 0. \tag{6.42}$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial p} y_1(p,k) = -p \frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k)$$

En (6.42) la derivada marginal de $y_2(p,k)$ respecto a p, se multiplica por p para transformar $\frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k)$ que esta en términos de bienes de inversión en su equivalencia en términos de bienes de consumo, en otras palabras, la producción marginal $\frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k)$ al ser multiplicada por p se obtiene la cantidad de bienes de consumo que se obtendrían si la mano de obra y el capital destinado para obtener $\frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k)$ se destinara para a la producción de bienes de consumo.Ahora, se reescribe (6.41) al remplazar $\frac{dk}{dp}$ y $\frac{\partial}{\partial p} y_1(p,k)$ en (6.41))

$$\begin{aligned}
-p\frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k) + \frac{\partial}{\partial k} y_1(p,k) \cdot \frac{\partial y_2(p,k)/\partial p}{\gamma - \partial y_2(p,k)/\partial k} &= 0 \\
-p\frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k) &= -\frac{\partial}{\partial k} y_1(p,k) \cdot \frac{\partial y_2(p,k)/\partial p}{\gamma - \partial y_2(p,k)/\partial k} \\
-p\frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k)\left(\gamma - \frac{\partial}{\partial k} y_2(p,k)\right) &= \frac{\partial}{\partial k} y_1(p,k) \cdot \frac{\partial}{\partial p} y_2(p,k) \\
-p\left(\gamma - \frac{\partial}{\partial k} y_2(p,k)\right) &= -\frac{\partial}{\partial k} y_1(p,k) \\
\frac{\partial}{\partial k} y_1(p,k) + p\frac{\partial}{\partial k} y_2(p,k) &= p\gamma \\
\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial}{\partial k} y_1(p,k) + \frac{\partial}{\partial k} y_2(p,k) &= \gamma
\end{aligned}$$

La parte izquierda, sin embargo, es la tasa a la que la producción per cápita (en términos de la segunda mercancía) cambia cuando el stock total de capital cambia. Por lo tanto, es igual al producto marginal del capital en términos de sí mismo:

$$\psi_2'(k_2) = \gamma. \tag{6.43}$$

así, (6.40) y (6.43) son las condiciones necesarias para el crecimiento en la edad de oro. La existencia de un $k(p)$ tal que (6.40) se mantiene es asegurada por las restricciones (6.12) impuestas a la función de producción ψ_2. Sin embargo, (6.12) no implica por sí mismo la existencia de un ω y un $K_2(\omega)$ tal que (6.43) sea satisfecho. La existencia de tales valores es un supuesto adicional que se introduce ahora. Habiendo garantizado la existencia de k^*, el problema del crecimiento económico óptimo puede ser descrito como el de encontrar el control $p(t)$ tal que

$$\int_0^\infty U(y_1(p(t), k(t)))dt \tag{6.44}$$

es un máximo sujeto a (6.24)-(6.35) y (6.37)-(6.39), y con todas las variables obligadas a ser no negativas.
El problema puede se resuelve aplicando la teoría de control optimo adecuadamente. A partir de la función intermedia $U(y_1(p(t), k(t)))$, la ecuación de movimiento $y_2(p, k)-\gamma k$ y una variable auxiliar $\lambda(t)$, denominada variable de coestado, se determina la expresión hamiltoniana del siguiente modo:

$$H(k, \lambda, p) = U(y_1(p, k)) + \lambda[y_2(p, k) - \gamma k] \tag{6.45}$$

donde por conveniencia se suprime la dependencia temporal de todas las variables. En el presente estudio el multiplicador λ puede ser interpretado como la utilidad por unidad de inversión per cápita, es decir, como el precio de demanda de la comunidad, en términos de utilidad, de bienes de capital. Se deduce que H mismo puede interpretarse como la utilidad de la producción total per cápita. Teniendo en cuenta que p nunca debe ser cero, incluso cuando es óptimo dedicar todos los recursos a la producción de bienes de consumo, y que p es ilimitado hacia arriba, se aplica la primera condición del principio del máximo que establece que el Hamiltoniano debe ser maximizado con respecto a la variable de control, entonces

$$0 = \frac{\partial}{\partial p}H(p, k) = U'(y_1(p, k)) \cdot \frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k) + \lambda\frac{\partial}{\partial p}y_2(p, k)$$

o, en vista de que en (6.42),

$$\frac{\partial}{\partial p}y_2(p, k) = -\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= U'(y_1(p, k)) \cdot \frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k) + \lambda\frac{\partial}{\partial p}y_2(p, k) \\
&= U^{'}(y_1(p, k)) \cdot \frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k) + \lambda\left(-\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k)\right) \\
&= U^{'}(y_1(p, k)) \cdot \frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k) - \frac{\lambda}{p}\frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k) \\
&= \left[U'(y_1(p, k)) - \frac{\lambda}{p}\right]\frac{\partial}{\partial p}y_1(p, k)
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Como una segunda condición necesaria, se tiene que menos la derivada del Hamiltoniano respecto a k (intensidad de capital por trabajador) debe ser igual a $\dot{\lambda}$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial k}H(p, k) = -\left[U'(y_1(p, k))\frac{\partial}{\partial k}y_1(p, k) + \lambda\frac{\partial}{\partial k}y_2(p, k)\right] + \lambda\gamma \tag{6.47}$$

En términos económicos, el precio de la demanda social de los bienes de capital debe cambiar a través del tiempo de conformidad con el producto marginal neto imputado del capital (es decir, después de permitir el equipo de la adición a la población).
Las ecuaciones diferenciales (6.37) y (6.47), junto con la condición óptima (6.46) y las restricciones (6.24)-(6.35) y (6.37)- (6.39), determina las trayectorias de λ, p y k en el tiempo. A continuación se busca determinar algunas de las características generales de esas trayectorias. Para ello primero se construye un diagrama de fases para λ y k. De (6.39) se sabe que un consumo igual cero en cualquier instante t no es optimo, por tanto, el primer bien debe ser producido, lo que indica que la estructura de las dos ecuaciones diferenciales depende de si se produce el segundo bien.
Por lo tanto, se inicia marcando en el cuadrante no negativo la frontera entre los valores de k e λ para los cuales la economía está completamente especializada en producir el primer bien o de consumo y los valores para los que produce ambos productos. Esta frontera se define por (k, λ)-pares que satisfacen

$$\underline{\lambda}(k) \equiv p^s(k) \cdot U'(\psi_1(k)). \tag{6.48}$$

Para asegurar que esto es así, obsérvese primero que cuando la economía se especializa en producir la primera mercancía pero está a punto de producir ambas, la derivada derecha $\partial y_1(p,k)/\partial p+$ es negativa, porque para comenzar a producir eficientemente unidades del bien de inversión, se debe destinar a su producción factores que se estaban usando en la producción de los bienes de consumo, lo cual reducirá la producción de bienes de consumo, afirmación que se deprende de la definicion de $\underline{p}^s(k)$. De modo que, de (6.46), que muestra dos expresiones que se multiplican e igualan a cero, es decir que $U'(y_1(p,k)) - \frac{\lambda}{p} = 0$ o $\frac{\partial}{\partial p} y_1(p,k) = 0$, pero este ultimo no puede ser cero por lo anteriormente indicado, entonces

$$\begin{aligned} U'(y_1(p,k)) - \frac{\lambda}{p} &= 0 \\ \frac{p\,(U'(y_1(p,k))) - \lambda}{p} &= 0 \\ p \cdot U'(y_1(p,k)) - \lambda &= 0. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Ademas, cuando se produce solamente el bien de consumo y se esta apunto de empezar a producir el bien de inversión todo el el capital y toda la fuerza de trabajo se encuentra la industria uno, por tanto $K_1 = K$ y $L_1 = L$, entonces se observa de (6.8) que

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{L_1}{L} \psi_1(k_1) \\ &= \frac{L}{L} \psi_1\left(\frac{K_1}{L_1}\right) \\ &= \psi_1\left(\frac{K}{L}\right) \\ &= \psi_1(k) \end{aligned}$$

$$y_1 = \psi_1(k). \tag{6.50}$$

entonces,(6.48) se deduce por medio de (6.49) y (6.50). Para fijar la forma de la frontera se debe tratar por separado los dos casos en los que, respectivamente, la primera o segunda industria es relativamente intensiva en capital.

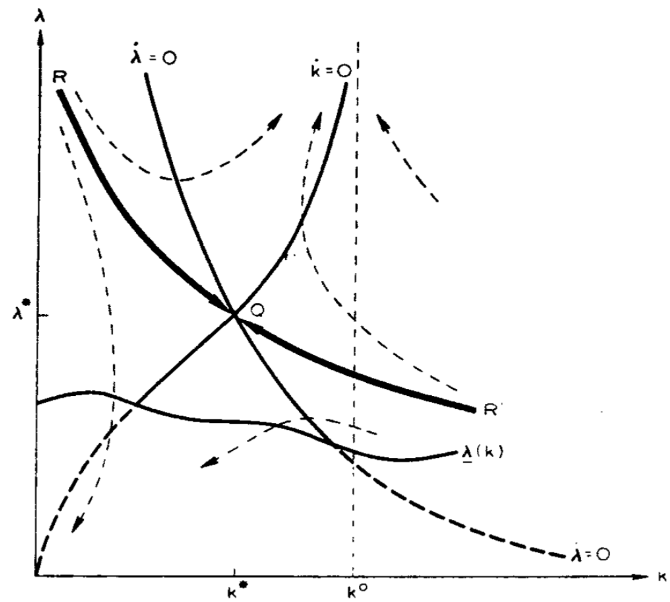

Figura 9: Relación entre k y λ , caso 1

Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

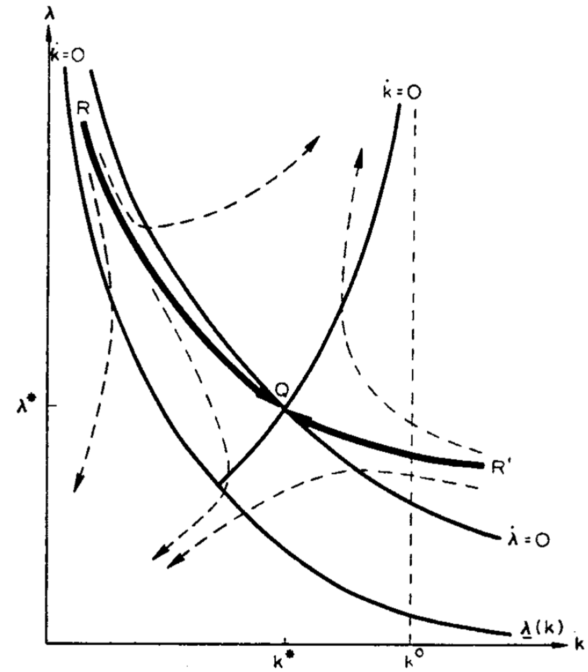

Figura 10: Relación entre k y λ , caso 2
Fuente: HADLEY. G, KEMP. M, Variational methods in economics, 1973

Entonces supóngase que la primera industria es relativamente intensiva en capital, de modo que, para todo ω, $k_1 > k_2$. A partir de la Figura 7, se deduce que $d\underline{p}^s(k)/dk$ es positivo, recordando que U y ψ_j son funciones cóncavas, esto es que la primera derivada de U es positiva, $U^{'} > 0$, y la segunda derivada de U es negativa, $U^{''} < 0$, análogamente $\psi_1^{'}(k) > 0$; por lo tanto

$$\frac{d}{dk}\underline{\lambda}(k) = \frac{d}{dk}\underline{p}^s(k) \cdot U'(\psi_1(k)) + \underline{p}^s(k) \cdot U''(\psi_1(k)) \cdot \psi_1'(k) \tag{6.51}$$

donde

$$\frac{d}{dk}\underline{p}^s(k) \cdot U'(\psi_1(k)) > 0$$
$$\underline{p}^s(k) \cdot U''(\psi_1(k)) \cdot \psi_1'(k) < 0$$

puede ser de cualquier signo, luego, la gráfica de $\underline{\lambda}$ es no monótona (como en la Figura 9). Aunque $U'(\psi_1)$ puede especificarse independientemente de las funciones de producción cuando, no es posible sin restricciones adicionales sobre las funciones de utilidad y producción determinar el comportamiento de $\underline{\lambda}$, cuando k pasa a cero e infinito. Cuando k va a cero, $\underline{\lambda}(k)$ puede ir a cero, un número finito positivo, o al infinito; y lo mismo es cierto cuando k va al infinito. Por ejemplo, es bastante consistente con nuestros supuestos sobre U y el ψ_1 suponer que

$$lim_{k\to 0}\underline{p}^s(k)/k^{\alpha} = constante \quad \alpha \geq 0$$

$$lim_{k\to 0}\psi_1(k)/k^{\beta} = constante \quad \beta > 0$$

$$lim_{\psi_1\to 0}U'(\psi_1)/\psi_1^{\gamma} = constante \quad \gamma \leq 0.$$

Pero entonces $lim_{k\to 0}\underline{p}^s(k)U'(\psi(k))/k^{\alpha+\gamma\beta} = constante$, de modo que $lim_{k\to 0}\underline{p}^s \cdot U'(\psi_1(k)) = 0$, una constante positiva o ∞ según $\gamma > -\alpha/\beta$, $\gamma < -\alpha/\beta$ respectivamente. En la Figura 9 la gráfica de $\gamma(k)$ se muestra comenzando con un valor finito positivo de γ.
Supongamos alternativamente que la segunda industria es relativamente intensiva en capital, de modo que, para todo ω, $k_1(\omega) < k_2(\omega)$. Entonces $lim_{k\to 0}\underline{\lambda}(k) = \infty$ y como en la Figura 8 se observa que $\frac{d}{dk}\underline{p}^s(k) < 0$, entonces en (6.51) se tiene que

$$\frac{d}{dk}\underline{p}^s(k) \cdot U'(\psi_1(k)) < 0$$

$$\underline{p}^s(k) \cdot U''(\psi_1(k)) \cdot \psi_1'(k) < 0$$

por lo tanto, es decreciente, $d\underline{\lambda}(k)/dk < 0$, como en la Figura 10.
Se desprende de las Figuras 9 y 10 que la trayectoria en el tiempo de λ y k generada por las ecuaciones diferenciales (6.37) y (6.47), y el diagrama de fase asociado, dependerá de las intensidades de los factores relativos de las dos industrias.

7. CONCLUSIONES

En vista del trabajo realizado, se presentan las siguientes apreciaciones:

- ☛ El modelo bisectorial representa a grandes rasgos la economía de un país, en el cual la producción se biparticiona entre consumo e inversión; cada uno de estos se encuentra a cargo de una industria en donde a través del tiempo las familias buscan obtener el máximo consumo posible bajo las restricciones presupuestarias.
- ☛ Describiendo minuciosamente cada proceso con su respectiva, interpretación económica, los resultados esperados poseen mayor precisión encontrando así el contexto el cual interpretarlo.
- ☛ En la teoría hallada sobre el crecimiento económico de los modelos conocidos como bisectoriales, se infiere que sirven como herramientas de andamiaje para realizar estudios de modelos más complejos como lo es el caso de los multisectoriales.
- ☛ Las restricciones impuestas a los modelos son más comprensibles si cuentan con un desarrollo matemático más detallado.

Referencias

[1] HADLEY, George y KEMP, Murray. *Variational Methods in Economics.* North Holland Publishing Company, 1971. 378p.

[2] SALA-I-MARTIN, Xavier. *Apuntes de Crecimiento Económico.* Barcelona, España. Antoni Bosch editor, 2000.

[3] BONIFAZ, Jose Luis y LAMA, Ruy. *Optimización Dinámica y Teoría Económica.* Lima, Perú. Universidad del Pacífico, Centro de Investigación, 2002. 209p.

[4] UZAWA, Hirofumi. *On a Two-sector Model of Economic Growth.* Virginia, United States. Defense Technical Information Center, 1960. 13p.

[5] SENOUCI, Medih. *Optimal growth and the golden rule in a two-sector model of capital accumulation.* Paris, France. Paris School of Economics, 2011. 37p.

[6] INTRILIGATOR, Michael D. *Mathematical Optimization and Economic Theory.* Los Angeles, United States. University of California. SIAM, 2002. 508p.

[7] RAMANATHAN, Ramu. *Introduction to the Theory of Economic Growth.* California, United States. Springer Scienceand Business Media, 2012. 350p.

[8] CHIANG, Alpha C. *Elements of Dynamic Optimization.* Connecticut, United States.The University of Connecticut. Waveland Press, 1999. 327p.

[9] CHIANG, Alpha C. *Metodos fundamentales de economía matemática.* Cuidad de México, Mexico.McGraw-Hill, 2006 1999. 688 p.