Compilación de procesos de investigación en geometría, estadística y sistemas dinámicos

Héctor Felipe Díaz Mora

Jesús Antonio Villarraga Palomino

Leidy Estefanía López Prieto

Luis Hernando Piedrahíta Novoa

Editorial
UCundinamarca

UDEC
UNIVERSIDAD DE
CUNDINAMARCA

Díaz Mora, H. F., López Prieto, L. E., Piedrahíta Novoa, L. H., Villarraga Palomino, J. A.

Compilación de procesos de investigación en geometría, estadística y sistemas dinámicos.

Fusagasugá: Editorial de la Universidad de Cundinamarca. 2020.

p.

ISBN: 978-958-52515-8-8

UDECA
UNIVERSIDAD DE
CUNDINAMARCA

Dr. Adriano Muñoz Barrera
Rector

Dra. María Eulalia Buenahora Ochoa
Vicerrector Académico

Dr. Jaime Augusto Porras Jiménez
Director de Investigación Universitaria

Mtra. Aura Esther Álvarez Lara
Decano de la Facultad de Educación

© Universidad de Cundinamarca, 2020
Primera Edición, 2020

Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas

Autores:

Héctor Felipe Díaz Mora
Jesús Antonio Villarraga Palomino
Leidy Estefanía López Prieto
Luis Hernando Piedrahíta Novoa

Editorial

Dirección editorial: Dr. Jaime Augusto Porras Jiménez
Editor: Rosenberg del Carpio
Corrección de estilo: Yesid Castiblanco Barreto
Diseño editorial: Zulma Milena Useche Vargas
Registro digital: Ana Milena Bejarano Torres

Dirección de Investigación

Universidad de Cundinamarca
www.ucundinamarca.edu.co
editorial@ucundinamarca.edu.co
Diagonal 18 No. 20 - 29
Fusagasugá - Cundinamarca

ISBN: 978-958-52515-8-8

Colaboradores

Martha Lidia Barreto Moreno
– Universidad de Cundinamarca

Alejandro Duitama Leal
– Universidad de Cundinamarca

Jaime Alfonso Gutiérrez Castaño
– Universidad de Cundinamarca

Samuel Ricardo Padilla Narváez
– Servicio Nacional de Aprendizaje (Sena)

Javier Hernán Gil Gómez
– Universidad El Bosque

Osvaldo Jesús Rojas Velázquez
– Universidad Antonio Nariño

DERECHOS RESERVADOS:

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro, sin permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

Los conceptos aquí expresados son responsabilidad exclusiva de sus autores y no necesariamente representan la posición oficial de la Universidad de Cundinamarca.

No comercial: no puede utilizar esta obra con fines comerciales de ningún tipo. Tampoco puede vender esta obra bajo ningún concepto ni publicar estos contenidos en sitios web que incluyan publicidad de cualquier tipo.

El presente libro ha sido fruto de la labor investigativa del Grupo de Investigación e Innovación en Modelación Matemática y Computacional – GIIIMMYC.

En cuanto a la información consignada en el presente documento, fue revisada y evaluada por pares evaluadores externos doble ciego con el fin de garantizar una valoración crítica e imparcial sobre la calidad de los manuscritos; por lo cual los autores fueron informados sobre las recomendaciones dadas por los pares para realizar los respectivos cambios y/o ajustes del caso, para finalmente ser aprobados por el Comité Editorial de la Universidad de Cundinamarca.

Contenido

Capítulo 1.....	7
Geometría del triángulo desde el punto de vista euclídeo	
<i>Luis Hernando Piedrahíta Novoa</i>	
Capítulo 2.....	9
Geometría del triángulo desde el punto de vista de las homotecias	
<i>Luis Hernando Piedrahíta Novoa</i>	
Capítulo 3.....	9
Estadística descriptiva en R	
<i>Jesús Antonio Villarraga Palomino, Héctor Felipe Díaz Mora</i>	
Capítulo 4.....	9
Sistemas dinámicos aplicados al estudio poblacional de la <i>Eisenia foétida</i> y el análisis de efectos del humus en un cultivo de habichuela	
<i>Leidy Estefanía López Prieto</i>	

Geometría elemental del triángulo

Luis Hernando Piedrahíta Novoa

Contenido

1 Introducción

2 Capítulo 1

- 2.1 Qué es geometría
- 2.2 Homotecias en el plano
- 2.3 Propiedades de las homotecias
- 2.4 Ejemplos de construcciones homotéticas
- 2.5 Figuras homotéticas en el espacio

3 Capítulo 2

- 3.1 Puntos y líneas notables en un triángulo
- 3.2 Puntos importantes
- 3.3 El incírculo y los excírculos
- 3.4 El triángulo órtico
- 3.5 El triángulo medial y la línea de Euler
- 3.6 La circunferencia de los nueve puntos
- 3.7 Consideraciones sobre el triángulo órtico
- 3.8 Más consideraciones sobre el triángulo órtico

4 Capítulo 3

La geometría desde el punto de vista de las homotecias

5 Capítulo 4

1. Introducción

Una de las figuras geométricas que despierta gran interés para su estudio y análisis es el triángulo. Pues en él se pueden aplicar muchos de los fundamentos de la geometría eulideana, como son paralelismo, perpendicularidad, concurrencia de rectas, colinealidad de puntos, congruencias y semejanza. También sus puntos y líneas notables (medianas, alturas, bisectrices) nos lleva a la consideración de círculos relacionados con el triángulo y sus ángulos.

El concepto de semejanza brinda la oportunidad de estudiar aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes en transformaciones que no son propiamente isometrías.

Las homotecias (transformaciones de semejanza) son las encargadas de tal análisis, puesto que al conservar la razón entre puntos correspondientes en dos figuras, se independiza de un sistema de medida establecido y sus resultados son válidos en cualquiera de ellos.

En este esquema, el presente trabajo considera inicialmente las propiedades de las homotecias. Luego se hace un estudio de la geometría del triángulo desde el punto de vista euclideo y después se contrasta con algunos resultados con la metodología de las homotecias.

Finalmente hay una selección de problemas especiales en curvas, en cuyas soluciones es notorio el poder de las homotecias.

De manera especial agradezco la invaluable colaboración de la profesora María de Losada en sus labores de asesoría, revisión y sugerencias para la terminación de este trabajo.

Luis Hernando Piedrahíta Novoa

2. Capítulo 1

2.1. Qué es geometría

Se puede definir geometría euclidea como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes en movimientos isométricos ya sea en el plano o en el espacio euclideo.

Definición:

Se llama isometría a toda transformación de un conjunto de puntos (de un espacio euclideo) que conserva la distancia entre puntos, es decir, si el punto X se transforma en el punto X' y Y se transforma en Y' (notaremos esto por $X \rightarrow X'$, $Y \rightarrow Y'$), la longitud del segmento $X'Y'$ es igual a la longitud del segmento XY .

Definición:

La magnitud del segmento dirigido $\overrightarrow{XY}$ es la distancia con signo entre los puntos X e Y y la notaremos $\overrightarrow{XY}$. De acuerdo con esto $\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$.

Las transformaciones son funciones de un conjunto de puntos sobre sí mismo. El conjunto de transformaciones con la ley de composición tiene estructura de grupo. Entre sus subgrupos se destacan: el de las traslaciones alrededor de un punto O , $R(O)$, y el de las reflexiones sobre una recta dada Z , $R(Z)$.

Un aspecto fundamental de estos subgrupos es el de conservar la distancia y, por lo tanto, son importantes en el estudio de la congruencia de figuras geométricas. Sin embargo, esta no es la única característica contemplada en la definición de F. Klein, quien dio la primera definición precisa de geometría: es la ciencia que estudia aquellas propiedades de las figuras geométricas que no cambian en transformaciones de semejanza.

Definición:

Se llama transformación de semejanza con coeficiente $k(k \in \mathbf{R}, k \neq 0)$ y centro O , O un punto del plano, a la transformación de un espacio euclideo en la que las longitudes de todos los segmentos se multiplican por k , es decir, si

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X' \\ Y &\rightarrow Y' \end{aligned}$$

entonces

$$X'Y' = kXY$$

Es de observar que las transformaciones de semejanza constituyen un grupo que contiene como subgrupo al de movimientos o isometrías.

El estudio de las transformaciones de semejanza es de gran importancia en la geometría elemental, no solo por su interés teórico, sino también por su utilidad en la solución de muchos problemas.

Nuestro estudio estará centrado en las transformaciones de semejanza, llamadas también homotecias, y su aplicación en problemas y construcciones especiales.

2.2. Homotecias en el plano

Un punto X' se obtiene en un punto X por una semejanza central con centro en el punto O y con coeficiente de semejanza $k(k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$. Si X' está sobre la recta OX , y si $OX'/OX = k$ (Figura 1.1.a.) la transformación de un plano que envía todo punto X del plano, en otro punto X' con respecto al centro de semejanza k , es llamada semejanza central. El punto O es llamado el centro de semejanza, y el k el coeficiente de transformación o razón de semejanza; el punto X' es llamado la imagen de X bajo la transformación; esto conlleva transformar la siguiente:

Definición:

Sean O un punto fijo del plano E , y k un número real dado distinto de cero. Por homotecia (expansión o dilatación o alargamiento) $H(O, k)$ queremos decir la transformación de E sobre sí mismo, que transporta a cada punto P del plano al punto P' de este, tal que P, O, P' son colineales y $OP' = kOP$. De esta manera, los puntos de la figura F se transportan en punto de una figura F' semejante a F con razón de semejanza k (Figura 1.1.b.).

Figura 1.1.

Figura 2-1.: Figura 1.1.

2.3. Propiedades de las homotecias

Propiedad 1:

Si el coeficiente k de la homotecia $H(O, K)$ es igual a 1, todos los puntos del plano E permanecen invariantes (es decir, cada punto es su propia imagen). En este caso, la homotecia $H(O, 1)$ es la transformación idéntica de E sobre sí mismo.

Propiedad 2:

Si k es distinto de 1, solamente el centro O permanece invariante.

Propiedad 2':

Si $K < O$, entonces O está entre P y P'

Propiedad 3:

En toda homotecia, una recta L es transformada en una recta L' , paralela a L . Para construir L' basta encontrar la imagen A' de un punto A de L y luego trazar L' la recta paralela a L que pasa por A' . Esto deja claro que una homotecia transforma cada recta del plano en una recta paralela a ella (Figura 1.2.).

Figura 1.2

Figura 2-2.: Figura 1.2.

Propiedad 4:

Como consecuencia de la propiedad 3, la imagen de un segmento es otro segmento paralelo a este; de hecho dos segmentos paralelos son homotéticos, con dos centros de homotecia distintos. Para localizarlos, consideramos los segmentos paralelos AB y $A'B'$.

Nota: Si $AB = A'B'$, un centro de homotecia estaría localizado en el punto en el infinito. Un centro de homotecia se encuentra en la intersección de las rectas AA' y BB' y el otro en el punto de intersección de las rectas AB' y BA' . Es de notar que los coeficientes respectivos son en el primer caso mayor que cero y en el segundo menor que cero, como observamos seguidamente (Figura 1.3.).

Figura 1.3.

Figura 2-3.: Figura 1.3.

Demostremos que $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{A'B'}$ son homotéticos. Sea $\mathbf{H(O, k)}$ la homotecia con centro en $\mathbf{O}$, punto de intersección de $\mathbf{AA'}$ y $\mathbf{BB'}$, entonces:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \text{ y los triángulos } OAB \text{ y } OA'B' \text{ son semejantes (por tener el ángulo } AOB$$

en común)

Se sigue que $\frac{A'B'}{AB} = K$, o sea, $A'B' = kAB$

Entonces, se tiene que: $\frac{A'C'}{k} = AC$ y $\frac{C'B'}{k} = CH$ luego, $\frac{A'B'}{k} = \frac{A'C'}{k} + \frac{C'B'}{k}$ es decir

$C'B' = A'C' + C'B'$ y todo punto de AB se corresponde homotéticamente a un punto de $A'B'$.

También se puede observar que A y A' están en el mismo lado del punto O , del cual $k > 0$. En la Figura 1.3.b. se tiene que O es el punto de intersección de BA' y AB' . En este caso el coeficiente de semejanza k está dado por:

$$k = \frac{A'B}{BA} = \frac{A'B'}{-AB} = O$$

Propiedad 5:

La medida angular permanece invariante en cualquier homotecia; es decir, si dos rectas L_1 L_2 forman un ángulo α , sus imágenes en una homotecia también forman un ángulo α , debido a que las dos rectas y sus imágenes determinan un paralelogramo ABC, el cual tiene los ángulos iguales a los del triángulo ABC, es decir, los dos triángulos son semejantes (Figura 1.4.).

Figura 1.4.

Figura 2-4.: Figura 1.4.

Propiedad 6. Circunferencias homotéticas:

Un círculo S con centro en A y radio r es transportado por una semejanza central en un nuevo círculo S' con centro en A' , imagen de A, y con radio $r' = kr$ donde k es el coeficiente

de semejanza de los triángulos OAM y $OA'M'$ (Figura 1.5.), se sigue que $A'M' / AM = k$, esto es $A'M' = kr$, lo cual muestra que la imagen de S es el círculo con centro en A' y radio kr.

Por otra parte, dos circunferencias no congruentes S y S' de radio r y r' con centros en A y A' ($Af = A'$), siempre son centralmente semejantes, tomando como centro de semejanza el punto O sobre la línea AA' que se encuentra en el segmento AA' y tal que $OA'/OA = r'/r$ y tomando este valor como coeficiente de semejanza, el punto O es llamado centro de semejanza exterior de los círculos S y S' .

Si el círculo menor no está en centro del mayor, un centro de semejanza se encuentra también en el punto de intersección de las tangentes exteriores comunes. (Figura 1.5.a.).

Para construir el centro de semejanza exterior de dos círculos S y S' no congruentes ni concéntricos, se trazan radios paralelos AM y $A'M'$ y se unen M y M' y A y A' , O es el punto de intersección de MM' y AA' . (Figuras 1.5.b. y 1.5.c.).

Si S y S' son tangentes interiormente, el centro de semejanza coincide con el punto de tangencia. (Figura 1.5.b.).

Figura 1.5

Figura 2-5.: Figura 1.5.

Por otra parte, dos circunferencias cualesquiera S' y S son centralmente semejantes con razón de semejanza negativo igual a $-r'/r$ donde r' y r son los radios de S' y S , respectivamente, y centro en el punto O sobre la línea AA' que une los centros y tal que:

$$\frac{OA'}{OA} = -\frac{r'}{r}$$

El punto O es llamado el centro de semejanza interior de S y S'. Para encontrarlo es suficiente trazar dos radios paralelos pero con sentidos AM y A'M' en dichos círculos y luego trazar MM' y AA'. Si S y S' no se intersectan, el centro de semejanza interior se encuentra en el punto de intersección de las tangentes internas comunes (Figura 1.6.a.). Si S y S' son tangentes exteriormente, O es el punto de tangencia (Figura 1.6.b.). Podemos hacer las siguientes observaciones: dos círculos incongruentes de radios r' y r son centralmente semejantes o, mejor, son homotéticos con centros de homotecia interior y exterior y coeficientes de homotecia -r'/r v +r'/r, respectivamente.

Dos círculos congruentes son centralmente semejantes de una sola manera, con coeficiente igual a -1 . Los centros exterior e interior de semejanza de dos o más círculos concéntricos (y solo para ellos) coinciden con el centro común de los círculos.

Figura 2-6.: Figura 1.6.

Figura 2-7.: Figura 1.7.

Propiedad 7. Composición de homotecias:

Sean $H_1(O_1, K_1)$ y $H_2(O_2, K_2)$ dos homotecias, vamos a ver qué resulta cuando efectuemos la composición entre ellas.

Sea F , con centro en O , y razón k , los segmentos correspondientes en F y F' son paralelos y tienen razón k . Así, los segmentos correspondientes en F y F'' son paralelos y tienen razón

$$k_1 \cdot k_2 \text{ (pues } \frac{A_1 B_1}{AB} = K_1 \text{ y } \frac{A' B'}{A B'} = K_2 \text{ luego } \frac{A' B'}{AB} = K_1 \cdot K_2)$$

Es decir, F'' es imagen homotética de F , con razón $K_2 \cdot k_1$ y si $K_2 \cdot k_1 = 1$ y si $K_1 \cdot k_1 = 1$ F'' es una traslación de F (ver Figuras 1.7.a. y 1.7.b.).

Encontramos ahora el centro en O de esta homotecia (o la magnitud y dirección). Si $O_1 = O_2$ entonces O coincide con ellos (Figura 1.7.c). Si $O_1 \neq O_2$, la primera homotecia deja fijo a O_1 y la segunda homotecia envía a O_1 en O_1' sobre la recta $O_1 O_2$ tal que $\frac{O_1 O_1'}{O_1 O_2} = K_2$; o sea,

la homotecia compuesta envía en O_1 en O_1' , de aquí, se sigue que si $K_2 \cdot k_1 = 1$ se obtiene una traslación en la dirección $O_1 O_1'$ (o sea en la dirección $O_1 O_2$) una distancia $a = O_1 O_1'$

Como $\dim O_2 O_1 = K$, a se puede representar por:

$$\frac{O_2 O_1}{O_1 O_2}$$

1 2

$$a = \frac{O_2 O_1' - O_2 O_1}{O_2 O_1} = \frac{O_2 O_1' - O_2 O_1}{O_2 O_1} = (K - 1) \cdot \frac{O_2 O_1}{O_2 O_1}$$

2 1

2 1

2 1

2

2 1

Esto es, si $k_3 \cdot k_1 \cdot f = 1$ el centro buscado estará sobre la recta $O_1O'_1$.
Una expresión para la posición del punto O se encuentra como sigue:

$$\begin{aligned} \text{puesto que } \frac{O_2O'_1}{O_1O_1} &= K_2 \text{ y } \frac{OO'_1}{OO_1} = K \cdot K_2 \\ \text{tenemos } \frac{O_1O'_1 - 1}{O_1O_1} &= \frac{O_2O'_1 - OO_1}{O_1O_1} \cdot \frac{OO_1}{OO_1} = k - 1 \\ \text{y } \frac{OO'_1}{OO_1} &= \frac{O_2O'_1 - OO_1}{OO_1} = k_1 \cdot k_2 \cdot 1 \\ \text{así, } \frac{OO'_1}{OO_1} &= \frac{k_2 \cdot 1}{k_1 \cdot k_2 - 1} \\ \text{finalmente } OO_1 &= \frac{k_2 - 1}{k_1 \cdot k_2 - 1} \cdot O_2O_1 \end{aligned}$$

Figura 2-8.: Figura 1.8.

Figura 2-9.: Figura 1.9.

Una homotecia H tal que $H^2 = 1$, se llama involutiva. Por el resultado anterior sabemos que el coeficiente k de una homotecia involutiva H es tal que $k \cdot k = 1$, es decir, $k = \pm 1$. Se sigue que son involutivas las homotecias $H(O,1)$ y $H(O,-1)$.

2.4. Ejemplos de construcciones homotéticas

Problema 1: hallar el lugar deométrico de los puntos medios de las cuerdas que salen de un punto fijo A en el círculo S . (Figura 1.10.).

Figura 2-10.: Figura 1.10.

Es claro que el conjunto de los puntos medios de las cuerdas forma un círculo, que por lo visto anteriormente es homotético con S y cuyo centro de semejanza está en el punto de tangencia A , su radio r' igual a $1/2 \cdot r$, donde r es el radio de S . La homotecia H en cuestión es $H(A, 1/2)$ y así S' es imagen homotética de S .

Problema 2: en la Figura 1.11. siguiente considérese el semicírculo S . En ella AB es diámetro de S , BD cuerda, BC es tal que $BD = DC$, E punto de corte de CO y AD , y O centro del círculo S . Los puntos E así determinados están sobre un semicírculo cuyo centro está sobre el diámetro AB (Figura 1.11.).

Figura 1.9

Figura 2-11.: Figura 1.11.

En el triángulo ABC , CO y AD son medianas del triángulo ABC y E su punto de corte. $AE = 2ED$. El problema entonces se puede plantear así: hallar el lugar geométrico de los puntos situados a $2/3$ de distancia del punto de partida de todas las cuerdas que salen del punto A en la circunferencia S . Según esto, este lugar geométrico corresponde a una circunferencia S' tangente y a S en A , cuyo centro está sobre el diámetro AB . Si r y r' son los radios de S

y S' entonces, $\frac{r'}{r} = \frac{2}{3}$ así S' es imagen homotética de S bajo la homotecia $H(1, 2/3)$.

2.5. Figuras homotéticas en el espacio

Definición:

Dado un conjunto de puntos $A, B, C, \dots$, en el espacio, si se unen estos puntos con un punto dado S y se construyen los puntos $A', B', C', \dots$, sobre los rayos $SA, SB, SC, \dots$, tales

que $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = k$; donde k es una razón dada, el conjunto de puntos $A', B', C', \dots$,

así obtenido es el homotético al conjunto A, B, C, ... El punto S es el centro de la homotecia de los dos conjuntos y k es la razón. Si k es positivo las semirrectas SA y SA' son iguales

y los dos sistemas son directamente homotéticos; si k es negativo las semirrectas SA y SA' tienen sentido opuesto y los dos sistemas son inversamente homotéticos. Cuando $k = -1$ los dos conjuntos de puntos son simétricos respecto a S. **Observación:** para dos valores de k iguales en magnitud pero de signos opuestos, los dos conjuntos de puntos son simétricos con respecto a S, pero al contrario del caso del plano estas dos figuras no se pueden superponer.

Propiedades:

1. La imagen homotética de una recta es una recta.
2. El homotético de un ángulo entre dos rectas es igual al ángulo entre sus líneas homotéticas o, en otras palabras, dos ángulos planos homotéticos son iguales.
3. El homotético de un plano es un plano, y estos dos planos son paralelos.

Veamos la demostración de 3. Sea A un punto cualquiera de un plano α y L' una recta de α que contiene a A.

El homotético de L es la recta L' paralela a L y que contiene el homotético A' de A, así L' es paralela al plano α . Mientras L gira alrededor de A en el plano α , su homotético L' gira alrededor de A' y describe un plano α' paralelo a α . Como consecuencia tenemos:

4. El ángulo entre dos planos es igual al ángulo entre sus planos homotéticos, en otras palabras, ángulos diedros homotéticos son iguales.
5. El homotético de un círculo en el plano que no contiene el centro de homotecia es un círculo.

En efecto, sean S el centro de homotecia α' , O', A', respectivamente, homotéticos del plano α , que contiene el círculo dado, de su centro O y de cualquier punto A del círculo. Tenemos:

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{S'A'}{SA} = K$$

Así en el plano α' está a una distancia fija O'A' del punto O', es decir A' describe un círculo en el plano α . Obsérvese que este caso es más general que el correspondiente al plano pues en este último el centro de semejanza está sobre el mismo plano del círculo.

6. El homotético de una esfera es una esfera.

Sea S el centro de homotecia, O' el homotético del punto O, centro de la esfera dada y A' el homotético de cualquier punto A de la esfera. Tenemos:

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = k$$

De aquí el punto A' está una distancia fija del punto fijo O' y así genera una esfera que tiene a O' como centro. La anterior proporción nos afirma que el centro S divide la recta OO' , que une los centros de dos esferas homotéticas en la razón de sus radios OA y $O'A'$, tal razón a la vez es igual a la razón de la homotecia dada.

Esta división es externa si las esferas son directamente homotéticas y es interna si las esferas son inversamente homotéticas.

7. Dos figuras homotéticas a una tercera figura son homotéticas entre sí. Su centro de homotecia es colineal con los dos primeros centros de homotecia y la razón es igual al cociente de las dos razones dadas.

Figura 1.10

Figura 2-12.: Figura 1.12.

Sea A (Figura 1.10.) cualquier punto de la figura dada y A' y A'' sus puntos homotéticos, son los dos centros de homotecia S' y S'' de razones k' y k'' , respectivamente. Consideremos el triángulo $AS'S''$ y la transversal AA'' que encuentra a $S'S''$ en S. Por el teorema de Menelao, está:

$$\frac{AA''}{A''S''} \cdot \frac{S''S}{SS'} \cdot \frac{S'A'}{A'A} = -1$$

pero tenemos que:

$$S'A': A'A = k'$$

de estemodo

$$S'A': A'A = k': (1 - K')$$

y

$$S''A'': A''S'' = (1 - k''): k''$$

se sigue que

$$\frac{S'S}{SS''} = \frac{-k'}{k''} : \frac{1 - k'}{1 - k''}$$

Esto es, los puntos A' , A'' son colineales con el punto S de la recta $S'S''$, y este punto S no depende en particular del punto A tomado en la primera figura.

Considerando nuevamente el triángulo $AA'A''$ y la transversal $SS'S''$ por el teorema de Menelao tenemos:

$$\frac{AS'}{S'A'} \cdot \frac{A'S}{SA''} \cdot \frac{A''S''}{S''A} = -1$$

Es decir:

$$SA'': SA' = k'': K',$$

Con lo cual queda demostrada la proposición. De esto se concluye que si tres figuras son homotéticas dos a dos, sus centros de homotecia son colineales.

Observación: dos figuras $A', \dots$, y $A'' \dots$, son directamente homotéticas, si las figuras $A, \dots$, y $A', \dots$, $A, \dots$, y $A'' \dots$, son ambas directamente homotéticas o inversamente homotéticas. Si no es así, serán inversamente homotéticas.

Propiedad 8:

Si tres figuras son homotéticas dos a dos, sus centros de homotecia son colineales.

Sean A un punto de la primera figura y A' , A'' sus puntos homotéticos en las otras dos figuras. Sea ahora B cualquier otro punto de la primera figura no situado en el plano $AA'A''$ y B' , B'' sus puntos homotéticos.

Las rectas AA' y BB' se encuentran en S' , el centro de homotecia de las figuras $A, B, \dots$, y $A', B', \dots$, y las rectas AA'' y BB'' se encuentran en el punto S'' del centro de homotecia de las figuras $A', B', \dots$, y $A'', B'', \dots$. Así los puntos S, S', S'' están sobre la recta de intersección de los planos $AA'A''$, $BB'B''$.

Propiedad 9:

a. Dos triángulos en diferentes planos cuyos lados son paralelos son homotéticos.

b. Dos tetraedros cuyas caras son paralelas son homotéticos.

Demostración de a: sean ABC y $A'B'C'$ los triángulos contenidos en los planos α y α' , respectivamente. Puesto que una recta, exterior a un plano, que es paralela a una recta dada en el plano, también es paralela al plano, se tiene que la recta $A'B'$ es paralela al plano. También lo es $C'A'$, es decir, las rectas $A'B'$ y $C'A'$ son paralelas al plano α . Se sigue que el plano α' que contiene a A', B', C' es paralelo al plano α .

Con estos resultados estamos en condiciones de efectuar el siguiente análisis.

i) Si los dos triángulos son iguales, obviamente son homotéticos.

ii) Si no son iguales, las rectas AA' , BB' , CC' se intersectarán en un punto común S (intersección de los planos que contienen a los cuadriláteros $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$). Este punto S nos servirá como centro de la homotecia buscada, pues aplicando el teorema de Thales se tiene que:

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = K$$

el cual es el coeficiente de la homotecia pedida.

Demostración de b: sean $ABCD$ y $A'B'C'D'$ los tetraedros cuyas caras son respectivamente paralelas (esto es, las aristas correspondientes son paralelas). Por la parte anterior, estas caras son homotéticas; por otro lado, por ser los ángulos diedros iguales, también son homotéticos y el centro de homotecia está situado en el punto S , centro de homotecia de las respectivas caras triangulares.

Es decir, el ángulo diedro AB se corresponde con el ángulo diedro $A'B'$ y así los demás.

También se afirma que el centro de homotecia S coincide con el centro de homotecia de los triángulos ABC y $A'B'C$, pues el diedro formado por el triángulo ABC y el triángulo ABD se corresponde con el diedro formado por los triángulos $A'B'C'$ y $A'B'D'$.

Como las caras de un tetraedro son todas adyacentes entre sí, el punto S es común.

La razón de la homotecia en cuestión viene dada por:

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = \frac{SA}{S'A'} = \dots$$

Problema: construir un tetraedro que tenga sus vértices en las cuatro caras de un tetraedro dado y sus caras paralelas a las caras de un segundo tetraedro dado (Figura 1-10).

Solución: sea T un plano paralelo a la cara $A'B'C'$ del segundo tetraedro dado $A'B'C'D'$, que encuentra las aristas DA , DB , DC del primer tetraedro $ABCD$ en los puntos P , Q , R . En el triángulo PQR inscribir un triángulo A'' , B'' , C'' , respectivamente, trazamos paralelas a $A'D'$, $B'D'$, $C'D'$. Estas paralelas se encuentran en un punto D'' .

Figura 1-10

Figura 2-13.: Figura 1-13.

Ahora si T se hace variar, los vértices de $A''B''C''$ describen rectas que pasan por D . Por lo tanto, D'' también describe una recta que pasa por D y el trazo U de DD'' en el plano ABC es un vértice del tetraedro $UXYZ$ deseado.

Otra forma: a través de los vértices de $A'B'C'D'$ trazamos planos paralelos a las caras $ABCD$, formando un tetraedro $MNPQ$. Los dos tetraedros $A''B''C''D''$, $MNPQ$, forman un sistema semejante al sistema formado por $ABCD$ y el tetraedro requerido $UXYZ$. Por lo tanto, las paralelas pasando por A, B, C , a las rectas MD', ND', PD' se encuentran en el punto buscado U .

Observación: un punto que esté en un lado de un triángulo, pero que no coincida con ningún vértice de este, se llama un punto de Menelao del triángulo para dicho lado.

Teorema de Menelao: la condición necesaria y suficiente para que sean colineales tres puntos de Menelao, D, E, F , de los lados BC, CA, AB de un triángulo ABC , es que:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

Demostración: supongamos que D, E, F son colineales en una recta L , bájense perpendiculares p, q, r , a L desde A, B, C . Luego, por semejanzas sin considerar los signos:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{q}{r} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{r}{p} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{p}{q}$$

Se tiene que:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \pm 1$$

Como L tiene que cortar a un lado del triángulo o a los tres exteriormente, se ve que solo podemos tomar el signo menos (-). Ver Figura 1.14.

Figura 1.11

Figura 2-14.: Figura 1.14.

Ahora supongamos que:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

Y que FE corte a HC en DC, entonces D' es un punto de Menelao y, por lo anterior

$$\frac{RD'}{D'C} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = -1$$

Se sigue que $\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'C}$ es decir, $D \equiv D'$; esto es D, E, F son colineales.

$$DC = D'C$$

3. Capítulo 2

La geometría del triángulo desde el punto de vista euclideo

3.1. Puntos y líneas notables en un triángulo

Ceviana: es un segmento que une un vértice de un triángulo con un punto cualquiera de la recta que contiene los otros dos vértices del triángulo. Es decir, si X , Y , Z son puntos sobre BC , CA , AB , respectivamente, del triángulo ABC , los segmentos AX , BY , CZ son cevianas. Figura 2.1.

Figura 3-1.: Figura 2.1.

Un resultado importante es el siguiente: si las tres cevianas AX , BY , CZ trazadas en el triángulo ABC son concurrentes entonces: $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$

para demostrar esto se utiliza el hecho de que las áreas de dos triángulos con igual altura son proporcionales a las bases de los triángulos.

Otro resultado relevante es el recíproco del anterior, si tres cevianas AX , BY , CZ satisfacen

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

entonces son concurrentes (teorema de Ceva).

Además podemos considerar entre los datos importantes:

1. Si X, Y, Z son los puntos medios de los lados, del triángulo ABC las tres cevianas AX, BY, CZ son concurrentes. El punto de corte de las medianas se llama baricentro o centride.
2. Las cevianas perpendiculares a los lados opuestos (alturas) son concurrentes. Su punto de corte es el ortocentro.

3.2. Puntos importantes

Dentro de los puntos y las líneas de los triángulos, consideremos el punto que es centro de la circunferencia circunscrita al triángulo o circuncentro. A dicha circunferencia la llamaremos circuncírculo del triángulo, el circuncentro O es la intersección de las tres mediatrices, o bisectrices perpendiculares de los lados del triángulo (Figura 2.2).

Las cevianas que unen los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo con vértice opuesto son llamados medianas. Si AA', BB', CC' son las medianas entonces $BA' = A'C$, $CB' = B'A$, y $AC' = C'B$. De esta forma, aplicando el teorema de Ceva, las medianas son concurrentes y su punto común G es el centroide (baricentro o centro de gravedad) del triángulo.

Figura 3-2.: Figura 2.2.

En lo que sigue denotaremos el área del triángulo ABC por (ABC) .

En la Figura 2.3. encontramos que $(GBA') = (GA'C)$ porque los triángulos tienen igual base y altura. También $(GCB') = (GB'A)$, $(GAC') = (GC'B)$ y $(CAC') = (CC'B)$; es decir, $2y + z = 2x + z$ y por lo tanto $x = y$. Por otra parte, $(ABA') = (AA'C)$, de donde $y = z$. Se sigue que $x = y = z$. Con esto se ha establecido que un triángulo es dividido por sus medianas en seis triángulos de igual área.

Además $(GBA) = 2(GBA')$; como estos triángulos tienen la misma altura $\frac{AG}{GA'} = 2$. Así

mismo $BG = 2GB'$ y $CG = 2GC'$. Es decir, el punto de concurrencia de las medianas está en cada mediana a dos tercios de la distancia del vértice al punto medio del lado opuesto.

Otra forma de enunciar este resultado es que el centroide trisecta cada una de las medianas del triángulo.

Figura 3-3.: Figura 2.3.

Las cevianas AD, BE, CF perpendiculares a BC, CA y AB , respectivamente, son llamadas alturas. D, E, F son los pies de las alturas y el triángulo DEF se llama el triángulo órtico del triángulo ABC . (Figura 2.4.).

Figura 3-4.: Figura 2.4.

Demostremos ahora que las alturas del triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro del triángulo. En la Figura 2.4. sean AD, BE, CF las alturas correspondientes al triángulo ABC .

Tenemos:

$$\begin{aligned}
 \cos(\angle ABD) &= \frac{AB}{BD} = \frac{FB}{BC} \\
 \cos(\angle ACD) &= \frac{DC}{AC} \\
 \cos(C) &= \frac{CE}{BC} \\
 \cos(A) &= \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \\
 \text{Así, } \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} &= \frac{AB \cdot \cos(B)}{AC \cdot \cos(C)} \cdot \frac{BC \cdot \cos(C)}{AB \cdot \cos(A)} \cdot \frac{AC \cdot \cos(A)}{BC \cdot \cos(B)} = 1
 \end{aligned}$$

Luego las alturas son concurrentes.

Las bisectrices angulares también son importantes en nuestro estudio. Sea AL bisectriz del ángulo A , entonces los ángulos en L son suplementarios (Figura 2.5.a.), es decir, tienen igual seno. Sean a, b, c los lados opuestos a A, B, C , tenemos:

$$\frac{BL}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{c}{\sin(\angle ALB)}; \quad \frac{LC}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{b}{\sin(\angle ALC)}; \text{ luego } \frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$$

Con esto obtenemos que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a las longitudes de los lados adyacentes.

Cualquier punto sobre AL es equidistante de AB y AC , cualquier punto sobre la bisectriz del ángulo B , equidista de AB y BC , entonces el punto I , donde se encuentran las dos bisectrices está a la misma distancia r de los tres lados. De esta forma se tiene que las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes en un punto I , y se llama incentro.

Demostración de la concurrencia de las bisectrices internas de un triángulo.

Figura 3-5.: Figura 2.5.

Sea el triángulo ABC , AD , BE , CF las bisectrices correspondientes a los ángulos A , B , C (Figura 2.5.b.). Se tiene:

$$\begin{aligned}
 \angle BAD &= \angle DAC \\
 \angle CBE &= \angle EBA \\
 \angle ACF &= \angle BCF \\
 \text{Como: } \frac{BD}{DC} &= \frac{AB \cdot \sin(\angle BAD)}{AC \cdot \sin(\angle DAC)} \\
 \frac{CE}{EA} &= \frac{BC \cdot \sin(\angle CBE)}{AB \cdot \sin(\angle EBA)} \cdot \frac{AF}{FB} \\
 \frac{AF}{FB} &= \frac{CA \cdot \sin(\angle ACF)}{BC \cdot \sin(\angle FCB)} \\
 \text{Así } \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} &= 1
 \end{aligned}$$

Luego las bisectrices son concurrentes en el punto I .

El círculo con centro en I y radio r , tangente a los tres lados es un círculo inscrito llamado incírculo, I es el incentro y r es el inradio. Ver Figura 2.5.b.

3.3. El incírculo y los excírculos

En la Figura 2.6. se muestra el incírculo tocando los lados BC , CA y AB en X , Y , Z . Dado que dos tangentes a un círculo con un punto común son iguales, tenemos que $AY = AZ$, $BZ = BX$, $CX = CY$ y marcando estos segmentos por x , y , z tenemos lo siguiente:

$$y+z = a$$

$$z+x = b;$$

$$x+y = c;$$

Figura 3-6.: Figura 2.6.

Sumando estas ecuaciones y denotando que s el semiperímetro, tenemos:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s, \text{ es decir: } x + y + z = s, \text{ y}$$

establecemos el siguiente resultado:

$$x = s - a$$

$$y = s - b$$

$$z = s - c$$

Como el triángulo IBC tiene base a y altura r , tenemos:

$$(IBC) = \frac{1}{2}a \cdot r; \text{ y en forma análoga } (ICA) = \frac{1}{2}b \cdot r; \text{ y } (IAB) = \frac{1}{2}c \cdot r$$

$$\text{luego } (ABC) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c) = rs \text{ y con esto se prueba el resultado } (ABC) = rs.$$

Figura 3-7.: Figura 2.7.

La Figura 2.7. muestra el triángulo $I_a I_b I_c$ cuyos lados son las bisectrices externas a los ángulos A, B y C. Cualquier punto sobre la bisectriz $I_c I_a$ del ángulo B es equidistante de las rectas AB y BC , cualquier punto sobre $I_a I_b$ es equidistante de Bc y Ac ; entonces el punto I_a común a estas bisectrices, está a una distancia igual r_a de estos tres lados. Como I_a es equidistante de AB y AC , entonces está sobre el lugar geométrico de los puntos que equidistan de estas dos líneas, esto es, sobre la bisectriz interna AI_a del ángulo A. Esto prueba lo siguiente:

Las bisectrices externas de cualquier par de ángulos de un triángulo son concurrentes con la bisectriz interna del otro ángulo. El círculo con centro en I_a y radio r_a es tangente a los tres lados del triángulo. Los puntos I_a , I_b , I_c son excentros y r_a , r_b , r_c , son los exradios. Cada excírculo toca internamente un lado del triángulo y a la extensión de los otros dos externamente, el incírculo y tres excírculos son llamados los cuatro círculos tritangentes de un triángulo.

Marcando los puntos de contacto como la Figura 2.7. y dado que las tangentes a un círculo

desde un mismo punto son iguales:

$$BX_b + BZ_b = BC + CX_b + Z_bA + AB = BC + CY_b + Y_bA + AB = a + b + c = 2s$$

Esto es, las tangentes desde B (o cualquier otro vértice) al excírculo de lado opuesto tienen longitud s .

$$AY_a = AZ_a = BZ_b = CX_c = CY_c = s$$

También,

$$\begin{aligned} CX_b &= BX_b - BC = s - a; \text{ entonces } BX_c = BZ_c = CX_b = CY_b = s - a, \\ CY_a &= CX_a = AY_c = \\ AZ_c &= s - b \\ AZ_b &= AY_b = BZ_a = BX_a = s - c \end{aligned}$$

3.4. El triángulo órtico

En el triángulo ABC acutángulo (Figura 2.8.), sean O el circuncentro, H el ortocentro y DEF el triángulo órtico; $\alpha = 90^\circ - A$. En los triángulos $OA'C$ y JBC , $\angle A'OC = \angle A$ y como el triángulo OBC es isósceles $\alpha = 90^\circ - A$. En los triángulos ABE y ACF , $\angle EBA = \angle ACF$ puesto que $\angle EBA = \angle ACF$ ya que $\angle BEC$ y $\angle BFC$ son rectos y $\angle A$ es común, el cuadrilátero $BCEF$ se puede inscribir en un círculo; en forma análoga se muestra que los cuadriláteros $BDHF$ y $CEHD$, también son inscribibles en un círculo. Obtenemos, además:

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH;$$

Esto es HD bisecta a $\angle EDF$. Simultáneamente HD bisecta a $\angle DEF$. Se obtiene como primer resultado: las alturas de un triángulo bisectan los ángulos de su triángulo órtico. Con esto se sabe que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico.

Figura 3-8.: Figura 2.8.

Además, $\angle ADF = \angle OBD$ puesto que HD es perpendicular a DB ; similarmente DE es perpendicular a OC y BF es perpendicular a OA . Luego se debe tener que FD es perpendicular a OB .

3.5. El triángulo medial y la línea de Euler

Definición: el triángulo formado por los segmentos que unen los puntos de los lados de un triángulo se llama **triángulo medial**.

En la Figura 2.9. sean A', B', C' el triángulo medial del triángulo ABC , AA' y BB' medianas que se encuentran en G . Dos alturas del triángulo ABC se encuentran en H y dos alturas del triángulo $A'B'C'$ se encuentran en O . Entonces, el triángulo $A'B'C'$ tiene sus lados paralelos a los del triángulo ABC , luego estos son semejantes y $C'B' = \frac{1}{2}BC$. Se tiene la misma razón 1:2 para todo par de lados correspondientes. Aquí los segmentos $B'C', C'A', y A'B'$ dividen al triángulo ABC en cuatro triángulos congruentes.

Figura 3-9.: Figura 2.9.

Ahora $AC'A'B'$ es un paralelogramo y en la diagonal AA' bisecta a la diagonal $B'C'$ en P. Entonces las medianas del triángulo $A'B'C'$ coinciden con las medianas del triángulo ABC, lo cual significa que tienen el mismo centroide G. El punto medio P de $B'C'$ es también punto medio de AA' . Ahora las alturas del triángulo $A'B'C'$ son las bisectrices perpendiculares de los lados AB y BC del triángulo ABC, entonces O, el ortocentro del triángulo $A'B'C'$, es al mismo tiempo el circuncentro del triángulo BC. Como H es el ortocentro del triángulo ABC y O es el ortocentro del triángulo semejante $A'B'C'$, $AH = 2HD$. También se tiene que $AG = 2GA'$ y finalmente AD y OA' son perpendiculares a BC, es decir, AD es paralela a OA' , luego $\angle HAG = \angle GA'O$, de donde el triángulo HAG es semejante al triángulo $GA'O$ y $\angle AGH = \angle A'GO$. Esto muestra que los puntos O, G, H son colineales y $HG = 2GO$, es decir: el ortocentro, el centroide y el circuncentro de cualquier triángulo son colineales. El centroide G divide la distancia entre el ortocentro y el circuncentro en la razón 2:1.

La línea que une esos tres puntos se llama línea de Euler del triángulo.

El punto N sobre la línea de Euler HO es el punto de intersección de la perpendicular $B'C'$ que pasa por P . Las tres rectas $AH, PN, A'D$ son perpendiculares a $B'C'$, es decir son paralelas, como $AP = PA'$ ellas están igualmente espaciadas, o sea, en medio de AH y $A'O$, luego N es el punto medio del segmento HO . Esto se ha hecho analizando solamente el lado $B'C'$, aplicando el mismo razonamiento a los otros lados; el segmento HO permanece fijo y es bisectado por las bisectrices perpendiculares de cada nuevo lado. Como HO tiene exactamente un punto medio, podemos establecer que las bisectrices perpendiculares de todos los tres lados del triángulo $A'B'C'$ es semejante al triángulo ABC , luego el circunradio del

triángulo medial es igual a la mitad del circunradio del triángulo original.

3.6. La circunferencia de los nuevos puntos

Quitando algunas líneas de la figura anterior y colocando otras, aparece la Figura 2.10. donde K, L, M son los puntos medios de los segmentos AH, BH y CH sobre las tres alturas. Como BC es lado común de los triángulos ABC y HBC , cuyos otros dos lados son bisectados respectivamente por C', B', L y M , ambos segmentos $C'B'$ y LM son paralelos a BC y además iguales a la mitad de su longitud. Igualmente AH es lado común de los triángulos BHA y CAH , los segmentos $C'L$ y $B'M$ son paralelos a AH (igual a su mitad), entonces $B'C'LM$ es un paralelogramo. Dado que BC y AH son perpendiculares, $B'C'LM$ es un rectángulo (también lo es $C'AMK$), entonces $A'K, B'L, C'M$ son tres diámetros del mismo círculo.

Figura 3-10.: Figura 2.10.

Ya que el $\angle A'DK$ es recto, este círculo con $A'K$ como diámetro pasa por D . Se demuestra igualmente que pasa por E y F . Lo anterior prueba el siguiente resultado: “Los pies de las tres alturas de cualquier triángulo, los puntos medios de tres lados, y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro están sobre el mismo círculo”. Este se llama el círculo de los nueve puntos del triángulo. Como los tres puntos K, L, M son diametralmente opuestos a $A'B'C'$ cualquiera de los triángulos KLM y $A'B'C'$, se obtiene uno del otro mediante una rotación de 180° , sobre el centro del círculo.

Claramente una rotación de 180° que intercambia 2 triángulos congruentes también intercambia sus ortocentros H y O , entonces el centro de la circunferencia de los 9 puntos

es el punto medio de HO que se había denotado por N, es decir el centro de una circunferencia de los nueve puntos de un triángulo está sobre la línea de Euler, en el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro.

3.7. Consideraciones sobre el triángulo órtico

En la Figura 2.11. tenemos parte de los ángulos rectos así: $\angle ABH$ y $\angle ACH$ que son iguales pues ambos son complementos del $\angle A$ ($= 90 - \angle A$) por tanto los cuadriláteros BH_a , HH_c y CH_aHH_b se pueden inscribir en círculos. Ahora $\angle H_cBH$ y $\angle H_cH_aH$ son iguales; así como $\angle H_bCH$ es igual a $\angle H_bH_aH$ (pues subtienden el mismo arco, respectivamente). Luego los ángulos $\angle H_cH_aH$ y $\angle H_aH_bH$ son iguales, es decir las alturas del triángulo ABC son bisectrices de los ángulos del triángulo órtico.

Figura 3-11.: Figura 2.11.

Encontremos ahora el perímetro P del triángulo órtico.

Primero

$$AH_c = b \cdot \cos A \text{ y } AH_b = c \cdot \cos A$$

$$\begin{aligned} \text{Por la ley de los cosenos } (H_bH_c)^2 &= b^2 \cdot \cos^2 A + c^2 \cdot \cos^2 A - 2bc \cdot \cos^2 A \cdot \cos A \\ &= \cos^2 A (b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A) \end{aligned}$$

Luego

$$H_b H_c = a \cdot \cos A$$

$$H_c H_a = b \cdot \cos B$$

$$H_a H_b = c \cdot \cos C$$

entonces el perímetro del triángulo órtico es:

$$P = a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C$$

usando nuevamente la ley de cosenos, sustituimos y encontramos:

$$P = a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + b \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

simplificando obtenemos

$$P = \frac{2a^3b^3 + 2b^3c^3 + 2c^3a^3 - a^4 - b^4 - c^4}{2abc}$$

La expresión del numerador tiene grado 4 y nuestro deseo es descomponerlo en factores lineales; haciendo $c^3 = (a + b)^3$ obtenemos un cero. Análogamente, por la simetría que presenta la expresión, obtenemos además que $(a + b)^3 - c^3$, $(b + c)^3 - a^3$ y $(c + a)^3 - b^3$ son factores, pero aquí se presenta un problema: el producto de dichos factores genera términos de grado 6, sin embargo:

$$(a + b)^3 - c^3 = (a + b + c)(a + b - c)$$

$$(a + c)^3 - b^3 = (a + b + c)(a + c - b)$$

$$(b + c)^3 - a^3 = (a + b + c)(b + c - a)$$

y justamente hallamos los cuatro factores primos del tal expresión, luego

$$P = \frac{(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a + c - b) \cdot (b + c - a)}{2abc}$$

por otro lado, la fórmula de Herón para el área K del triángulo nos afirma que si los lados son a, b, c, y siendo $s = \frac{a + b + c}{2}$ entonces:

$$K = [s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)]^{\frac{1}{2}}$$

así, multiplicando y dividiendo por 16 en la expresión de P tenemos:

$$\begin{aligned} P &= \frac{16}{16} \frac{(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (a + c - b) \cdot (b + c - a)}{2abc} \\ &= \frac{16s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}{2abc} = \frac{8K^2}{abc} \end{aligned}$$

analicemos ahora lo siguiente en la Figura 2.12.

2.12a

2.12b

Figura 3-12.: Figura 2.12.

Tenemos el triángulo ABC, con su circuncentro y su circunradio R. Puesto que el ángulo BOC es el doble del triángulo A, los triángulos rectángulos congruentes OBA' y OCA' tienen un ángulo igual a A en O; de donde:

$$R \cdot \text{Sen}A = BA = \frac{1}{2} \cdot a$$

$$2R = \frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$$

En la Figura 2.12.b. sea AD perpendicular a BC y sea AK el circundiámetro, entonces los triángulos ABD y AKC son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AK} \text{ luego } AD = \frac{bc}{2R}$$

$$\text{como } K = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{abc}{4R}, \text{ concluimos que: } P = \frac{2K}{R}$$

Sea K' el área del triángulo órtico y v el radio del incírculo de este triángulo, puesto que el área del triángulo es igual al producto de su semiperímetro por el inradio encontramos:

$$K' = \frac{vK}{R}$$

Veamos ahora algo acerca del valor de v (Figura 2.13.):

Figura 3-13.: Figura 2.13.

El ángulo $\angle EHH_a$ es igual

a $\angle A$ pues:

$$\angle EHH_a = \angle H_aCA, \text{ así, } \angle EHH_a = 90^\circ - \angle EHA = 90^\circ - (90^\circ - \angle A)$$

luego

$$\text{como } \frac{HH_a}{a \cos B} = \frac{b \cos C}{a \cos B} \text{ entonces } \frac{v = HH_a \cos A}{ab \cdot \cos B \cdot \cos C} \text{ y puesto que:}$$

$$K = \frac{(CH_a C)}{2} = \frac{CH_c}{4R}$$

Sustituyendo encontramos $v = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$, de este modo el área K' del triángulo ortico es:

$$K' = \frac{vK}{R} = 2K \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

3.8. Más consideraciones sobre el triángulo órtico

En geometría es posible trazar un diagrama y, observándolo, es posible determinar algunas relaciones que no son tan aparentes. Veamos esto en la Figura 2.14.

Tenemos el triángulo ABC y construimos el triángulo $A'B'C'$ con $B'C'$ paralelo a BC , $C'A'$ paralelo a CA y $A'B'$ paralelo a AB , además construimos el triángulo órtico $H_aH_bH_c$, H

es el ortocentro, O es el circuncentro, $M_aM_bM_c$ son los puntos medios de BC , CA y AB , respectivamente.

Figura 3-14.: Figura 2.14.

Rápidamente nos damos cuenta de que el triángulo ABC es semejante al triángulo $A'B'C'$ pues sus lados opuestos son paralelos, así:

a) AA' , BB' , CC' son concurrentes. (Ver demostración en el capítulo IV, problema 4).

Como los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$ están en la razón $2:1$, las demás líneas de la figura correspondiente también lo estarán. Fuera de tener que H es el circuncentro del triángulo $A'B'C'$ y que $AH = 2OM_a$, notamos que el circuncírculo del triángulo órtico es el círculo de los nueve puntos del triángulo $A'B'C'$. Así podemos concluir:

b) El circunradio del triángulo $A'B'C'$ es dos veces el circunradio del triángulo ABC . Puesto que los ángulos en H_c y H_b son rectos, AH_cHH_b se puede inscribir en un círculo de diámetro AH y por la ley de los senos podemos afirmar:

$$c) \frac{H_bH_c}{\text{Sen}A} = AH$$

$$d) \frac{a}{\text{sen}A} = 2R$$

Eliminando $\text{Sen}A$ en estas expresiones:

$$e) \frac{H_bH_c}{AH} = \frac{a}{2R}$$

f) $2R \cdot H_bH_c = a(2OM_a)$, análogamente obtenemos

sumando y restando estas expresiones

$$g) H_b H_c + H_c H_a + H_a H_b = \frac{2K}{R}$$

de aquí

h) El circunradio de un triángulo multiplicado por el semiperímetro de su triángulo óptico es igual al área del triángulo.

4. Capítulo 3

La geometría del triángulo desde el punto de vista de las homotecias

Enseguida se probarán algunos de los resultados importantes sobre la geometría del triángulo y sus puntos de interés, tratado con la metodología de las homotecias.

Proposición 1: demuestre que el punto M de intersección de las medianas de un triángulo ABC , el punto O centro del circuncírculo y el punto H de intersección de las alturas están sobre una línea recta y $HMMO = \frac{2}{1}$. Esta línea se llama línea de Euler del triángulo.

Solución 1: en la Figura 3.1, el triángulo medial formado por la unión de los puntos medios de los lados del triángulo ABC , o sea el triángulo $A'B'C'$ es centralmente semejante con el triángulo ABC con centro de semejanza M (el centroide del triángulo ABC) y razón.... $\frac{1}{2}$ (ver solución 2), ya que se sabe que el centroide M divide las medianas AA' , BB' y CC' en razón 2:1, entonces las alturas AD , BE y CF del triángulo ABC se corresponden con las alturas $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ del triángulo $A'B'C'$. Así, el ortocentro H del triángulo ABC se corresponde con esta homotecia, con el ortocentro del triángulo $A'B'C'$, que en este caso es O (dado que las alturas del triángulo $A'B'C'$ son perpendiculares a los lados del triángulo ABC en sus puntos medios). Esto hace que el punto H y el punto O sean centralmente semejantes, con centro en el punto M y razón $\frac{-1}{2}$; es decir, están sobre la misma recta que pasa por M , así M divide el segmento OH en la razón $HMMO = \frac{2}{1}$.

Figura 4-1.: Figura 3.1.

Solución 2: en la Figura 3.2. sean M_1, M_2, M_3 los puntos medios de los lados BC, CA, AB del triángulo, ya que $\frac{AG}{GM_1} = 2$ ($i = 1, 2, 3$), el triángulo $M_1 M_2 M_3$ se transforma en el triángulo $A_1 A_2 A_3$, por la homotecia con centro en G y razón -2, por lo tanto O que es el ortocentro H del triángulo $M_1 M_2 M_3$, se transporta en el ortocentro H del triángulo $A_1 A_2 A_3$. Se sigue que H, G, O son colineales y $HG = 2GO$.

Figura 4-2.: Figura 3.2.

Proposición 2: demuestre que las líneas rectas que pasan por los puntos medios de los lados

de un triángulo y son paralelas a las bisectrices de los ángulos opuestos, se encuentran en un punto (Figura 3.3.).

Solución: dado que el triángulo ABC y el triángulo medial $A'B'C'$ son homotéticos con centro en M y razón $-1/2$, el $f-A'$ se corresponde con el $f-A$, $f-B$ con $f-B'$ y $f-C'$ con $f-c$. Luego la bisectriz de cada ángulo se corresponde con la bisectriz de su correspondiente ángulo en el triángulo medial. Estas bisectrices del triángulo medial son las rectas de nuestro problema. El incentro del triángulo ABC se corresponde con el incentro del triángulo $A'B'C'$, luego las rectas en cuestión se encuentran en un mismo punto.

Figura 4-3.: Figura 3.3.

Proposición 3: demuestre que las líneas que unen los vértices del triángulo ABC con los puntos de tangencia de los lados con el correspondiente excírculo, se encuentran en un punto J . Este punto es colineal con el punto M de intersección de las medianas y con el centro Z del incírculo y $\frac{JM}{MZ} = \frac{2}{1}$. (Figuras 3.4. y 3.5.).

Figura 4-4.: Figura 3.4.

Figura 4-5.: Figura 3.5.

Solución: ver Figura 3.5. Sean A', B', C' los puntos medios del triángulo ABC , K, K_1, K_2 los puntos de tangencia de los lados con el excírculo correspondiente del ángulo AyP , Q, R los puntos de tangencia del incírculo. Demostraremos que $AK \parallel ZA'$. Denotando los lados del triángulo ABC , por a, b, c , el perímetro por $2P$, la altura AP trazada sobre el lado BC por h_a , el radio del círculo inscrito por r y el área del triángulo por S , se obtiene:

$$ah_a = 2pr (= 2s), \text{tenemos } \frac{ha}{r} = \frac{2p}{a}$$

$$\text{entonces: } \frac{AP}{ZP} = \frac{2p}{a}$$

KP

Veamos que la razón $\frac{AP}{A'P}$ es igual a esta misma cantidad.
En efecto:

$$BP = \frac{a^2 + c^2 + b^2}{2a}$$

pues $b^2 = a^2 + c^2 - 2a\overline{BP}$, por otro lado,

$$BK = BK_1 = AK_1 - AB = p - c = \frac{(a + b - c)}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{Ahora, } AK_1 &= \frac{1}{2}(AK_1 + AK_2) = \frac{1}{2}(AB + BK_1 + AC + CK_2) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BK + AC + CK) = \frac{1}{2}(a + b + c) = p\end{aligned}$$

Consecuentemente, (en el caso de la figura)

$$\begin{aligned}K\bar{P} &= B\bar{P} - BK = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)}{2a} - \frac{(a+b-c)}{2} \\ &= \frac{a^2 + c^2 + b^2 - ab + ac}{2a} = \frac{(c-b)(c+b+a)}{2a} = \frac{p(c-b)}{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Además, } BP &= \frac{1}{2}(BP + BQ) = \frac{1}{2}(BC - CP + BA - AQ) \\ &= \frac{1}{2}(BC + BA - CR - AR) = \frac{1}{2}(a + c - b) = p - b.\end{aligned}$$

$$\text{Luego } A'P = BP - BA' = p - b - \frac{a}{2} = \frac{(c-b)}{2}$$

Entonces tenemos,

$$\frac{KP}{A'P} = \frac{p(c-b)}{a} \div \frac{c-b}{2} = \frac{2p}{a} = \frac{AF}{p}$$

Por lo tanto, los triángulos APK y ZPA' son semejantes y, en consecuencia, $AK \parallel ZA'$. De manera análoga, se puede demostrar que las tres líneas que parten de los vértices del triángulo, paralelas a las líneas $A'Z$, $B'Z$ y $C'Z$ (estas son, como mostramos, las líneas que unen los vértices del triángulo, con los puntos de tangencia de los lados opuestos con el correspondiente excírculo), se encuentran en un punto J , centralmente semejante a Z , con centro de semejanza en M y coeficiente -2 .

Proposición 4: en un círculo dado S inscriba un triángulo ABC , si el vértice A y el punto H de intersección de las alturas son dados (Figura 3.6.).

Solución: sea O el centro del círculo S circunscrito alrededor del triángulo ABC buscado, de acuerdo con la proposición 1, el centroide M de este triángulo está sobre el segmento OH y lo divide en la razón $OH: MH = 1:2$, luego M se puede construir. Por otro lado, M divide la mediana AD del triángulo ABC en la razón $AM: MD = 2:1$, luego podemos construir el punto D medio del lado BC . Ahora unimos el punto D con el centro O de S , así, OD es bisectriz de la cuerda deseada BC .

Entonces OD es perpendicular a BC , construimos entonces la cuerda BC perpendicular a OD en D y obtenemos los puntos B, C necesarios para completar la construcción del triángulo ABC .

Figura 4-6.: Figura 3.6.

Proposición 5: sean H el punto de intersección de las alturas del triángulo ABC , M el punto de intersección de las medianas. Demuestre que el círculo $\bar{S}$, que pasa por los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos HA, HB, HC , es centralmente semejante a S con centros de semejanza H y M y coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\frac{-1}{2}$ respectivamente. (El círculo S es llamado el círculo de los nueve puntos del triángulo ABC). (Figura 3.7.).

Figura 4-7.: Figura 3.7.

Solución: sean AP, BQ y CR las alturas del triángulo ABC : A', B', C' , los puntos medios de los lados, D, E, F los puntos medios de los segmentos HA, HB, HC . Claramente D, E, F están sobre el círculo S . Mostremos que P, Q, R , también están sobre el círculo S . Extendamos la altura AP hasta que intersecte el círculo S en P_1 y lo unimos con el punto B . En los triángulos rectángulos APC y BQC , $\angle CBQ = \angle CAP$ ($= 90^\circ - \angle BCA$). Luego $\angle CAP = \angle CBP_1$ (pues subtenden el mismo arco). En consecuencia $\angle HBP = \angle PBP_1$ entonces el triángulo

HBP_1 es isósceles y $HP = \frac{1}{2} HP_1$. Por consiguiente, el punto P_1 es transportado al punto

P por una homotecia central de centro H y razón $\frac{1}{2}$; en forma análoga se prueba que Q

y R son centralmente semejantes con puntos del circuncírculo con centro en H y razón $\frac{1}{2}$.

Además, los puntos A', B', C' sobre el círculo S' son centralmente semejantes a S con centro de semejanza M y coeficiente $-\frac{1}{2}$. Mostremos que S' coincide con S . El radio de S es $\frac{r}{2}$, (

donde r es el radio de S) y su centro O en el punto medio de HO (O es el centro de S). El radio de S' es también igual a $\frac{r}{2}$ y el centro O' está sobre la línea MO donde $\frac{MO'}{MO} = -\frac{1}{2}$.

Por el resultado de la proposición 1 los puntos O, H, M son colineales y $HM = 2MO$, se sigue entonces que los puntos O y O' coinciden. Por consiguiente, S' y S son iguales. Se puede notar que A' y D , B' y E y C' y F son diametralmente opuestos sobre el círculo de los nueve puntos. (Además el ángulo $A'PD$ inscrito en este círculo y subtendiendo la cuerda $A'D$ es recta) luego los triángulos $A'B'C'$ y DEF son simétricos con respecto al centro de este círculo, por lo tanto son congruentes. Observaciones al anterior problema: consideremos la siguiente figura (Figura 3.8.):

Figura 4-8.: Figura 3.8.

En el triángulo $A_1A_2A_3$, sean $M_1M_2M_3$ los puntos medios de los lados, $H_1H_2H_3$ los pies de las alturas, $N_1N_2N_3$ los puntos medios de los segmentos A_1H_1 , A_2H_2 , A_3H_3 ; H el ortocentro. Entonces los puntos $M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, N_1, N_2, N_3$, están en una circunferencia cuyo centro es N , el punto medio del segmento que une H con O (el circuncentro) y cuyo radio es la mitad del circunradio del triángulo. Considerando la Figura 3.7. vemos que el $\angle A_2A_3H_3 = 90^\circ - \angle A_2 = \angle A_2A_1S_1 = \angle A_2A_3S_1$; por tanto, el triángulo rectángulo HH_1A_3 es congruente con el triángulo $S_1H_1A_3$ y H_1 es el punto medio de HS_1 . Análogamente H_2 es el punto medio de HS_2 y H_3 es el punto medio de HS_3 . Trácese el circundiámetro A_1T_1 , entonces T_1A_2 es paralelo a A_3H_3 (ya que ambos son perpendiculares a A_1A_2), análogamente T_1A_3 es paralelo a A_2H_2 . Luego $HA_3T_1A_2$ es un paralelogramo y HT_1 y A_2A_3 se bisecan, luego M_1 es el punto medio de HT_1 . Análogamente M_2 es el punto medio de HT_2 y M_3 es el punto medio de HT_3 . Ahora la homotecia con centro de H y razón $\frac{1}{2}$ transporta $A_1, A_2, A_3, S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ a $N_1, N_2, N_3, H_1, H_2, H_3, M_1, M_2, M_3$, respectivamente; luego estos nueve puntos últimos están sobre una circunferencia de radio igual a un medio de radio del circuncírculo y con centro N punto medio de HO .

5. Capítulo 4

1. Problemas y construcciones

Esta parte se centrará en la solución de algunos problemas con la metodología de homotecias y construcciones especiales.

Problema: sea ABC un triángulo, HA HB HC su triángulo órtico, trazamos también el circuncírculo del triángulo ABC , construimos tangentes a dicho círculo por los puntos ABC y formamos el triángulo tangencial $A'B'C'$. (Figura 4.1.). Demostrar que los triángulos tangencial $A'B'C'$ y órtico de HA HB HC son semejantes.

Figura 4.1.

Los ángulos rectos en A y C (Figura 4.1.) hacen que el cuadrilátero $AB'C$, CO , sea inscribible en el círculo de diámetro BO . Como $B'A = B'C$ y $OA = OC$ se sigue que los triángulos OAB' y OCB'

son congruentes, además $B'O$ es la bisectriz del ángulo B' , lo cual hace que M sea un punto medio de AC , siendo a la vez $B'O$ perpendicular a AC como $\angle BAH = \alpha = \angle OCHb = \angle HaHbH$ y el triángulo OCA es isósceles, se sigue que $\angle OAHb = \alpha = \angle OB'A = \frac{1}{2}\angle B'$. Se sigue que el ángulo en B' es un análisis análogo para los vértices A' y C' , lo cual nos lleva a que $\angle A' = \angle Ha$ y $\angle C' = \angle Hc$, es decir, los triángulos $Ha Hb Hc$ y $A'B'C'$ son semejantes.

El hecho de ser $B Hb$ y $B'M$ perpendiculares a AC hace que el lado $Hb Hc$ sea paralelo a $B'C'$, así todos los lados correspondientes de los triángulos $A'B'C'$ y $Ha Hb Hc$ son paralelos. Se puede demostrar que en este caso $A'Ha$ y $B'Hb$ y C' son concurrentes y su punto de intersección coincide con el centro de homotecia de estos dos triángulos. Para tal efecto consideremos la siguiente Figura 4.2.

Figura 4.2.

Sean $A B C$ y $A' B' C'$ triángulos respectivamente paralelos, entonces las rectas AA' , BB' , CC' son concurrentes. En efecto, sean AA' , BB' intersectados en O y supongamos que OC intersecta a $C'A'$ en un punto C_1 , puesto que $O A B C - O A' B' C'$, tenemos:

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{C_1A'}{CA} = (k)$$

De esta manera, C_1 coincide con C . Luego O es el punto de concurrencia y centro de homotecia de razón k . Así el triángulo $A'B'C'$ es imagen homotética del triángulo $A B C$ con la homotecia $H(O, k)$.

Problema: dado el triángulo $A B C$, construir el segmento DE , tal que $BD-DE = EC$ (Figura 4.3.).

Figura 4.3.

Construcción: consideremos el $\triangle ABC$ de la figura. Sobre el lado BA escogemos D' y sobre CA , E' tales que $BD' = CE'$. Si $D'E' = E'C = D'B$ ya terminamos. Si no, trazamos una paralela a CB por el punto E' . Sea E'' el punto de intersección de la circunferencia con centro en D' y radio $D'B$ con esta paralela. Trazamos por E'' una paralela a AC que intersectaría a AB en A' y a BC en C' , de esta forma obtenemos $D'E'' = E''C' = BA'$. Como el triángulo ABC es semejante a $A'B'C'$ con una homotecia de centro en B y razón $k = \frac{BC'}{BC}$; $[H, (B, K)]$. La imagen homotética de E'' nos da el punto buscado sobre AC , y la paralela por E a $D'E''$ el punto D sobre AB .

Problema: tres círculos congruentes tienen el mismo punto O en común y se encuentran en el interior de un triángulo dado. Cada círculo es tangente a un par de lados del triángulo. Demostrar que el incentro y el circuncentro del triángulo y el punto O son colineales. Ver Figura 4.4.

Figura 4.4.

Solución al problema:

Sean el triángulo ABC , O_1, O_2, O_3 centros de las circunferencias congruentes, O punto común de ellas, I incentro, O_4 circuncentro. Hay que demostrar que I, O, O_4 son colineales; como los triángulos O_1, O_2, O_3 y A, B, C son homotéticos por tener sus lados respectivamente paralelos, las rectas A_1, BO_1, CO_1 son congruentes en I , pues coinciden con las bisectrices de los ángulos A, B, C . El punto O es el circuncentro del triángulo O_1, O_2, O_3 , como el centro de la homotecia en cuestión es I y la razón k viene dada por:

$$k = \frac{IO_1}{IA} = \frac{O_1O_2}{AC} = \frac{O_2I}{CI}$$

Se sigue que el circuncentro O_4 del triángulo A, B, C será la imagen homotética O bajo $H(I, k)$ luego O y O_4 del triángulo A, B, C será la imagen homotética de O bajo $H(I, k)$, luego O y O_4 son colineales con I .

Problema: en un triángulo inscribir un cuadrado (Figura 4.5.).

Figura 4.5.

Sea A, B, C el triángulo dado, y BC el lado sobre el cual se debe situar al cuadrado. Sea D' un punto sobre AB , se construye ahora el cuadrado $D'E'F'G'$ (de lado $D'G'$ donde $D'G'$ es perpendicular a BC). Si E' está sobre el lado AC , el problema está resuelto, si no, el problema quedaría resuelto para el $OA'B'C'$ donde $A'C'$ es paralelo a AC , que es imagen homotética del $OABC$, con B como centro de homotecia y razón de homotecia o semejanza $k = \frac{AB}{AB}$. Es claro que la recta BE' cortará a AC en un punto E , vértice del cuadrado $DGEF$ inscrito en el triángulo A, B, C . (Figura 4.5.).

Problema: en un sector circular inscriba un cuadrado donde se deben considerar dos casos.

- Dos vértices del cuadrado están sobre el arco del círculo (ver Figura 4.6.a.).
- Dos vértices están sobre uno de los radios (ver Figura 4.6.b.).

Figura 4.6.a-b.

Solución: a) en la Figura 4.6.a., sean C y E tales que $AC = AE$ construimos ahora el cuadrado C E F G. Si los vértices F, G están sobre el arco del sector, el problema queda resuelto. Si no, con el radio R de medida $AG = AF$, trazamos en arco que encontrará al cuadrado en G y F, y obtenemos una figura homotética del problema con centro de homotecia en A y razón $k = \frac{AQ}{AP}$, obtenemos la construcción pedida.

b) En la Figura 4.6.b. sea H un punto sobre el radio AQ y sea HE perpendicular a AP, con esta medida contruimos el cuadrado H E F G (de esta forma F está sobre AP). Si G encuentra el arco del sector, el problema queda resuelto. Si no, con radio igual a AG trazamos el arco Q'P' y así obtenemos una figura homotética del problema. Luego con la homotecia $H(A, \frac{AQ}{AP})$, se llega a la figura solución del problema.

Problema: a través de un punto trazar una recta tal que el segmento determinado sobre ella por una recta y un círculo dado sea dividido por el punto en una razón dada (Figura 4.7.).

Solución: supongamos que la recta h satisface las condiciones, y sea k la razón dada, es decir:

$$\frac{CA}{AB} = k$$

Entonces C es imagen homotética de B, la homotecia con centro en A y razón k $[H(A, k)](B = C)$. Es decir, $CA = k AB$, o sea C se encuentra sobre la recta L' paralela a L [la cual es imagen homotética de L bajo la homotecia $H(A, k)$]. Si L' es tangente al círculo, C coincide con dicho punto, si no, el punto C', el otro punto de corte también satisface las condiciones del problema con la recta h', pues según el teorema de Thales:

$$\frac{CA}{AB} = \frac{C'A}{AB'} = k$$

Problema: se consideran dos circunferencias concéntricas y coplanares de radios R y r ($R > r$), sea P un punto fijo de la circunferencia menor y B un punto variable de la circunferencia mayor. La recta BP vuelve a cortar a la circunferencia menor en el punto A (si L es tangente a la circunferencia en P entonces $A = P$). (Ver Figura 4.7.).

- i) Determinar el conjunto de los valores de $BC^2 + CA^2 + AB^2$

Figura 4.7.

ii) Determinar el lugar geométrico descrito por el punto medio de AB.

Solucion: una forma de resolver la parte i) es por medio de la aplicación de la geometría analítica, tomando a P como origen de las coordenadas y O el centro de las circunferencias sobre el eje Y (ver Figura 4.8.), las ecuaciones por tratar son:

Figura 4.8.

Para las circunferencias:

$$x^2 + (y + r)^2 = R^2 \quad x^2 + (y + r)^2 = r^2$$

Y las rectas BP y AP que pasan por el origen, siendo $m = 0$ la pendiente, las ecuaciones son

$$y = mx \quad y = -\frac{1}{m}x,$$

respectivamente. Determinados los puntos de intersección entre ellas conseguimos las coordenadas de B, C, A así:

$$B = \frac{1}{m^2 + 1}(-mr + k, m(-mr + K))$$

$$C = \frac{1}{m^2 + 1}(-mr - k, m(-mr - K))$$

$$A = \frac{1}{m^2 + 1}(2rm, -2r)$$

donde

$$k = \sqrt{R^2(1 + m^2) - r^2}$$

De la expresión para la distancia entre puntos obtenemos:

$$AC^2 + CA^2 + AB^2 = 6R^2 + 2r^2$$

Luego el conjunto solución de i) es la constante:

$$6R^2 + 2r^2$$

Para la segunda parte consideremos la Figura 4.9.

Figura 4.9.

Sea M el punto medio de AR, trazamos MQ paralela a PB. Entonces Q es punto medio de AP. Sea R diametralmente opuesto a P, entonces el OPAR es rectángulo, luego MQ contiene el centro O.

Sea P₁ el punto de intersección de PM y AB, entonces como los ángulos en P y en A son rectángulos, P A B P₁ es un rectángulo y M es un punto medio de P P₁, también P₁ está sobre la circunferencia mayor pues la recta MQ que pasa por el centro O es mediatriz a AP que es igual a B P₁, de esta forma S contenido por la paralela AP por M es punto medio de B P₁, es decir:

$$PQ = \frac{1}{2}PA \quad PM = \frac{1}{2}PP_1 \quad PS = \frac{1}{2}PB \quad PQ = \frac{1}{2}PA$$

De esta manera, definiendo una homotecia con centro en P y razón $\frac{1}{2}$ el rectángulo P Q M S es imagen homotética del rectángulo P A P₁ B y los puntos sobre la circunferencia mayor eran enviados en puntos sobre una circunferencia cuyo radio es $\frac{1}{2}R$ y con centro sobre el segmento OP. (Exactamente en $\frac{OP}{2}$) luego el lugar geométrico descrito por el punto medio de AB es precisamente esta circunferencia imagen.

Problema: en un círculo dado inscriba un rectángulo semejante a un rectángulo dado (Figura 4.10.).

Figura 4.10.

Solución: sean A B C D el rectángulo dado y C(O') la circunferencia dada, con centro en O, el punto de corte de las diagonales AC y BD y radio OA, construimos la circunferencia C(O) circunscrita al rectángulo dado.

Como estas circunferencias C(O') y C(O) son homotéticas con centro de homotecia en P y razón de homotecia $\frac{R}{r}$ donde R y r son los radios de C(O') y C(O), se tiene que el rectángulo A B C D se envía por medio de la homotecia H(P- $\frac{R}{r}$) en rectángulo A' B' C' D' pedido.

Problema: en un semicírculo inscriba un rectángulo semejante a un rectángulo dado (Figura 4.11.), sean ABCD el rectángulo dado y S el semicírculo dado.

Figura 4.11.

Una manera de solucionar el problema es la siguiente: hallar O' , el punto medio del lado AB del rectángulo. Con centro en O' y radio $r = O'C$ trazar un semicírculo. De esta forma tenemos una figura homotética del problema, pues estaría el rectángulo inscrito en dicho semicírculo. Luego con centro en O' y con R igual al radio del semicírculo S dado trazamos un semicírculo S' igual a S , y con razón de homotecia $k = \frac{R}{r}$ la homotecia $H(O', k)$ envía el rectángulo $ABCD$ en el rectángulo $A'B'C'D'$ buscado. Trasladamos ahora S' junto con el rectángulo $A'B'C'D'$ sobre S , rotando en un $\angle \alpha$ con centro en O a dicha traslación, obtenemos la figura pedida.

Problema: en un triángulo inscribir un rectángulo semejante a un rectángulo dado.

(Figura 4.12)

Figura 4.12.

Solución: sea $ABCD$ el rectángulo y el triángulo LHP dados. M el punto medio de la recta LH sobre el cual se construye un rectángulo $ABCD$ congruente al rectángulo dado, por los vértices C y D

trazamos paralelas $L'P'$ y $H'P'$ a LP y HP , respectivamente; así, el rectángulo $ABCD$ queda inscrito en el triángulo $L'H'P'$, que es homotético con el triángulo LHP dado, con centro de homotecia en O punto de corte de PP' con el lado LH y razón de homotecia $k = \frac{OP'}{OP}$, entonces la homotecia $H(O, k)$

envía a C en C' y a D en D' , A en A' , B en B' y el rectángulo $A'B'C'D'$ en el rectángulo pedido.

Problema: el triángulo de Napoleón.

En un triángulo ABC construimos sobre sus lados triángulos equiláteros. Demuestre que los circuncentros de estos triángulos equiláteros forman nuevamente un triángulo equilátero (Figura 4.13.).

Figura 4.13.

Si los lados del triángulo ABC , son a, b, c , respectivamente, los lados del triángulo O_1, O_2, A son:

$$AO_2 = \frac{b}{\sqrt{3}} \quad OA = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

La homología (composición de una rotación y una homotecia)

$$H(A, 30^\circ, \frac{1}{\sqrt{3}}) = R(A, 30^\circ)H(A, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

envía el segmento O_1O_2 en BQ

De la misma forma, $H(C, 30^\circ, \frac{1}{\sqrt{3}}) = R(C, 30^\circ)H(C, \frac{1}{\sqrt{3}})$, a O_2O_3 en BQ , es decir: $O_1O_2 = O_2O_3$ como se realizaron dos rotaciones de 30° , se concluye que el ángulo $O_1O_2O_3 = 60^\circ$, de donde, el triángulo $O_1O_2O_3$ es equilátero.

Problema: dados tres círculos concéntricos, trazar una secante tal que el segmento entre el primero y segundo círculos, sea igual al segmento entre el segundo y el tercer círculos (Figura 4.14.).

Solución: suponiendo que la recta L satisface que $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ construimos un círculo S_3 , homotético a S_1 con centro en la homotecia en el punto A (A arbitrario) del círculo S_1 y con coeficiente $\frac{1}{2}$ entonces el punto A y un punto de intersección del círculo S_2 con S_3 determinará la recta pedida ²

Figura 4.14.

L. Es claro que una vez determinado A, habrá dos, una o ninguna solución del problema, según S_1 intersecte o no S_2 en la Figura 4.14 se tiene $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

Problema: construir un triángulo semejante a un triángulo dado tal, que un vértice coincida con un punto dado, otro vértice esté sobre un círculo dado y el tercer vértice esté sobre una recta dada (Figura 4.15).

Figura 4.15.

Sean ABC el triángulo dado, P el punto, S el círculo y L la recta en cuestión, la idea de la construcción es la siguiente: con centro en P rotamos el círculo S en un ángulo igual $\angle C A B$ y luego le aplicamos la homotecia $H(O, k)$ donde $k = \frac{AC}{AB}$, entonces esta imagen S, homotética de S,

intersectaría a L en los posibles puntos P' y P'' que determinará el vértice sobre L y consecuentemente sobre S; de esta forma, la construcción tendrá una, dos o ninguna solución. Considerando el punto P' se encuentra su preimagen homotética P_1 y esta determina con la rotación su preimagen D, la cual está sobre el círculo originando así el tercer vértice. El hecho se debe a que se obtendrá un triángulo que tiene un ángulo igual a $\angle BAC$ comprendido entre lados proporcionales, pues el triángulo DPP' satisface que $\angle DPP' = \angle CAB$ y $PP' = kDP$ entonces: $\frac{PP'}{DP} = k$, luego $O \triangle ABC \sim O \triangle DPP'$. El otro triángulo se obtiene considerando el punto P'' .

Problema: por un punto A sobre un círculo, trazar una cuerda que sea dividida por una cuerda dada en una razón dada (Figura 4.16.).

Figura 4.16.

Solución: sean S el círculo dado de radio R, A el punto sobre el círculo, k la razón dada; CD la cuerda dada, aplicando una homotecia con centro en A obtenemos un círculo S' de centro O' y radio $r = \frac{R}{k}$ y tangente a S' en A. Si el círculo S intersecta a la cuerda CD, en E y F

las cuerdas que salen de A y pasan por dichos puntos son las pedidas, pues los círculos S y S' son homotéticos k, es decir $\frac{AB}{AP} = k = \frac{AE}{AF}$.

El problema puede tener dos, una o ninguna solución, una vez escogido el punto A.

Problema: sea el $O \triangle A_1 A_2 A_3$ no isósceles, con lados a_1, a_2, a_3 (a_i es el lado opuesto a A_i). Para todo $i = 1, 2, 3$, M_i es el punto medio del lado a_i , T_i es el punto donde el incírculo toca al lado a_i . Sea S_i la reflexión de T_i en la bisectriz interna de A_i . Demuestre de A_i que las líneas $M_1 S_1$, $M_2 S_2$, $M_3 S_3$ son concurrentes (Figura 4.17.).

Solución: sea P_i el punto de intersección de la bisectriz de A_i con el lado a_i , vamos a demostrar inicialmente que el triángulo $S_1 S_2 S_3$ es semejante con el triángulo $A_1 A_2 A_3$ desde el punto de vista de la igualdad de ángulos. Consideremos entonces el lado a_1 , P_1 , T_1 e I el incentro.

Tenemos que:

$$\angle A_1 P_1 A_2 = 180^\circ - \angle A_1 P_1 A_3 = 180^\circ - (180^\circ - \angle A_1 - \angle A_3) = \angle A_1 + \frac{\angle A_3}{2}$$

Así

$$\angle T_1 I P_1 = 90^\circ - \angle A_1 P_1 A_3 = 90^\circ - \left(\angle A_1 + \frac{\angle A_3}{2} \right)$$

Figura 4.17.

y

$$\begin{aligned} \angle S_2 I T_1 &= \angle T_3 I T_1 - 2 \angle T_3 I P_3 - 2(90^\circ - (A_2 + \frac{A_3}{2})) \\ (180^\circ - A_2) - (180^\circ) + (2 \angle A_2 + \angle A_3) &= \angle A_2 + \angle A_3 \quad (*) \end{aligned}$$

(*) Como $T_3 I T_1 A_2$ es un cuadrilátero que tiene dos ángulos rectos, se tiene que

$$\angle T_3 I T_1 = 180^\circ - A_2$$

Entonces

$$\angle S_2 I T_1 = \angle A_2 + \angle A_3$$

$$\angle S_2 I T_1 = A_2 + A_3$$

En forma análoga se prueba que

Por otra parte

$$\angle S_1 I S_3 - 2 \angle S_2 S_1 S_3 = 360^\circ - 2A_2 - 2 \angle A_3 = 2(180^\circ - \angle A_2 - \angle A_3) = 2 \angle A_1$$

Y en consecuencia

De igual forma se puede mostrar que $\angle S_2 S_1 S_3 = \angle A_1$

$$\angle S_1 S_2 S_3 = \angle A_2 \quad \angle S_2 S_3 S_1 = \angle A_3$$

Luego

$$O S_1 S_2 S_3 = O A_1 A_2 A_3$$

Demostremos ahora que los lados de $O S_1 S_2 S_3$ son paralelos con los lados a_1, a_2, a_3 del $O A_1 A_2 A_3$.
En efecto, trácense las rectas $A_2 S_1$ y $A_3 S_1$ y comprobemos que las rectas $A_1 A_2$ y $S_1 S_2$ son paralelas.

como en este caso la recta A_2S_3 corta a A_2A_3 y a S_1S_2 , veamos cuánto suman sus ángulos interiores del mismo lado, es decir, cuánto suma.

$$\angle S_1S_2A_2 + \angle S_2A_2A_3$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \angle S_1S_2A_2 &= \angle A_2A_3I + \angle ISA_2 \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle A_1) + \angle ISA_2 \\ &= 90^\circ - \angle A_1 + (360^\circ - (\angle A_2 + \angle A_3)) - 90^\circ - \angle S_2A_2A_3 \\ &= 360^\circ - (\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3) - \angle S_2A_2A_3 \end{aligned}$$

Así

$$\angle S_1S_2A_2 + \angle S_2A_2A_3 - (\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3) - \angle S_2A_2A_3 + \angle S_2A_2A_3 = 180^\circ$$

Luego las rectas S_1S_2 y A_2A_3 son paralelas.

En forma análoga se puede mostrar que $S_1S_2 \parallel A_3A_1$ y $S_2S_3 \parallel A_1A_2$ como los lados del triángulo $M_1M_2M_3$ son paralelos a los lados $a_1a_2a_3$ se tiene también que son paralelos a los lados del triángulo $S_1S_2S_3$ y $\angle S_1 = \angle M_1$, y $\angle S_2 = \angle M_2$ y $\angle S_3 = \angle M_3$ donde las rectas S_1M_1, S_2M_2, S_3M_3 son concurrentes. (Problema 1-b).

Problema: sean S_1 y S_2 dos circunferencias intersecantes coplanares, una tangente común externa toca S_2 en Q y a S_1 en P, mientras que la otra toca a S_2 en T y a S_1 en R. Sean M_1 el punto medio de PR y M_2 el punto medio de QT, sea A un punto de intersección de S_1 y S_2 y O_1, O_2 sus centros. Demuestre que (Figura 4.18.).

Figura 4.18.

$$\angle MAM_2 = \angle O_1AO_2$$

Solución: en la Figura 4.18. sean A y B los puntos de intersección de las circunferencias S_1 y S_2 ; O su centro de homotecia, la recta AO intersecciona a S_1 en C' y a S_2 en D' y OB intersecciona a S_1 en C y a S_2 en D. Así, las cuerdas CC' y DD' son paralelas a la cuerda AB; la recta O_1O_2 , que pasa por O, es bisectriz de estas cuerdas y se tiene que los triángulos $CC'O$ y BAO son isósceles. En consecuencia, $AC' = BC$; como los triángulos AM_1B y $C'M_1C$ son isósceles, se tiene que los triángulos $AC'M_1$ y CBM_1 son congruentes, con esto:

$$\angle C'AM_1 = \angle CBM_1$$

$$\angle ACM_1 = \angle BCM_1$$

Por otra parte, $\angle AC'B = \angle ACB$ y $\angle C'AC = \angle C'BC$; por subtender el mismo arco, en consecuencia $\angle C'AM_1 = \angle C'AC$ y $\angle ACB = \angle M_1CB$. Luego M_1 está en la intersección de los segmentos (cuerdas) CA y BC' .

En forma análoga se puede demostrar que M_2 está en la cuerda AD.

Ahora bien, $\angle ACB = \angle AO_1A_2$ y $\angle ADB = \angle AO_2O_1$, puesto que el ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de su ángulo central, concluimos que los triángulos $OACD$ y AO_1O_2 son semejantes y $\angle CAD = \angle M_1AM_2 = \angle O_1AO_2$ como queríamos demostrar.

2. Problemas sobre figuras en el espacio

Problema: un plano intersecciona las caras de un ángulo triedro en los puntos A, B y C. Encuentre el lugar geométrico del centroide del triángulo ABC si el plano varía alrededor de un lado fijo (Figura 4.19.).

Solución: en la Figura 4.19. sea AB el lado fijo sobre el cual varía el plano, CE la mediana del triángulo ABC, M su centroide, al considerar otra posición del plano determinando el triángulo ABC' y M' su centroide, tenemos lo siguiente:

Figura 4.19.

$$EM = \frac{1}{3}EC$$

$$EM' = \frac{1}{3}EC'$$

Luego si aplicamos una homotecia con centro en E y razón $\frac{1}{3}$, todos los puntos de la arista DC serán enviados sobre la recta paralela MM' que contendrán los centroides, determinando así el lugar geométrico pedido.

Problema: con las condiciones del problema anterior, determinar el lugar geométrico del centroide del triángulo ABC si el plano varía sobre un vértice. (Figura 4.20.).

Figura 4.20.

Solución: sea ABC el triángulo determinado, AE la mediana correspondiente al vértice, A y M su centroide, sea A el vértice fijo, al variar el plano sobre él, los centroides de los diferentes triángulos estarán a una distancia igual a $\frac{2}{3}$ de la longitud de sus respectivas medianas, determinando un

plano PQR paralelo a la cara DBC del triedro. La homotecia en cuestión tiene centro en A y razón $\frac{1}{2}$ encontrando así el lugar pedido.

Problema: dados tres puntos no colineales A, B, C y un plano P que no los contiene, encuentre un punto tal que las rectas que lo unen con A, B y C determinen en P un triángulo homotético al triángulo ABC (Figura 4.21.).

Solución: consideremos dos casos:

- a) El plano P es paralelo al plano T determinado por los puntos A, B, C. En este caso cualquier punto M que no esté en dichos planos soluciona el problema (Figura 4.21.a.), pues los puntos A', B', C' determinados en P forman un triángulo cuyos lados son paralelos a los lados del triángulo ABC.

- b) El plano forma un ángulo α con el plano T. Entonces sobre el lado AB trazamos un plano P' paralelo al plano P y sobre él localizamos un punto C' de tal forma que los triángulos ABC y ABC' sean congruentes, la recta CC' prolongada intersectará al plano P en el punto C'' . Ahora bien, sea D un punto cualquiera de esta recta CC'' distinto de C' , C'' y C, las rectas DB y DA interceptarán al plano P en los puntos A' y B' , entonces el triángulo $A'B'C'$ es homotético al triángulo ABC' (por la parte a), luego es homotético al triángulo ABC en cuestión.

De esta forma, cualquier punto sobre la recta CC'' distinto de ellos y que no esté en el plano P satisface el problema (Figura 4.21.b.).

Figura 4.21.

Bibliografía

Howard Eves. (1969). *Estudio de las geometrías*. España: UTEHA.

Gabriel Velasco Sotomayor. (1983). *Tratado de geometría*. México: Limusa.

Estadística Descriptiva en R

Jesús Antonio Villarraga Palomino¹
Héctor Felipe Díaz Mora²

- ¹ Licenciado en Matemáticas, Universidad de Cundinamarca.
Especialista en Estadística Aplicada, Fundación Universitaria Los Libertadores.
Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia.
- ² Licenciado en Matemáticas, Universidad de Cundinamarca.
Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia.

Contenido

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN R

Introducción

1. Comenzando con R
2. Algunos conceptos previos
3. Distribuciones de frecuencia
4. Medidas de posición
 - 4.1 Cuantiles
 - 4.2 Cuartiles
 - 4.3 Medidas de centralización
5. Medidas de dispersión
 - 5.1 Desviación media
 - 5.2 Varianza y desviación típica
 - 5.3 Coeficiente de variabilidad

Bibliografía

Lista de figuras

Figura 1. Preliminares

Figura 2. Promedio

Figura 3. Creación de variable

Figura 4. Diagrama de caja y bigotes

Figura 5. Ejemplo 4.2. Consumo de agua, caja y bigotes

Figura 6. Frecuencias de tiempos de dos cajeras

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN R

Introducción

A la estadística le concierne la presentación, el análisis y la utilización de datos numéricos (cualitativos o cuantitativos) para realizar inferencias y alcanzar decisiones ante determinadas situaciones como pronosticar el resultado de una elección presidencial y obtener información sobre determinado producto, resultado de la eficacia de un medicamento, entre otras. La estadística se subdivide en *descriptiva o deductiva* que se encargan de recolectar, clasificar, analizar y representar de forma gráfica los datos; en otras palabras, en caracterizar un grupo. La estadística *inferencial o inductiva* busca inferir conclusiones generales de una población a partir de una muestra, permitiendo predecir el comportamiento de determinada variable aplicada a un fenómeno, y es apoyada por la estadística descriptiva y en la probabilidad.

Este capítulo presenta una introducción clara y concisa a los conceptos estadísticos descriptivos básicos. Un curso de estadística está presente en el plan de estudios de diferentes carreras, y es a menudo uno de los cursos más útiles por su transversalidad en los diferentes campos. Se plantea además una exposición detallada de cada concepto mostrando ejemplos trabajados con el *software* R³, para el cual se presenta una ilustración clara y el paso a paso para que el lector se familiarice con el lenguaje que se utiliza en este programa y de este modo pueda trabajar de manera autónoma con las herramientas que brinda este para el análisis estadístico.

El *software* R y su lenguaje es uno de los más utilizados por la comunidad estadística, debido a que además de ser un programa libre es de código abierto y posee algunos elementos de programación intuitivos en los cuales pondremos especial énfasis, de tal manera que el lector se pueda acercar a los comandos básicos. Puesto que R nos brinda un gran número de herramientas como análisis de datos y simulación, y gráficas, entre otras, nos pareció pertinente utilizarlo para ir adquiriendo las nociones y los conceptos básicos de la estadística y así avanzar progresivamente.

La International Association for Statistical Education (IASE) reconoce los recursos tecnológicos como herramientas que implican cambios metodológicos en la enseñanza de la estadística. En la actualidad son cuantiosos los simuladores y los *software* estadísticos que se usan como mediadores didácticos. Salas (2008) establece algunas características en las cuales R como programa estadístico tiene un rendimiento óptimo en la manipulación de datos, calidad de gráficos, control de procesos y variedad de análisis estadístico.

³ R es un *software* libre para realizar análisis y gráficos estadísticos, creado por Ross Ihaka y Robert Gentleman. <https://www.r-project.org/>

1. Comenzando con R

R es un lenguaje de programación efectuado en un *software* libre cuyo objetivo principal es ofrecer herramientas para realizar análisis estadísticos y minería de datos, entre otros. En principio se requiere conocer la sintaxis y los comandos propios del programa, además de la identificación de algunos paquetes específicos que ayudan a aplicar técnicas estadísticas y visualizar algunos gráficos estadísticos.

A continuación, se presentan algunos preliminares.

Figura 1. Preliminares
Fuente: elaboración propia.

El *script* es el espacio en donde el usuario escribe un conjunto de órdenes que son ejecutadas por lotes o líneas por medio del comando **Ctrl + R** cuyo resultado se ve evidenciado en la consola; sin embargo, cabe aclarar que desde la consola se puede realizar la sintaxis de las instrucciones: en la interfaz aparece el símbolo **>** el cual espera la entrada del código.

En un primer momento R ofrece realizar operaciones matemáticas; suma (+), resta (−), multiplicación (*), división (/), potenciación (^) y radicación (sqrt()), entre otros. Para explicar algunas de estas operaciones considere la siguiente situación:

Un estudiante desea saber el promedio de su nota en la asignatura de matemáticas en el segundo periodo académico. Sus notas son:

$$2.5 - 3.8 - 4.0 - 1.5 - 5.0 - 5.0 - 4.5 - 3.0$$

El promedio se obtiene al sumar las diferentes notas y dividir las por la cantidad de notas totales.

```
> utils::menuInstallPage()
--- Please select a CRAN mirror for use in this session ---
Error in contrib.url(repo, type) :
  trying to use CRAN without setting a mirror
> 2.5 + 3.8 + 4.0 + 1.5 + 5.0 + 5.0 + 4.5 + 3.0
[1] 29.3
> (2.5 + 3.8 + 4.0 + 1.5 + 5.0 + 5.0 + 4.5 + 3.0)/8
[1] 3.6625
> |
```

Figura 2. Promedio

Fuente: elaboración propia.

En la anterior imagen se evidencia cómo en un primer momento se realiza la suma y después la división uniando las dos operaciones aritméticas para dar el resultado de la nota promedio; sin embargo, R es un lenguaje orientado a objetos, lo que significa que se puede llevar a cabo una asignación de nombres a los datos o valores mediante la escritura `<-` en la cual “<-” ejecuta la orden de asignación y la letra “c” indica la unión de los valores, a lo que se le denomina “concatenar”, luego otra forma de hallar el promedio de notas es:

```
> Notas<-c(2.5 + 3.8 + 4.0 + 1.5 + 5.0 + 5.0 + 4.5 + 3.0)
> Notas
[1] 29.3
> Notas<-c(2.5, 3.8, 4.0, 1.5, 5.0, 5.0, 4.5, 3.0)
> Notas
[1] 2.5 3.8 4.0 1.5 5.0 5.0 4.5 3.0
> sum(Notas)
[1] 29.3
> sum(Notas)/8
[1] 3.6625
> |
```

Figura 3. Creación de variable

Fuente: elaboración propia.

El anterior procedimiento muestra la creación de una variable llamada “Notas”, la cual contiene las calificaciones del estudiante. Al ejecutar “Notas” en la interfaz nos muestra las calificaciones concatenadas. Observe que el uso de la coma en el lenguaje se usa para separar cada valor, la función `sum` realiza la suma de los valores de la variable. En las siguientes secciones se ilustrarán funciones específicas para las diferentes medidas estadísticas.

Una de las virtudes de R es crear secuencias y simular datos, los cuales se pueden situar en contexto y trabajar algunos conceptos estadísticos con ellos. A continuación se muestran algunos códigos para la creación de valores.

Secuencia

```
> seq(1,50,by=2)
[1] 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49
```

El anterior código genera una secuencia numérica del 1 al 50, cuyos valores van de 2 en 2.

Repetición

```
> rep(c(3,5),c(2,8))
[1] 3 3 5 5 5 5 5 5 5
```

Con la instrucción **rep** se genera una lista de valores repetidos. En el caso anterior, el número 3 se repite 2 veces y el número 5 se repite 8 veces, lo que indica que la primera parte hace referencia a los números que se van a visualizar, mientras la segunda indicación, a cuántas veces se deben repetir dichos valores.

Datos normales

```
> rnorm(100,mean=13,sd=1.4)
[1] 12.502081 12.652024 12.282538 12.759842 10.484075 11.180698 12.996659
[8] 11.544053 13.598415 13.502056 9.967882 11.988760 12.779089 14.440816
[15] 12.829552 13.128673 14.622584 13.986495 11.868107 13.489144 14.207311
[22] 13.793826 12.680301 11.670106 14.262155 13.644689 12.542642 14.537095
[29] 11.189631 13.302640 12.294700 13.579849 10.624516 13.835507 10.801841
[36] 12.656865 15.060106 12.293180 14.100495 13.266915 13.024045 12.075177
[43] 10.575925 12.340178 15.237444 12.692253 10.625794 14.157591 10.883151
[50] 11.252039 13.076094 14.453238 14.116408 14.505733 11.198573 11.492088
[57] 12.874375 12.449548 13.203248 12.610553 13.115475 14.574551 14.538236
[64] 12.623940 15.210098 12.622926 14.576066 11.014958 14.390441 11.113514
[71] 10.110797 14.324942 14.409007 11.761998 11.844097 13.844710 14.325497
[78] 13.736028 11.164261 13.503336 9.108876 11.620512 13.519168 14.189885
[85] 13.105805 15.709855 12.041991 15.577116 13.032318 13.838676 12.759318
[92] 13.917503 13.515759 12.783271 12.245004 13.645231 13.516419 12.977351
[99] 12.674967 15.420698
```

La función **rnorm** produce un conjunto de datos aleatorios alrededor de una media y una medida de variabilidad llamada desviación estándar (conceptos que se desarrollarán en secciones posteriores). En el caso anterior, se generaron 100 datos aleatorios, cuyo promedio es 13 y con una desviación de 1.4.

Pseudoaleatorios

```
> sample(1:50, size=50, replace=FALSE)
[1] 2 31 37 42 39 30 29 41 1 50 6 47 16 20 34 9 14 18 10 5 38 28 48 44 25
[26] 49 43 33 19 17 36 35 22 13 40 15 3 21 7 27 32 8 26 23 46 24 4 12 45 11
```

La función **sample** genera una muestra de un tamaño especificado teniendo en cuenta el argumento de reemplazo o sin reemplazo, el tamaño (size) debe ser un número natural. En el caso anterior, se realizó una simulación de datos sin reemplazo de 50 números del 1 al 50.

Actividad 1.

- I. Realice las siguientes operaciones en R, considere $x = -2$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 4$

A. $(x * y) + z$

B. $\frac{2\sqrt{y}-s}{z}$

C. $\sum_z \frac{x}{z} + x * (y - \frac{x}{s})$

II. Considere las siguientes situaciones y simule los datos con la función en r más adecuada.

- A. Una clínica odontológica registró la cantidad de caries de 20 pacientes.
- B. Se halló la estatura en metros de 50 personas cuya estatura promedio es de 1.65 metros.
- C. El lanzamiento 15 veces de un dado.

2. Algunos conceptos previos

El análisis estadístico de datos tiene como objetivo organizar y describir los datos recogidos de forma abreviada por medio de tablas de frecuencia, gráficos estadísticos, medidas de posición y medidas de dispersión. Para este proceso es necesario identificar la población, muestra y el tipo de variable que se desea estudiar. A continuación realizaremos una breve descripción de los conceptos estadísticos necesarios para realizar análisis de datos de forma deductiva.

Población

Es un conjunto de elementos con características comunes. A las medidas de posición o de dispersión que se pueden hallar en este conjunto, se les denomina parámetros, los cuales se escriben en letras griegas, μ (media aritmética) y σ^2 (varianza), que son desconocidas.

Muestra

Se define como un subconjunto representativo de la población que, al igual que esta, se compone por elementos con características comunes. La muestra puede ser aleatoria (por medio de técnicas de muestreo, las cuales garantizan la misma posibilidad de participación de los elementos de la población) y muestras determinísticas (los elementos son hallados sin ninguna técnica de muestreo). Las medidas de dispersión o posición son denominadas estadísticas, $\bar{x}$ (promedio), s^2 (varianza muestral).

Inferir significa extraer una conclusión a partir de hechos particulares o generales. En términos estadísticos, se busca obtener conclusiones de una población a partir de la información que pueda brindar una muestra; en otras palabras, se desea que el estadístico o la medida muestra como $\bar{x}$ (promedio), s^2 (varianza muestral) sean estimadores de los parámetros μ (media aritmética), σ^2 (varianza). Se recuerda que el objetivo de este documento es describir la información de un grupo de datos. Las conclusiones que se obtienen se refieren a la muestra.

Variables

Son características medibles de la población. Dichas particularidades pueden ser cualitativas o cuantitativas y suelen denotarse por medio de letras latinas X, Y . A las observaciones individuales de la muestra de tamaño n se les denota mediante $\{x_1, x_1, x_1, \dots, x_n\}$. A continuación se describen los tipos de variables:

Actividad 2.1.

Marque con una equis “X” según el tipo de variable estadística que se describe en cada caso.

Tabla 1. Tipos de variables

Situación	Variable cuantitativa		Variable cualitativa	
	Discreta	Continua	Nominal	Ordinal
Comida favorita.				
Posición en una competencia deportiva.				
Tiempo que se demora de casa al colegio.				
Estrato socioeconómico.				
Estatura de diez amigos dada en metros.				
Temperatura en una ciudad.				

Fuente: elaboración propia.

Ejemplo 2.1.

Considere que en una determinada ciudad se ha detectado un virus el cual ataca el hígado de hombres y mujeres mayores de edad. Para combatir dicho virus se han practicado dos tipos de tratamiento a 2000 personas cuya muestra fue de forma aleatoria, como muestran las tablas:

Tratamiento 1

	Total	Personas que curó	Porcentaje de personas que curó
Hombres	170	136	80 %
Mujeres	830	249	30 %
Total	1000	385	38.5 %

Tratamiento 2

	Total	Personas que curó	Porcentaje de personas que curó
Hombres	830	498	60 %
Mujeres	170	5	2.95 %
Total	1000	503	50.3 %

Como ya se había mencionado antes, uno de los objetivos del análisis de los datos es comparar muestras y de forma descriptiva realizar afirmaciones sustentadas en la organización de datos, gráficas, estadísticas y medidas de posición y dispersión.

En el ejemplo de virus se identifica que la **población** está compuesta por hombres y mujeres mayores de edad que viven en la ciudad objeto del estudio y la **muestra** se relaciona como las 2000 personas que se sometieron a los tratamientos tipo 1 y tipo 2. Nos podemos entonces preguntar: ¿Qué tratamiento es más efectivo para combatir el virus?

Si se comparan los resultados de los dos tratamientos por el género, el tratamiento 1 es el más efectivo ya que se observa un 80 % de efectividad en hombres y un 30 % en mujeres, contra un 60 % en hombres y un 2.95 % en mujeres con el tratamiento 2. Si no se considera el género y se observa la cantidad de personas beneficiadas, el tratamiento 2 es el más efectivo pues el tratamiento 1 está en desventaja: cura 385 personas mientras que el 2 cura a 503. El análisis anterior puede generar confusiones debido a que aclarar este tipo de situaciones e interpretar correctamente los datos son algunos de los fines de la estadística descriptiva.

3. Distribuciones de frecuencia

Las tablas o distribuciones de frecuencias cumplen la función de organizar la información de forma que el investigador pueda realizar una lectura de los datos de manera más precisa. Dicha organización nos facilita tomar conclusiones iniciales sobre el comportamiento de la distribución de los datos. Para la construcción de la tabla se contemplan las siguientes definiciones.

Frecuencia Absoluta:

Indica el número de veces que aparece la variable, se utilizará la notación f_i .

$$\sum_{i=1}^k f_i = N$$

N es el tamaño de muestra, porque $0 \leq f_i \leq N$.

Frecuencia Relativa:

Se define como el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de muestra. Dicho valor no se encuentra entre

0 y 1, y se utilizará la notación h_i .

$$h_i = \frac{f_i}{N}, \quad 0 \leq h_i \leq 1$$

Frecuencia Absoluta Acumulada:

Es la suma de las frecuencias absolutas del valor anterior o igual del considerado. Se utilizará la notación F_i .

$$F_i = F_{i-1} + f_i$$

$$F_1 = f_1$$

Frecuencia Relativa Acumulada:

Es la suma de las frecuencias relativas del valor anterior o igual del considerado. Se utilizará la notación F_i .

$$H_i = \sum_{i=1}^k h_i$$

Las distribuciones de frecuencia pueden ser presentadas para **datos no agrupados** que se definen como la recolección y organización de los datos de forma original. Los **datos agrupados** se utilizan para simplificar el gran volumen de información por medio de la construcción de intervalos.

Tabla 2. Distribución de frecuencia

X_i	f_i	F_i	M_i	H_i	%
x_1	f_1	f_1	$\frac{f_1}{n} = h_1$	$\frac{f_1}{n}$	$h_1 * 100$
x_2	f_2	$f_1 + f_2$	$\frac{f_2}{n} = h_2$	$\frac{f_1 + f_2}{n}$	$h_2 * 100$
x_3	f_3	$f_1 + f_2 + f_3$	$\frac{f_3}{n} = h_3$	$\frac{f_1 + f_2 + f_3}{n}$	$h_3 * 100$
x_i	f_i	$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i$	$\frac{f_i}{n} = h_i$	$\frac{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_i}{n}$	$h_i * 100$

Fuente: elaboración propia.

3.1 Caso datos no agrupados

Uso del software R

Para simplificar un poco la escritura del capítulo, en cada ejemplo elaborado en R se mostrará un cuadro con la salida en la consola, por tal motivo cada línea del código por ejecutar aparecerá con el símbolo `>`. Tenga en cuenta la siguiente convención:

- La orden para ejecutar se mostrará en negrilla y cursiva (si lo escribe desde el *script* omite el símbolo `>` al iniciar la línea).
- La línea o las líneas siguientes a la orden por ejecutar mostrará la salida del código ejecutado. Recuerde que para ejecutar el código desde el *script* debe presionar **Ctrl** + **R** y desde la consola solo basta con presionar **Enter**.
- Cuando en una orden aparezca el símbolo `#` (sin negrilla) indicará un comentario del código, el cual no afectará lo escrito previamente. De igual forma se visualizará en el título de cada ejemplo.

Ejemplo 3.1.

Considere que en una clínica odontológica en un día normal atendieron 35 pacientes a los cuales se les registraron la cantidad de caries. Los resultados fueron:

```
3 - 2 - 1 - 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 4 - 1 - 0 - 0 - 0 - 3 - 0 - 3
- 4
1 - 2 - 2 - 3 - 2 - 5 - 1 - 2 - 3 - 3 - 2 - 1 - 0 - 1 - 1 - 3
- 3 - 4
```

```
##### Distribución de datos no agrupados #####

>Caries<-c(3,2,1,0,1,2,3,4,4,1,0,0,0,3,0,3,4,1,2,2,3,2,5,1,2,3,3,2,1,0,1,1,3,3,4)
> Caries
[1] 3 2 1 0 1 2 3 4 4 1 0 0 0 3 0 3 4 1 2 2 3 2 5 1 2 3 3 2 1 0 1 1 3 3 4
> frec_tabla<-as.data.frame(table(Caries=Caries))
> frec_tabla
  Caries  Freq
1 0     6
2 1     8
3 2     7
4 3     9
5 4     4
6 5     1

> transform(frec_tabla, Fre_acu=cumsum(Freq),
+
Rel=prop.table(Freq),Rel_acu=cumsum(prop.table(Freq)),Porc=prop.table(Freq)*
100)
  Caries Freq  Fre_acu    Rel    Rel_acu    Porc
1     0     6      6 0.17142857 0.1714286 17.142857
2     1     8     14 0.22857143 0.4000000 22.857143
3     2     7     21 0.20000000 0.6000000 20.000000
4     3     9     30 0.25714286 0.8571429 25.714286
5     4     4     34 0.11428571 0.9714286 11.428571
6     5     1     35 0.02857143 1.0000000  2.857143
```

Analizando las columnas de frecuencia y el porcentaje se obtienen las siguientes conclusiones:

- Solo el 17.14 % de los pacientes no tienen caries, lo que es equivalente a 6 personas.
- El 60 % de los pacientes, que hace referencia a 21 personas, tiene entre 0 y 2 caries.
- En total, 5 clientes tienen entre 4 y 5 caries, distribuidos 4 clientes con 4 caries, lo cual hace referencia al 11.42 % de la muestra y un cliente tiene 5 caries, que equivale al 2.85 %

3.2 Más sobre los datos agrupados

Para definir la distribución de frecuencias para datos agrupados es necesario construir intervalos, los cuales se construyen como sigue:

- Para hallar el número de intervalos “K” es común utilizar la regla de Sturges, la cual se define como:

$$K = 1 + (3,322)(\log(n))$$

de intervalos tamaño de muestra

Otra forma de hallar este valor es $K = \sqrt[n]{n}$. Como se puede observar, en la mayoría de los casos K debe ser redondeado al entero más cercano.

- Una vez conocido el número de intervalos se necesita conocer la amplitud o longitud de cada uno de estos; para ello se utiliza.

$$A = \frac{x_{\text{Nayor}} - x_{\text{Nenor}}}{\# \text{ de intervalos}}$$

Además de construir los intervalos y utilizar las frecuencias anteriormente mencionadas, se hace necesario incluir una columna denominada marca de clase, la cual indica el punto medio de cada intervalo y es usada para hallar algunas medidas estadísticas como medidas de posición y de dispersión.

A continuación daremos algunos ejemplos de construcción de tablas de frecuencias medio del *software* R y presentaremos algunos aspectos básicos para iniciar con su manejo.

Uso del *software* R

Ejemplo 3.2.

Considere la masa de 30 mujeres dada en kilogramos, cuyo peso ideal con respecto a la estatura de 1.6 metros es de 51.20 kg a 67 kg. Supóngase que se decide utilizar 6 intervalos.

```
##### Distribución de datos no agrupados #####
>mujeres <-c(51.11, 52.21, 51.48, 51.48, 53.63, 51.03, 53.08, 52.14, 52.32, 52.57,
51.20, 52.02, 52.59, 50.61, 52.78, 52.66, 53.94, 53.28, 50.73, 51.70, 51.75, 54.18,
51.97, 51.09, 51.97, 51.91, 51.81, 52.44, 52.16, 53.55, 49.91)
>mujeres
>fre_tabla<-as.data.frame(table(intervalo=factor(cut(mujeres,breaks=6))))
>fre_tabla
  intervalo Freq
1 (49.9,50.6]  2
2 (50.6,51.3]  4
3 (51.3,52]    9
4 (52,52.8]    8
5 (52.8,53.5]  3
6 (53.5,54.2]  4

>transform(fre_tabla, Fre_acu=cumsum(Freq),
+
Rel=prop.table(Freq),Rel_acu=cumsum(prop.table(Freq)),Porc=prop.table(Freq)*
100)
  intervalo Freq  Fre_acu   Rel  Rel_acu   Porc
1 (49.9,50.6]  2      2  0.0666667  0.0666667  6.666667
2 (50.6,51.3]  4      6  0.1333333  0.2000000 13.333333
3 (51.3,52]    9     15  0.3000000  0.5000000 30.000000
```

4 (52,52.8]	8	23	0.26666667	0.76666667	26.666667
5 (52.8,53.5]	3	26	0.10000000	0.86666667	10.000000
6 (53.5,54.2]	4	30	0.13333333	1.00000000	13.333333

Analizando las frecuencias relativas, absolutas y porcentajes de la tabla, se puede concluir que:

- Dos mujeres, que hace referencia al 6,66 %, se consideran bajas de peso ya que se encuentran por debajo de 51,20 kg que es el peso mínimo para una mujer de 160 cm.
- El 30 % de las mujeres encuestadas se encuentran en peso de entre 51,3 kg y 52 kg, y están en los límites de considerarse bajas de peso.
- De las mujeres encuestadas se identifica que el 13,3 %, es decir 4 mujeres, tiene una masa de entre 53,3 kg y 54,2 kg, las cuales son las masas máximas de las encuestadas.
- De las 30 mujeres ninguna se puede considerar en sobrepeso, ya que para considerar obesa a una mujer de 1,6 metros de altura, debería superar los 67 kg.

Actividad 2.

I. Considere el salario mensual de 200 obreros que se desempeñan como empleados en una construcción de un edificio. El salario puede variar según las horas extras asignadas en el mes. Haga una distribución de frecuencia agrupada (construyendo los intervalos) y determine algunas conclusiones de esta.

Los salarios de los empleados están dados por la simulación que se muestra en el código.

```
##### Datos simulados salario #####

salario=rnorm(200,mean=900000,sd=40000)
salario

#####construcción de intervalos#####

K=1+(3.322)*(log(200))
K
round(K)
max(salario)
min(salario)
A=(max(salario)-min(salario))/(round(K))
A

##### Tabla de datos agrupados #####

fre_tabla<-as.data.frame(table(intervalo=factor(cut(salario,breaks=round(K)))))
transform(fre_tabla, Fre_acu=cumsum(Freq),
Rel=prop.table(Freq),Rel_acu=cumsum(prop.table(Freq)),Porc=prop.table(Freq)*
100)
```

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior construya una tabla de frecuencia con 12 intervalos, determine sus respectivas conclusiones y compárela con el ejercicio I. ¿Existe diferencia? ¿Cuál de las dos tablas es mejor?

En la siguiente sección se estudiarán medidas de posición, de dispersión y gráficos estadísticos, los cuales serán herramientas esenciales para el análisis de datos.

4. Medidas de posición

4.1 Cuantiles

Los cuantiles son medidas de posición que dividen el conjunto de datos en partes iguales. Los cuantiles más conocidos son cuartiles que dividen los datos en 4 partes iguales, los deciles en 10 partes iguales y los percentiles en 100 partes iguales.

4.2 Cuartiles

Los cuartiles son 3 medidas estadísticas que dividen el conjunto de datos en 4 partes iguales de 25 % cada una. Para dicha partición se organizan los datos de menor a mayor, el Q_1 deja el 25 % de los datos por debajo del valor que se halla, el Q_2 el 50 % de los datos son inferiores a su valor y el Q_3 es el valor tal que deja por debajo el 75 % de los datos y el 25 % por encima.

De acuerdo con la distribución de frecuencia para datos agrupados y no agrupados se hallan los cuantiles.

Cuantiles distribución de datos no agrupados	Cuantiles distribución de datos agrupados
$Q_1 = \frac{n+1}{4}$ siempre y cuando la cantidad de datos sea impar. $Q_1 = \frac{x_0 + x_{n+1}}{2}$ siempre y cuando la cantidad de datos sea impar.	$Q_k = x_{i-1} + \frac{\left(\frac{k}{4} - H_{i-1}\right)}{2} A$ <p>Se considera los datos agrupados en la tabla de frecuencia y los intervalos en los cuales se encuentra cada uno de los cuantiles.</p> <p>K: valor del cuartil. x_{i-1}: límite inferior del intervalo. H_{i-1}: frecuencia relativa acumulada. A: amplitud.</p>

Uso del software R

Ejemplo 4.1.

Los siguientes datos simulados son la cantidad de electrodomésticos diarios vendidos en un almacén de cadena. Hallar los cuartiles e interpretarlos.

```
#####  
##### Cuartiles #####  
  
> almacén= sample(1:100, size=50, replace=FALSE)  
> almacén  
[1] 15 26 89 98 90 31 42 36 2 17 5 41 57 95 9 39 72 30 71 37 19 85 27 62 40  
[26] 77 65 1 51 10 35 21 64 28 75 38 82 45 54 33 47 91 53 18 3 29 6 80 69 16  
> quantile(almacén)  
 0 %   25 %  50 %   75 %  100 %  
1.00 22.25 39.50 68.00 98.00
```

El 25 % de los días el almacén vendió menos de 22 electrodomésticos, de igual manera el 50 % de los días vende 40 o menos electrodomésticos y el 75 % de los días vende como máximo 68 electrodomésticos.

La función **sample** en R genera datos pseudoaleatorios, es decir, crea una sucesión de números con un acercamiento a un conjunto de números aleatorios. En este caso se generaron 50 números (**size=50**) que estuvieran entre 1 y 100, la función **quantil** toma la medida de los cuartiles anteriormente definidos.

Uno de los gráficos que está basado en los cuartiles es el diagrama de cajas y bigotes cuyo objetivo principal es visualizar la distribución de los datos. Para su construcción se debe hallar el rango intercuartílico que se define como la diferencia entre Q_3 y Q_1 , con este valor se construye la caja en la cual se encontrará el 50 % de los datos, además dicha caja estará dividida por un segmento que indica la posición de la mediana. Las líneas que sobresalen de la caja se direccionan al dato mayor y al dato menor de la distribución organizada de los datos. Los valores que estén por fuera de estos segmentos se denominan datos atípicos y se representan por medio de asteriscos o puntos.

Figura 4. Diagrama de caja y bigotes

Fuente: elaboración propia.

En R se obtiene de manera sencilla el diagrama de caja y bigotes por medio de la función `boxplot`. El anterior gráfico se realizó, como muestra el código.

```
#####
##### Boxplot #####

> quantile(almacén, 0.25)
25%
22.25
> quantile(almacén, 0.5)
50%
39.5
> quantile(almacén, 0.75)
75%
68
> IQR(almacén)
[1] 45.75
> boxplot(almacén, main="Cantidad de electrodomésticos vendidos")
```

Ejemplo 4.2.

Considere que los datos simulados en R son el consumo de agua en N^3 en tres barrios en una determinada ciudad durante diciembre. Se tomó una muestra de 100 familias por barrio.

```
#####
##### Consumo de agua #####

> Barrio_1<-rexp(n=100, rate=1/5)
> Barrio_1
> Barrio_2<-rnorm(n=100, mean=10, sd=1)
> Barrio_2
> Barrio_3<-c((rnorm(n=30, mean=18, sd=3)),rep(c(20,25),c(35,35)))
> Barrio_3

> par(mfrow=c(3,1))
> boxplot(Barrio_1,col="red",horizontal=T,xlab="metros cúbicos",
+ main="Consumo de agua en barrio 1")

> boxplot(Barrio_2,col="green",horizontal=T,xlab="metros cúbicos",
+ main="Consumo de agua en barrio 2")

> boxplot(Barrio_3,col="blue",horizontal=T,xlab="metros cúbicos",
+ main="Consumo de agua en barrio 3")
```

El anterior código muestra el diagrama de caja y bigotes del consumo de agua de los tres barrios.

Figura 5. Ejemplo 4.2. Consumo de agua, caja y bigotes
Fuente: elaboración propia.

El consumo de agua del barrio 1 es asimétrico a la izquierda. Observamos que el bigote derecho es más amplio que el izquierdo, lo cual evidencia que por debajo del 50 % presenta menor nivel de variación, el barrio 2 presenta una distribución más simétrica con respecto a la primera localidad y el barrio 3 muestra datos atípicos a la izquierda. De igual forma, la longitud del bigote izquierdo es menor que la del derecho.

En términos del consumo, el barrio 3 fue la localidad que más gasto tuvo, y se identificó a un usuario con gastos mínimos de 12.62 N^3 , y más del 50 % de los datos tuvo un consumo superior a 20.87 N^3 . Por otro lado, el barrio 1 presenta un consumo menor, lo que significa la asimetría a la izquierda. En esta localidad se identifica que el gasto mínimo de 0.07224 N^3 de agua (se puede decir que en diciembre no se encontraban personas en la vivienda), el 25 % de los habitantes de este barrio consumió más de 5.75 N^3 y en el barrio 2 el 75 % de los usuarios gastaron como máximo 10.5 N^3 .

4.3 Medidas de centralización

4.3.1 Media aritmética

Medida de centralización cuyo objetivo es representar la variable cuantitativa de la muestra en un solo valor. Dicha medida está dada por:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Desde la tabla de frecuencias para datos no agrupados, se puede determinar por medio de:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i f_i}{N} \qquad \bar{X} = \sum_{i=1}^k x_i h_i$$

Uso del software R

Ejemplo 4.1.1.

Considere que un equipo de fútbol jugó en la temporada 24 partidos. La cantidad de goles que anotó por partido se relaciona a continuación:

1 - 4 - 2 - 4 - 2 - 0 - 1 - 1 - 5 - 4 - 0 - 0 - 1 - 2 - 4 - 3
- 3 - 2 - 2 - 4 - 3 - 0 - 0 - 3

```
##### Promedio #####
> Goles<-c(1,4,2,4,2,0,1,1,5,4,0,0,1,2,4,3,3,2,2,4,3,0,0,3)
> Goles
[1] 1 4 2 4 2 0 1 1 5 4 0 0 1 2 4 3 3 2 2 4 3 0 0 3
> mean(Goles)
[1] 2.125
```

La cantidad de goles promedio de los 24 partidos fue de 2.125 goles, este valor representa que por partido el equipo anotaba entre 2 y 3 goles.

4.3.2 Propiedades de la media aritmética

1. La suma de las diferencias de los datos con respecto a la media es igual a cero.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N \bar{x} = N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

Uso del *software* R

Ejemplo 4.1.2.

```
##### Propiedad 1 #####

> Goles<-c(1,4,2,4,2,0,1,1,5,4,0,0,1,2,4,3,3,2,2,4,3,0,0,3)
> mean(Goles)
[1] 2.125

> mean(Goles)-Goles
[1] 1.125 -1.875 0.125 -1.875 0.125 2.125 1.125 1.125 -2.875 -1.875
[11] 2.125 2.125 1.125 0.125 -1.875 -0.875 -0.875 0.125 0.125 -1.875
[21] -0.875 2.125 2.125 -0.875

> sum(mean(Goles)-Goles)
[1] 0
```

2. Si a todos los valores de la variable le sumamos una constante k, la media aritmética queda aumentada en esa variable.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i + K}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^N K}{N} = \bar{X} + \frac{NK}{N} = \bar{X} + K$$

Uso del *software* R

Ejemplo 4.1.2.

```
##### Propiedad 2 #####

> Goles
[1] 1 4 2 4 2 0 1 1 5 4 0 0 1 2 4 3 3 2 2 4 3 0 0 3
> K=2
> K
[1] 2
> Goles + K
[1] 3 6 4 6 4 2 3 3 7 6 2 2 3 4 6 5 5 4 4 6 5 2 2 5
> mean(Goles)
[1] 2.125
> mean(Goles + K)
[1] 4.125
> Goles
[1] 1 4 2 4 2 0 1 1 5 4 0 0 1 2 4 3 3 2 2 4 3 0 0 3
> K=2
> Goles + K
```

```
[1] 3 6 4 6 4 2 3 3 7 6 2 2 3 4 6 5 5 4 4 6 5 2 2 5
> mean(Goles)
[1] 2.125
> mean(Goles + K)
[1] 4.125
> medias<-c(mean(Goles), mean(Goles + K))
> table(medias)
medias
2.125 4.125
1 1
```

3. Si a todos los valores de la variable los multiplicamos por una constante k, su media aritmética queda multiplicada por una constante.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i * K}{N} = K * \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = K * \bar{X}$$

Uso del software R

Ejemplo 4.1.3.

```
##### Propiedad 3 #####
> Goles
[1] 1 4 2 4 2 0 1 1 5 4 0 0 1 2 4 3 3 2 2 4 3 0 0 3
> K=2
> Goles * K
[1] 2 8 4 8 4 0 2 2 10 8 0 0 2 4 8 6 6 4 4 8 6 0 0 6
> mean(Goles)
[1] 2.125
> mean(Goles * K)
[1] 4.25
> medias<-c(mean(Goles), mean(Goles * K))
> table(medias)
medias
2.125 4.25
1 1
```

4. Si a una variable X le aplicamos una transformación lineal de la forma Y = aX + b con a y b constantes, la media de la nueva variable queda afectada por dicha transformación lineal.

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N ax_i + b}{N} = \frac{bN + \sum_{i=1}^N ax_i}{N} = b + a\bar{X}$$

Lo que significa que $\bar{Y} = b + a\bar{X}$. Una vez calculada la media aritmética de la nueva variable Y , se puede encontrar la media aritmética de X por medio de:

$$\bar{X} = \frac{\bar{Y} - a}{b}$$

5. La suma de las diferencias cuadráticas de los datos con respecto a la media aritmética es mínima.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - p)^2 > \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{para } \bar{x} \neq p$$

$$(x_i - p) = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - p)$$

$$(x_i - p) = (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - p)$$

$$(x_i - p)^2 = [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - p)]^2$$

$$(x_i - p)^2 = (x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - p) + (\bar{x} - p)^2$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i - p)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - p) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^N (\bar{x} - p)^2$$

Teniendo en cuenta la **propiedad 1** $\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = 0$ entonces el segundo término del trinomio cuadrado perfecto es cero.

$$\sum_{i=1}^N (x_i - p)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^N (\bar{x} - p)^2$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i - p)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - p)^2$$

Como $\bar{x} \neq p$

$$n(\bar{x} - p)^2 > 0$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^N (x_i - p)^2 > \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

4.3.3 Mediana

La mediana se basa en la posición central de datos que ocupa de forma ascendente. El 50 % de los datos son inferiores a su valor y el otro 50 % es superior. Su expresión matemática está dada por:

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}}, \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

$$Me = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \quad \text{si } n \text{ es par}$$

Uso del software R

Ejemplo 4.1.4.

A continuación, se simulan 50 datos que hacen referencia al tiempo en minutos que se demora una cajera de un banco en atender a cada uno de los clientes:

```
##### Mediana #####
> tiempo=rnorm(50,mean=5,sd=2)
> tiempo
[1] 8.3927285 8.0249221 7.9105077 1.6581321 3.6960030 3.9993445 5.6978507
[8] 5.7303721 5.2893425 9.1841789 9.7149206 4.7005281 6.8569163 5.9571065
[15] 7.0592101 7.6423797 3.5995130 1.6984862 4.9159563 2.2701405 3.9472022
[22] 4.0925972 4.9992931 0.8342304 3.7692655 4.3323937 7.5298352 4.1043314
[29] 9.2223537 6.8912587 3.3262989 2.8658247 7.2703860 2.7376662 7.3722591
[36] 4.8112911 1.7287765 4.6207753 6.1885284 3.5656576 5.6877143 5.7799232
[43] 6.2533767 0.7666036 3.5998578 4.8731608 5.9259717 5.3021294 3.8344474
[50] 4.5151503
> median(tiempo)
[1] 4.894559
```

El anterior código muestra una generación de 50 datos aleatorios distribuidos de forma normal con media 5 y desviación típica 2 (*rnorm(n, mean, sd)*). Cada valor en contexto simula el tiempo en minutos que se demora una cajera atendiendo a un cliente, la función **median** halla la media de los 50 datos, es decir organiza los datos y ubica el valor centro.

4.3.4 Moda

Es el dato que más se repite y es fácil de identificar desde una tabla de distribución de frecuencia, pues es aquel cuya frecuencia absoluta es de mayor valor.

Uso del software R

En R no existe la función definida para hallar la moda, sin embargo por medio de la función **stem** que produce un diagrama de tallo y hojas de los valores de la variable, se mostrará esta medida de centralización.

Tabla 3. Relación modal, función stem

#####Sin moda##### z<-c(1,2,3,4) > stem(z) The decimal point is at the 1 0 2 0 3 0 4 0	#####Unimodal##### y<- c(5,5,5,5,5,5,5,2,3,2,2,4) > stem(y) The decimal point is at the 2 000 3 0 4 0 5 0000000	#####Bimodal##### x<-c(5,1,2,2,3,2,2,2,4, 4,4,4,4) > stem(x) The decimal point is at the 1 0 2 00000 3 0 4 00000 5 0
--	--	--

Las medidas de posición central, media aritmética, mediana y moda en un conjunto de datos buscan describir la muestra o población por medio de un valor numérico; sin embargo, muchas de estas medidas pueden ser sensibles a la distribución o naturaleza de los datos. A continuación se describen algunas condiciones e implicaciones que se deben tener en cuenta a la hora de aplicar y explicar estas medidas.

Tabla 4. Algunas consideraciones de medidas de centralización

Media aritmética	Mediana	Moda
<ul style="list-style-type: none">• Se usa en variable cuantitativa discreta o continua.• Partiendo del hecho de que se calcula con base en la magnitud de datos, es muy poca robusta, es decir, se ve alterada fácilmente por los valores de observaciones extremas.	<ul style="list-style-type: none">• Se usa en variables cuantitativas.• No considera la magnitud de los datos, sino su posición, por tal motivo es un parámetro que divide la información en un 50 %.	<ul style="list-style-type: none">• Se usa en variables cualitativas y cuantitativas.• No contempla toda la información, solo aquella cuya frecuencia sea mayor.

Fuente: elaboracion propia

Uso del software R

Ejemplo 4.1.5.

Se desea medir el rendimiento de dos cajeras en un banco, por tal motivo se tomaron los tiempos en minutos que se demoraban en atender a 20 clientes cada una. Los siguientes datos simulan dichos tiempos:

```
##### Comparación de muestras #####

> Cajera_1=rnorm(20,mean=7,sd=2)
> Cajera_2=rnorm(20,mean=7,sd=2)
> Tiempos=data.frame(Cajera_1, Cajera_2)
> Tiempos
  Cajera_1    Cajera_2
1  5.807196  8.856075
2  5.309059  8.518934
3  9.739423  7.384069
4  8.385524  8.049951
5  3.676432  8.471789
6  8.726831  4.983841
7  3.900334  6.926556
8  11.180480 5.247356
9  4.990837  7.600195
10 6.561437  5.039214
11 10.473360 2.915030
12 10.560975 9.891530
13 7.992619  7.485983
14 4.416649  7.095478
15 3.978630  5.659760
16 11.647424 5.283855
17 9.270958  9.921197
18 9.986845  8.967572
19 7.892671  7.604949
20 7.347414  8.764897
> sum(Cajera_1)
[1] 151.8451
> sum(Cajera_2)
[1] 144.6682
```

Como se observa en el anterior código, la cajera 1 empleó 5.807196 minutos en atender al primer cliente, en cambio la cajera 2 utilizó 8.856075 minutos, es decir, en el primer cliente existió una ventaja de 3.048879 minutos para la cajera 1. De igual forma, se podría analizar cliente a cliente. También se identifica que en total se demoró menos la cajera 2 en atender los 20 clientes: en 144.6682 minutos, que equivalen a 2.4 horas, mientras que la cajera 1 tardó un total de 151.8451 minutos, o sea, 2.5 horas.

```
##### Medidas de posición #####

> summary(Cajera_1)
Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
```

```
3.676 5.230 7.943 7.592 9.801 11.650

> summary(Cajera_2)
Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.
2.915 5.566 7.543 7.233 8.580 9.921
```

El anterior código muestra el resumen de las medidas de posición de los tiempos de los dos cajeros, en el cual se puede describir que el menor tiempo gastado por la cajera 1 es de 3.676 minutos, y el 75 % de los clientes los atendió en menos de 9.801 minutos; por el contrario, para la cajera 2 el menor tiempo atendido fue de 2.915 minutos y el 75 % de los clientes fueron atendidos en menos de 8.580 minutos. En cuanto a la media aritmética, se observa que la cajera 1 empleó en promedio 7.592 minutos por cliente y la cajera 2 se demoró en promedio 7.233 minutos.

Figura 6. Frecuencias de tiempos de dos cajeras
Fuente: elaboración propia.

El anterior gráfico muestra el histograma y el diagrama de cajas y bigotes de los tiempos de atención a los 20 clientes. Se puede concluir que los tiempos registrados por la cajera 2 son asimétricos. En relación con la mediana, el bigote de la izquierda presenta mayor longitud que el bigote de la derecha, lo que evidencia que está por encima de la

mediana de 7.54 minutos. El conjunto de datos presenta menor nivel de variación: en la cajera 1 se identifica una distribución de datos un poco más simétrica, sin embargo, la media y la mediana no coinciden.

Para obtener el anterior gráfico se ejecutó el código:

```
##### Histograma y Boxplot #####

> install.packages ("sfsmisc") ##### paquete para graficar histograma y boxplot en
uno solo
> library(sfsmisc)

> histBxp (Tiempos$Cajera_1, main="Cajero 1", boxcol=0,
medcol=1,xlab="Tiempo")
> abline(v = mean(Tiempos$Cajera_1), col = "blue", lwd = 2)
> abline(v = median(Tiempos$Cajera_1), col = "red", lwd = 2)

> histBxp (Tiempos$Cajera_2, main="Cajero 2", boxcol=0,
medcol=1,xlab="Tiempo")
> abline(v = mean(Tiempos$Cajera_2), col = "blue", lwd = 2)
> abline(v = median(Tiempos$Cajera_2), col = "red", lwd = 2)
```

5. Medidas de dispersión

Al comparar las muestras e identificar que tienen la misma media aritmética no se podría afirmar que la distribución de los datos es igual, pues se deberían considerar los datos atípicos y su separación, por tal motivo se debe analizar la homogeneidad de los datos. En esta sección se explicará la desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variabilidad, los cuales describen el grado de dispersión de una variable.

5.1 Desviación media

Se define como el promedio de las distancias que hay entre cada dato x_i y la media $\bar{x}$, cuanto mayor sea la desviación media indica que los datos son más dispersos.

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Como muestra la anterior expresión, se hace la suma del valor absoluto de la diferencia entre el valor de la variable y su promedio dividido en el tamaño de la muestra. Se debe garantizar el valor absoluto para que el numerador de la fracción sea distinto de cero, de lo contrario se estaría aplicando la primera propiedad de la media aritmética.

Uso del software R

Ejemplo 5.1.

Los siguientes datos muestran la cantidad de autos medidos por 50 vendedores durante febrero.

```
##### Simulación cantidad de autos vendidos #####
```

```
> Autos<-(sample(1:20, size=50, replace=T))
> Autos
[1] 3 2 17 13 4 1 20 4 6 13 4 17 9 11 16 20 14 5 4 20 5 11 16 15 5
[26] 9 6 15 3 13 14 9 7 6 7 14 14 13 15 10 14 9 9 20 9 1 13 16 18 17
> mean(Autos)
[1] 10.72
```

Como se evidencia, el promedio de venta de autos en febrero está entre 10 y 11 autos, sin embargo se desea identificar cuánto difiere en promedio la venta de autos por vendedor, para lo cual se debe aplicar la desviación media.

```
##### Simulación cantidad de autos vendidos #####
> MD=sum(abs(Autos-mean(Autos)))/50
> MD
[1] 4.8112
```

El anterior código describe el algoritmo para hallar la desviación media. En el contexto del ejercicio se identifica que en promedio la venta de autos por vendedor difiere en 4.8112 unidades de la media del grupo.

5.2 Varianza y desviación típica

La varianza de una muestra se define como la suma de las diferencias entre cada valor x_i y la media $\bar{x}$ al cuadrado dividida entre $n - 1$, se denota por s^2 y el valor se determina por medio de la expresión matemática.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

La desviación estándar o desviación típica es un valor que permite medir la dispersión con respecto a la media, este valor se halla sacando la raíz cuadrada de la varianza.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

La varianza y la desviación estándar en la estadística descriptiva tienen un significado práctico cuando se comparan dichos valores en dos muestras, pues el valor más pequeño indicará que la muestra es menos variable, es decir, más homogénea.

Uso del software R

Ejemplo 5.2.

Al finalizar dos cursos de estadística descriptiva, las notas de 15 estudiantes en cada curso son mostradas por el siguiente código:

```
##### Comparación varianza #####
> Grupo_1<-c(2.0,2.5,1.8,5.0,4.2,2.3,4.4,5.0,3.2,3.0,5.0,3.8,4.4,4.1,2.8)
> Grupo_1
[1] 2.0 2.5 1.8 5.0 4.2 2.3 4.4 5.0 3.2 3.0 5.0 3.8 4.4 4.1 2.8
> var(Grupo_1)
[1] 1.260952
> sd(Grupo_1)
[1] 1.122921

> Grupo_2<-c(2.5,2.5,3.8,1.0,2.2,4.3,4.4,5.0,4.2,2.3,5.0,3.8,1.4,5.0,3.8)
> Grupo_2
[1] 2.5 2.5 3.8 1.0 2.2 4.3 4.4 5.0 4.2 2.3 5.0 3.8 1.4 5.0 3.8
> var(Grupo_2)
[1] 1.75981
> sd(Grupo_2)
[1] 1.326578

> Varianzas<-c(var(Grupo_1),var(Grupo_2))
> table(Varianzas)
Varianzas
1.26095238095238 1.75980952380952
 1              1
```

Comparando las varianzas de las notas de los dos grupos, se identifica que la varianza del grupo 1 es menor que la varianza del grupo 2, lo cual muestra que las notas del primer grupo son más homogéneas, es decir, que el nivel académico de los 15 estudiantes en estadística es similar; por el contrario, en el grupo 2 se identifica que según las notas en estadística de los 15 estudiantes, estos son un poco más dispersos. Si consideramos el promedio de las dos muestras que son, respectivamente, 3.56 y 3.41, observamos que el grupo 1 obtiene un mejor rendimiento con menor variabilidad en notas que el grupo 2.

La función **var** y **sd** calcula la varianza y la desviación estándar, respectivamente, de la variable. Se debe recordar que R funciona como calculadora y también se podrían hallar por medio de $(\text{sum}((\text{Grupo}_1 - \text{mean}(\text{Grupo}_1))^2)/(15-1))$.

Otro significado práctico de la desviación estándar, sin necesidad de comparar muestras es por medio del teorema de Chesbyshev, el cual no va a encontrar la mínima porción de valores que se encuentran a determinada cantidad de desviaciones estándares del promedio o la media.

5.2.1 Teorema de Chebyshev

Dado un número K mayor o igual que 1 y un conjunto de n mediciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, al menos $(1 - \frac{1}{K^2})$ de las mediciones se encontrarán dentro de K desviaciones estándares desde su media.

Un ejemplo del anterior teorema es tomar un valor $K = 2$ y lo reemplazamos en $(1 - \frac{1}{K^2})$, cuyo resultado sería $\frac{3}{4} = 0.75$, indicaría que $\frac{3}{4}$ de las mediciones estarían en el intervalo $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

Uso del software R

Ejemplo 5.3.

Considere una distribución con $\bar{x} = 75$ y s^2 con una muestra de 100 datos, como muestra la simulación en R.

```
##### Teorema de Chebyshev #####
> X<-rnorm(100,75,100)
> X
> mean(X)
[1] 89.9905

##### K=1 #####
> K=1
> 1-(1/(K^2))
[1] 0
> Lim_inf=mean(X)-K*(21)
> Lim_inf
[1] 68.9905
> Lim_sup=mean(X)+K*(21)
> Lim_sup
[1] 110.9905

##### K=2 #####
> K=2
> 1-(1/(K^2))
[1] 0.75
> Lim_inf=mean(X)+K*(21)
> Lim_inf
[1] 131.9905
> Lim_sup=mean(X)-K*(21)
> Lim_sup
[1] 47.9905

##### K=3 #####
> K=3
> 1-(1/(K^2))
[1] 0.8888889
> Lim_inf=mean(X)+K*(21)
> Lim_inf
[1] 152.9905
> Lim_sup=mean(X)-K*(21)
> Lim_sup
[1] 26.9905
```


La interpretación del teorema de Chebyshev de la anterior distribución de datos es:

- Para $K = 1$ el resultado es igual a 0, lo que indica que cero medidas caen dentro del intervalo $(\mu - o, \mu + o)$ un resultado sin uso práctico, sin embargo, el *software R* nos muestra un intervalo (68.9905, 110.9905).
- Para $K = 2$, indica que 0.75 de los 100 datos están en el intervalo (47.9905, 131.9905).
- Para $K = 3$, indica que 0.88 de los 100 datos están en el intervalo (26.9905, 152.9905).

Como se puede deducir en el anterior ejercicio, mientras más grande sea el valor de K , mayor será el intervalo, lo que indica que cuando $K = 3$ contendrá casi la totalidad de los datos.

5.3 Coeficiente de variabilidad

Se define como una medida de dispersión, la cual mide la proporción de la desviación estándar con respecto de la media. Su valor se halla por medio de la fórmula:

$$C. V. = \frac{s}{\bar{x}}$$

Por lo general el coeficiente de variación se expresa por porcentaje (%), lo que invita a $(C.V.)100$ %. Al analizar la ecuación se puede afirmar que cuando la desviación estándar es muy pequeña, el coeficiente de variación también lo es; por otro lado, si la desviación es muy grande, el coeficiente de variación es igual a 1, lo que nos indica que los datos son muy dispersos.

Uso del *software R*

Los siguientes datos simulados en *R* hacen referencia a la cantidad de veces que 50 personas van al cine.

```
##### Coeficiente de variación #####
> Cine<-sample(1:5, size=50, replace=TRUE)
> Cine
[1] 1 2 5 2 4 1 5 3 5 3 4 4 2 4 3 5 1 1 4 5 3 5 5 2 3 3 3 1 4 2 3 1 5 4 4 3 2 2
[39] 1 3 2 5 4 3 3 4 3 2 4 4
> mean(Cine)
[1] 3.14
> sd(Cine)
[1] 1.309463
> C.V.=sd(Cine)/mean(Cine)
> C.V.
[1] 0.4170265
> (C.V.)*100
[1] 41.70265
```

El cálculo del anterior coeficiente de variación nos indica un 41.7 % de variación de los datos respecto a la media aritmética.

Bibliografía

- Canavos, G. (1988). *Probabilidad y estadística: aplicaciones y métodos*. <https://bit.ly/2X7ZKUP>
- Freund, J. E. y Simon, G. (1994). *Estadística elemental*. <https://bit.ly/2VakgBR>
- Mendenhall, W., Beaver, R. y Beaver, B. (2010). *Introducción a la probabilidad y estadística*. <https://bit.ly/2JyFqE3>
- Prieto, L. y Herranz, I. (2010). *Bioestadística sin dificultades matemáticas*. Ediciones Díaz de Santos.
- Salas, C. (2008). ¿Por qué comprar un paquete estadístico si existe R? *Ecología Austral*, (18), 223-231, agosto. <https://bit.ly/3bMQ6v4>
- Soler, C. A. R. y Ojeda, S. P. C. (2010). *Algunos temas de estadística implementados en R*. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC).
- Téllez-Piñérez, C. F., Lemus Polanía, D. F. y Guerrero Gómez, S. Y. (2015). *Estadística inferencial con aplicaciones en R*. Bogotá: Universidad Los Libertadores.
- The R Development Core Team. (2018). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing. Viena, Austria. www.R-project.org
- Walpole R., Myers, R. y Myers, S. (2007). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. <https://bit.ly/2xFZbaa>

**Sistemas Dinámicos Aplicados
al estudio poblacional
de la *Eisenia Foetida* y el análisis
de efectos del humus en un cultivo
de habichuela**

Leidy Estefanía López Prieto¹

¹

Licenciada en Matemáticas, Universidad de Cundinamarca.
Correo electrónico: stephany4.7@hotmail.com.

SISTEMAS DINÁMICOS APLICADOS AL ESTUDIO POBLACIONAL DE LA *EISENIA FOETIDA* Y EL ANÁLISIS DE EFECTOS DEL HUMUS EN UN CULTIVO DE HABICHUELA

Leidy Estefanía López Prieto¹

INTRODUCCIÓN

En los últimos años el deterioro de suelos del campo colombiano ha venido incrementando debido a los malos manejos agrícolas y el uso excesivo de productos químicos, pues estos degradan la materia orgánica dejando la tierra cada vez más inerte.

Sin embargo existen alternativas orgánicas que cumplen un rol similar al de los abonos químicos, pero son amigables con el medio ambiente ya que devuelven nutrientes al suelo que contribuyen a su restauración; este es el caso del humus de lombriz. La *Eisenia foetida* o lombriz roja californiana es uno de los anélidos más utilizados para el proceso de compostaje, por su capacidad reproductiva e inmunidad a las enfermedades, ya que es capaz de resistir altas densidades poblacionales y producir grandes cantidades de abono en muy poco tiempo. Es una especie que se adapta con facilidad en lechos de diferentes tamaños en donde la temperatura oscila entre los 14 °C y 40 °C; la calidad de abono que producen contiene más oxígeno, fósforo, potasio y calcio, lo que es esencial para la restauración de suelos.

La Universidad de Cundinamarca, sede Fusagasugá, tiene como zona de impacto directo la región del Sumapaz, dada su ubicación y la procedencia de sus estudiantes. En dicha región se presentan problemáticas tales como el uso excesivo e inadecuado de productos químicos en el cuidado de sus cultivos; debido a esto surgió la necesidad de aportar ideas que permitieran dar solución a dicha situación, además de enriquecer el discurso teórico abordado por diferentes autores y proponer alternativas científicas y tecnológicas que fuesen replicables con el fin de optimizar el aprovechamiento de los recursos naturales, minimizando el impacto sobre el entorno y fomentando el bienestar económico y cultural de los pobladores de la región.

Muchas de las investigaciones realizadas, en cuanto a ciencias exactas se refiere, han sido enfocadas netamente a dar solución de algoritmos que contribuyen a la teoría de esta ciencia; son pocas aquellas que dirigen su mirada a solucionar problemas de la vida cotidiana, apoyadas en datos experimentales que van tomando forma gracias a las matemáticas; es por ello que se han catalogado como carentes de

¹Licenciada en Matemáticas, Universidad de Cundinamarca. Correo electrónico: stephany4.7@hotmail.com

aplicabilidad.

Dado lo anterior y con el firme propósito de realizar un proyecto que contribuyera al ámbito agrario, la presente investigación giró en torno al uso de la teoría de sistemas dinámicos, enfocada especialmente en el modelo de crecimiento logístico continuo, que permitió inferir el comportamiento poblacional de la lombriz roja californiana (*Eisenia foetida*), optimizando el abono orgánico (humus) producido por esta especie, el cual fue aplicado en un cultivo de habichuela. Dicho sustrato ayudó a contrarrestar el efecto del uso inadecuado y excesivo de abonos químicos altamente tóxicos.

La investigación se llevó a cabo en el municipio de Pandi, Cundinamarca, teniendo como base un terreno de 49 metros cuadrados, dos lechos y dos muestras de lombrices alimentadas con residuos orgánicos en condiciones semicontroladas, ya que el pH, la humedad y temperatura se mantuvieron dentro de los rangos óptimos para el pleno desarrollo de la especie en cuestión. La metodología de investigación se basó en la investigación cuantitativa de tipo experimental, ya que los datos analizados fueron cuantificables, y utilizó principios encontrados en el método científico como observación, sistematización, medición, experimentación y formulación de hipótesis. Pero, ¿cómo se mostró una aplicabilidad de las ciencias exactas en las agropecuarias, al implementar el modelo de crecimiento logístico continuo para predecir el comportamiento poblacional de la *Eisenia foetida* en condiciones semicontroladas, optimizando su producción de humus y evaluando su calidad en un cultivo de habichuela?

La teoría de los sistemas dinámicos es una herramienta que proporciona un modelo matemático para describir formalmente el comportamiento o la evolución de una población o algún tipo de crecimiento con determinadas propiedades. Por estas razones se eligió el modelo de crecimiento continuo para el presente estudio, ya que permitió conocer el comportamiento poblacional de la *Eisenia foetida*. Una vez conocido el comportamiento de la población se obtuvo la capacidad de alojamiento, la cual conllevó la optimización del humus producido por esta especie, de la que luego fue evaluada su efectividad en un cultivo de habichuela.

Se eligió dicha temática debido a que es la agricultura uno de los escenarios más importantes en el mundo, pero tristemente es ignorado y ha ido en creciente deterioro debido a malos manejos agrícolas; de igual forma se quiso mostrar que el campo de las ciencias exactas es tan amplio que es posible lograr interdisciplinariedad con cualquier área o ciencia, en este caso las agropecuarias.

ESTADO DEL ARTE

A continuación se muestran a grandes rasgos algunos de los antecedentes leídos para el desarrollo de la presente investigación.

Un modelo de simulación para estimar la dinámica de una población ideal de *Eisenia foetida* (lombriz de tierra, roja californiana).

Investigación realizada por Peña Ramos (2004) en la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, quien decide profundizar en temáticas como la dinámica de una población ideal de *Eisenia foetida* con la finalidad de obtener el título de ingeniero en agrobiología.

Peña Ramos aplica un modelo de simulación para estimar el comportamiento de la población ya nombrada teniendo como objetivo profundizar en temas como lo son fecundidad, natalidad, mortalidad, supervivencia y tasa intrínseca de crecimiento, cuyos valores idealizados se infirieron de tablas de textos como el *Manual de lombricultura* escrito por Carlo Ferruzzi (2001).

Inicia su investigación con una amplia gama de información sobre los anélidos estudiados, enfatizando en sus estadios de desarrollo cócon, juvenil, subadulto y adulto; también se enfoca en la parte histórica de los análisis de sistemas y un vasto marco referencial. Este autor no desarrolla ningún trabajo de campo o experimental, principalmente se dedica a la parte teórica y computacional ya que implementa para el desarrollo de su trabajo de grado un simulador llamado Stella 2.0 en el cual se asumen como parámetros constantes pH, humedad y temperatura.

Su modelo está diseñado por etapas; etapa 1: identificación de datos empíricos publicados por Ferruzzi, etapa 2: encontrar el modelo poblacional al final de cada 13 semanas, y etapa 3: diagrama de simulación. Se presentan gráficos explicativos por cada estadio sin tener en cuenta la capacidad de sostenimiento del ecosistema. Entre las conclusiones se resalta que el modelo presentó predicciones confiables en los estadios juvenil, subadulto y adulto al compararlos con los datos de Ferruzzi, pero aún así se requiere un mayor ajuste.

Este ha sido uno de los estudios más cercanos al propósito de la investigación, que trata de fundamentar el presente marco referencial.

Comparación de la prolificidad, producción y calidad del lombricompuesto de la lombriz iridiscente caqueteña (*Glossoscolex* Sp.) y roja californiana (*Eisenia foetida*) utilizando como sustrato ovinaza en el municipio de Armero Guayabal (Tolima).

Sánchez (2005) realiza una investigación para optar por el título de zootecnista en la Universidad de Cundinamarca, sede Fusagasugá, evaluando la prolificidad, producción y calidad de dos especies de anélidos tales como la lombriz roja californiana (*Eisenia foetida*) e iridiscente caqueteña (*Glossoscolex* sp.), estudio en el cual utiliza ovinaza como sustrato durante cuatro meses. El proceso se desarrolla en el municipio de Armero Guayabal en la granja de la Universidad del Tolima.

La autora da inicio a su investigación a través de un recorrido por la historia y las características de las lombrices, así como la descripción de las condiciones de vida necesarias para un pleno desarrollo de la población, resaltando la importancia de las especies nativas como lo es la iridiscente caqueteña. Además, profundiza en las características del humus y su uso en la agricultura colombiana.

Para evaluar la producción y calidad del lombricompuesto utiliza 4.000 individuos de cada especie (8.000 lombrices), que divide en 32 cajones para una densidad de 250 por cada uno de ellos. Durante el proceso se incorpora estiércol ovino como sustrato, el cual es sometido a dos condiciones ambientales: interior (bajo techo) y exterior (intemperie) y cuyo resultado final se basa en pesar la cantidad de sustrato compostado ignorando el número de anélidos.

Y para evaluar el crecimiento de la población, en otro lecho divide 32 recipientes de 100 cm³ y coloca 320 anélidos de cada una de las especies (640 lombrices), es decir, una densidad de 20 por cajón, siendo todos ellos adultos. De igual forma, los somete a las dos condiciones ambientales nombradas anteriormente. Realiza un único conteo de la población (adultas, juveniles y capullos) y con ayuda de métodos estadísticos llega a la conclusión de que la *Eisenia foetida* posee mayor capacidad reproductiva sin importar el ambiente.

Finalmente demuestra mediante un análisis del compuesto orgánico (estudio de laboratorio del humus obtenido) que es la lombriz roja californiana, la cual alimentada ya sea a la intemperie o bajo techo, composta abonos de mayor calidad y por lo tanto mayor capacidad para restaurar terrenos pobres de materia orgánica.

MARCO TEÓRICO

Lombriz roja californiana (*Eisenia foetida*)

Aunque es comúnmente conocida como lombriz roja californiana, su origen no reside en este lugar sino en Eurasia; adquiere ese nombre ya que fue en California en donde se le otorgó mayor importancia y se empezó a implementar su cuidado con fines lucrativos y en beneficio del medioambiente, aproximadamente a partir de los años 50.

Clasificación zoológica y algunos datos de interés

Reino	Animal
Tipo	Anélido
Clase	Oligoqueto
Orden	Opisthoro
Familia	Lombricidae
Género	Eisenia
Especie	Eisenia foetida

Tabla 1. Clasificación zoológica

Fuente: elaboración propia.

- Es uno de los seres más numerosos que pueblan el suelo.
- Puede sobrevivir hasta en una densidad de 50000 por metro cuadrado.
- Mide de 6 a 8 centímetros.
- A pesar de ser ciega es sensible a la luz: la exposición por más de 3 minutos le causa la muerte.
- Puede alcanzar un peso hasta de 1.4 gramos diariamente, como una cantidad de tierra igual a su peso.
- El 60 % de lo que consume se convierte en humus.
- Vive entre 4.5 y 6 años.
- Es inmune a las enfermedades y tiene alta capacidad de regeneración.

1. Reproducción y ciclo de vida

La *Eisenia foetida* madura sexualmente entre el segundo y tercer mes de vida, y es el clitelio el que indica esta madurez. Esta especie se reproduce principalmente cuando la temperatura está entre los 14 °C y 27 °C, siendo la adecuada 21 °C. Una vez son adultas se reproducen durante toda su vida. Luego de aparearse, entre los 7 y 10 días cada lombriz deposita una capsula también conocida como cocón (huevo) de color amarillento. Para hacerlos sube a la superficie ya que esta frecuenta los cincuenta primeros centímetros de profundidad cuando no se alimenta. Luego de 21 días aproximadamente, de cada cocón nacen en promedio de 2 a 4 lombrices; al nacer el grupo de pequeñas lombrices es de color blanco. A los 5 o 6 días adquieren una tonalidad rosa y a los 15 o 20 días parecen fenotípicamente a sus progenitores (Ferruzzi, 2001).

2. Hábitat

Los lechos pueden ser contruidos usando materiales del medio, verificando que su profundidad esté entre los 12 cm y 40 cm, siendo el ideal entre 15 cm y 20 cm. Este debe poseer un desnivel con la finalidad de obtener lixiviados. Es lo posible tratar que los lechos no estén expuestos a la luz directa del sol y a la lluvia, es decir se puede techar el lugar donde estén ubicados.

Es recomendable constantemente realizar pruebas de pH para verificar la acidez o alcalinidad de la cama. El rango ideal es 7-9 y puede medirse usando cintas indicadoras; de igual forma, se debe tener en cuenta la humedad, la cual se puede medir usando un termohigrómetro cuya medida óptima oscila entre el 60 % y 85 %, o con la conocida prueba de puño. En cuanto a la temperatura se refiere, la ideal varía entre los 14 °C y 27 °C, también puede medirse usando un termohigrómetro.

3. Humus

El humus de color café no sufre procesos de fermentación ni putrefacción. La recolección de este sustrato no posee una fecha específica o estándar aunque en algunos textos se dice que entre los 3 y 6 meses, pero en realidad esto depende de las condiciones en las que se encuentren los anélidos, y por lo general puede llevar hasta más de un año este proceso. Algunas de las señales que nos pueden indicar cuándo hay que recoger el humus de lombriz son:

- Cuando la comida ha desaparecido, esto sucede cuando hay una gran cantidad de lombrices.
- Cuando se evidencia más humus que comida, se observa en el lecho un sustrato fino y sin olor.
- Cuando no hay más espacio para poner comida (Rodríguez, 2017).

En cuanto al método para separar el sustrato de los anélidos, es muy sencillo:

Solo hay que dejarlas uno o dos días sin alimento (no agregar alimento), y después poner alimento nuevo a un lado del lugar donde se encuentran. Las lombrices en busca de alimento irán a su nuevo lugar rápidamente (el 50 % de las lombrices llegará en solo unas horas), pero quedarán en el lombricompuesto los capullos y las pequeñas lombrices. Para que lleguen a trasladarse las pequeñas lombrices y las que nacerán después es necesario esperar al menos 30 días (Mendoza Gómez, 2008).

SISTEMAS DINÁMICOS

Sistema discreto

En un sistema dinámico discreto el tiempo fluye en pasos 1, 2, 3,..., n. Ejemplo: los intereses de una cuenta bancaria.

Sistema continuo

En un sistema dinámico continuo el tiempo fluye continuamente desde $-\infty$ a $+\infty$ y pasa por todo punto de este intervalo. Ejemplo: el lanzamiento de una pelota.

Discreto	Continuo
Valor observable	El valor puede no ser observable
Puede ser medida con exactitud	Nunca puede ser medida con exactitud
Instantes espaciados	Cualquier instante

Tabla 2. Variable discreta y continua
Fuente: elaboración propia.

Modelo logístico en tiempo discreto

El modelo de tiempo discreto más popular para una sola especie es la ecuación logística discreta:

$$x(t + 1) = x(t) \left[1 + r - \frac{x(t)}{k} \right]$$

En la cual r es el parámetro de crecimiento y k la capacidad de alojamiento; ambas son constantes positivas.

La ecuación logística discreta tiene la característica biológica poco realista de que a menos de que se restrinja el tamaño de la población inicial y el parámetro de crecimiento, pueden aparecer tamaños de población negativos. Un ejemplo de ecuación que tiene las mismas propiedades que la ecuación logística, pero que no admite poblaciones negativas es la Curva de Ricker (Colin W., 1990):

$$x(t+1) = x(t)e^{r(1-\frac{x(t)}{k})}$$

Sea f una función que describe el comportamiento de un sistema y sea x^* un punto crítico del sistema:

- si $|f'(x^*)| < 1$ entonces x^* es un atractor local.
- si $|f'(x^*)| > 1$ entonces x^* es un repulsor local.

Modelo logístico en tiempo continuo

Esta es la famosa ecuación logística, primero propuesta como modelo de población por P. F. Verhulst en 1838. La constante r asumida como positiva es llamada la tasa intrínseca de crecimiento. La constante positiva k usualmente referida como la capacidad de carga ambiental o nivel de saturación (Ruiz Álvarez, 2017).

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) \quad (1)$$

con $x(0) = x_0$

Puntos de equilibrio

Consiste en encontrar todas las soluciones constantes de la ecuación (1), esto es, aquellas cuya derivada es cero.

$$rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) = 0$$

Existen dos puntos que cumplen con esta igualdad; el primero es $x(t) = 0$ y $x(t) = k$

Veamos:

Cuando $x(t) = 0$

$$r_0 - \frac{\sigma}{1 - \frac{\sigma}{r_0}} = 0 = 0$$

Ahora cuando $x(t) = k$

$$\begin{aligned}rk\left(1-\frac{k}{k}\right) &= 0 \\rk(1-1) &= 0 \\rk(0) &= 0\end{aligned}$$

0 = 0

Atractores y repulsores

Sea *f* una función que describe el comportamiento de un sistema y sea *x* un punto crítico del sistema:

- si *f*'(*x*) < 0 entonces *x* es un atractor local.
- si *f*'(*x*) > 0 entonces *x* es un repulsor local.

Sacando la segunda derivada de (1):

$$= r\left(1-\frac{x(t)}{k}\right) + rx(t)\left(-\frac{1}{k}\right)$$

Así, evaluando los puntos de equilibrio *x*(*t*) = 0 y *x*(*t*) = *k* tenemos

x = 0

$$r\left(1-\frac{0}{k}\right) + r(0)\left(-\frac{1}{k}\right) = r$$

Como *r* > 0, según el teorema *x* es un repulsor local.

ahora *x* = *k*

$$r = 1 - \frac{\sum_k}{rk} = \frac{-1}{k} = -r$$

Como $r < 0$, según el teorema x es un atractor local.

DISEÑO METODOLÓGICO

Ubicación

Figura 1. Trayecto Fusagasugá-San Bernardo. Mapa

Fuente: Goole Maps (2017).

El presente proyecto se desarrolló en la frontera con el municipio de San Bernardo, Cundinamarca, en la vereda Buenos Aires Bajo (Pandi). Se encuentra ubicada a 99 km de la capital de la República, se caracteriza por ser despensa agrícola del Sumapaz, debido a la fertilidad de las tierras y su variedad de climas. La temperatura oscila entre 21 °C y 27 °C y en este entorno existe un buen aprovechamiento del terreno: es tierra fértil, la cual posee una buena cubierta vegetal rodeada de flora y fauna variadas.

Población

Para la realización del presente trabajo se contó con una población inicial de 200 lombrices de la especie roja californiana (*Eisenia foetida*), todos ellas adultas.

Técnicas y métodos para la recolección de datos

Para la recolección de los datos con respecto al lombricultivo se hizo necesario llevar registros escritos y fotográficos de medición del pH, temperatura, humedad y crecimiento poblacional. Se realizaron conteos a la población y observaciones de su comportamiento.

En cuanto al cultivo de habichuela se llevaron de igual forma registros escritos y fotográficos de toma de altura, porcentaje de germinación, cosecha recolectada y la realización de un diseño experimental basado en la efectividad de fertilizantes de carácter químico y orgánico.

Figura 2. Cuento de población. Fotografía

Fuente: López, E. (2017).

Métodos de análisis

Para el análisis de la información fue necesario utilizar sistemas dinámicos basados en el modelo logístico continuo, métodos estadísticos tales como los análisis de dispersión, diseño experimental de bloques completamente al azar con tres tratamientos y tres repeticiones.

Figura 3. Diseño experimental. Ilustración

Fuente: López, E. (2017).

Tratamientos

- T0:** siembra directa (testigo) sin aplicación alguna de fertilizante.
- T1:** aplicación del humus de la lombriz roja californiana como fertilizante.
- T2:** aplicación de un fertilizante químico.

Infraestructura y equipos

Para la realización del proyecto se contó con herramientas para labrar el campo tales como azadón, pala, hoyadora, machete y maquina fumigadora; 200 lombrices de la especie roja californiana, terreno de 49 m², termohigrómetro que permite medir la temperatura y humedad, cintas indicadoras de pH y hortalizas para la elaboración de extractos como ají, ajo y ajeno.

Figura 4.
Herramientas para
labrar el campo.
Fotografía.

Fuente: López, E. (2017).

Figura 5. Terreno utilizado.

Fotografía.

Fuente: López, E. (2017).

Figura 6. Población empleada.

Fotografía.

Fuente: López, E. (2017).

Figura 7. Termohigrómetro.

Fotografía.

Fuente: López, E. (2017).

Figura 8. Cintas indicadoras de pH. Fotografía.

Fuente: López, E. (2017).

Figura 9. Elaboración de extractos. Fotografía.

Fuente: López, E. (2017).

Figura 10. Muestras y lechos. Fotografía

Fuente: López, E. (2017).

Método y técnica de investigación

La metodología se basó en una investigación cuantitativa ya que se analiza y predice el comportamiento de la población y porque los datos analizados son cuantificables; es del tipo experimental ya que se estuvo inmerso en el proceso, creando las condiciones óptimas rigurosamente controladas para la especie en estudio; así mismo, se analizó el impacto que tienen los abonos orgánicos producidos por la especie en cuestión en uno de los cultivos más representativos de la región.

Metodología

Como primera medida se sembró un cultivo de habichuela al cual no se le realizó aplicación alguna de fungicidas, pero sí se llevó un debido manejo de este; se realizaron labores como: tutorado, colgadas, desyerbadas, toma de altura, porcentaje de germinación, riego, aporcar, observación de plagas y enfermedades y recolección de cosecha.

Como segunda medida se implementó un lombricultivo con el fin de aprovechar el abono producido por dicho anélido. Se tomó como base dos camas de lombrices y dos muestras poblacionales alimentadas con residuos orgánicos (desperdicios), para realizar análisis a partir de sistemas dinámicos. En cuanto a la temperatura, humedad relativa y la acidez del sustrato (pH), se mantuvieron dentro de los rangos ideales para el pleno desarrollo del lombricultivo. Debido a esto, se toma como única variable la población.

Se mantuvo una alimentación estable y aparte de ello se realizaron conteos de la población cada tres meses para las camas y cada mes para las muestras.

Alternamente con el desarrollo del criadero de *Eisenia foetida* se implementó un segundo cultivo de habichuela, una vez finalizó el anterior; para esto se realizó un diseño experimental de bloques completos al azar (DBCA) con tres tratamientos y tres repeticiones por tratamiento. Además se llevó un debido control de plagas y enfermedades con extractos naturales. Se fertilizó el terreno con el humus producido por dichos anélidos y un fertilizante químico con el fin de conocer el efecto de estos sobre las plantas estudiadas y sus ventajas y desventajas.

DESARROLLO DEL PROYECTO

Obsérvese los datos arrojados de los conteos de la población:

Cama o lecho	Conteo	Tiempo	Dato anterior	Dato arrojado
Cama 1	Cuenta 1	3 meses	200 lombrices adultas.	219 lombrices adultas y 1874 jóvenes y bebés.
Cama 1	Cuenta 2	3 meses	142 lombrices adultas y 672 jóvenes y bebés.	310 lombrices adultas y 5671 jóvenes y bebés.
Cama 2	Cuenta 1	3 meses	77 lombrices adultas y 1202 jóvenes y bebés.	329 lombrices adultas y 1090 jóvenes y bebés.
Muestra 1	Cuenta 1	1 mes	7 lombrices adultas.	7lombrices adultas y 11 jóvenes y bebés.
Muestra 1	Cuenta 2	1 meses	7lombrices adultas y 11 jóvenes y bebés.	15 lombrices adultas y 171 jóvenes y bebés.
Muestra 2	Cuenta 1	1 mes	15 lombrices adultas.	14 lombrices adultas y 19 jóvenes y bebés.
Muestra 2	Cuenta 2	1 mes	14 lombrices adultas y 19 jóvenes y bebés.	17 lombrices adultas y 249 jóvenes y bebés.

Tabla 3. Conteos de población (*Eisenia foetida*)

Fuente: elaboración propia.

ANÁLISIS POBLACIONAL Y ECUACIONES

Se elaboraron cuadros en Excel, como el siguiente ejemplo, con diferentes poblaciones iniciales (7, 15 y 200 individuos adultos) de 0 a 51 semanas.

Tiempo en semanas	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Huevos por semana	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total lombrices adultas	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Nuevas Lombrices Jóvenes y bebes	0	21	21	21	21	21	21	21	21
Total Lombrices Jóvenes y bebes	0	21	42	63	84	105	126	147	168
Número total de lombrices	7	28	49	70	91	112	133	154	175
NOTA		Eclosionan huevos de la semana 1	Eclosionan huevos de la semana 2	Eclosionan huevos de la semana 3	Eclosionan huevos de la semana 4	Eclosionan huevos de la semana 5	Eclosionan huevos de la semana 6	Eclosionan huevos de la semana 7	Eclosionan huevos de la semana 8

Tabla 4. Crecimiento poblacional, 7 lombrices (3-19 semanas)

Tiempo en semanas	12	13	14	15	16	17	18	19
Huevos por semana	7	7	7	7	7	28	49	70
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	21	21	21	21
Total lombrices adultas	7	7	7	7	28	49	70	91
Nuevas Lombrices Jóvenes y bebes	21	21	21	21	21	21	21	21
Total Lombrices Jóvenes y bebes	189	210	231	252	252	252	252	252
Número total de lombrices	196	217	238	259	280	301	322	343
NOTA	Eclosionan huevos de la semana 9	Eclosionan huevos de la semana 10	Eclosionan huevos de la semana 11	Eclosionan huevos de la semana 12	crecen las nacidas en la semana 4 y Eclosionan huevos de la semana	crecen las nacidas en la semana 5 y Eclosionan huevos de la semana	crecen las nacidas en la semana 6 y Eclosionan huevos de la semana	crecen las nacidas en la semana 7 y Eclosionan huevos de la semana

Fuente: López, E. (2017).

Realizando el respectivo análisis de dispersión de cada una de las poblaciones tenemos los siguientes comportamientos con sus respectivas ecuaciones:

Figura 13. 7 lombrices. 0-51 semanas

Fuente: elaboración propia.

De la figura se puede inferir que al tomar todos los datos de 3 a 51 semanas y analizarlos con gráficos de dispersión en Excel, muestra que el comportamiento de la población se asemeja a una ecuación exponencial dada por $y = 13,392e^{0,189x}$ con

$R^2 = 0.9839$, lo cual reitera que es un buen ajuste.

Figura 14. 15 lombrices. 0-51 semanas

Fuente: elaboración propia.

En cuanto a la figura anterior, se puede decir que al tomar todos los datos de 3 a 51 semanas y analizarlos con gráficos de dispersión en Excel, estos muestran que el comportamiento de la población se

asemeja a una ecuación exponencial dada por $y = 28,707e^{0.189x}$ con $R^2 = 0.9838$, lo cual reitera que es un buen ajuste.

Figura 15. 200 lombrices. 0-51 semanas

Fuente: elaboración propia.

De la figura anterior se puede inferir que al tomar todos los datos de 3 a 51 semanas y analizarlos con gráficos de dispersión en Excel, indica que el comportamiento de la población se asemeja a una ecuación exponencial dada por $y = 382.72e^{0.189x}$ con

$R^2 = 0.9838$, lo cual reitera que es un buen ajuste.

MODELO MATEMÁTICO

En esta sección se expone el modelo de crecimiento logístico continuo, el cual fue implementado basado en los análisis de datos de las tablas y figuras anteriores. Se pretende hallar una ecuación que permita inferir el crecimiento poblacional de la lombriz roja californiana con diferente cantidad de anélidos iniciales y distinta capacidad de alojamiento sin variaciones en el pH, humedad y temperatura, es decir, en condiciones semicontroladas.

De los análisis anteriores se tienen las ecuaciones:

7 lombrices (0-51 semanas)

$$x(t) = 13.392e^{0.189t}$$

15 lombrices (0-51 semanas)

$$x(t) = 28.707e^{0.189t}$$

200 lombrices (0-51 semanas)

$$x(t) = 382.72e^{0.189t}$$

Según estas ecuaciones, se puede afirmar que el crecimiento poblacional de la *Eisenia foetida* responde a una función exponencial de la forma $x(t) = x_0 e^{rt}$ en la cual

x_0 es la población inicial.

r es el parámetro real.

t es la variable (tiempo en semanas).

Este comportamiento recibe el nombre de crecimiento exponencial continuo.

$x_0 e^{rt}$ es solución de la ecuación diferencial $x'(t) = rx(t)$

con $r = 0.189$ y con diferentes condiciones iniciales

$$x(0) = 13.392$$

$$x(0) = 28.707$$

$$x(0) = 382.72$$

Dado que en la ecuación obtenida el r es mayor que cero, implica que nuestra población crecerá indefinidamente, y la tasa de crecimiento per cápita será siempre la misma sin importar el tamaño de la población.

Pero en nuestra vida real esto no sucede: las poblaciones pueden comportarse por un tiempo de manera exponencial, mas empiezan a verse limitadas al haber limitaciones en los recursos, pues no existen recursos ilimitados.

Modelo de crecimiento logístico

La tasa de crecimiento per cápita (por individuo) se reduce cada vez más cuando la población se acerca a su capacidad de sostenibilidad según los recursos, también conocida como capacidad de carga (k).

Este modelo es representado por la ecuación:

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right)$$

Con $x(0) = x_0$

En la cual $x(0) = x_0$ y $0 < x(t) < k$

Cuya solución está dada por:

$$x(t) = \frac{x_0 k}{e^{-rt}(k - x_0) + x_0}$$

Capacidad de carga

Según los manuales de lombricultura expuestos en el marco teórico del presente proyecto, se sabe que la *Eisenia foetida* es una especie que alcanza los 50 000 individuos por m^2 .

Conociendo la capacidad en cm^2 de cada lecho, al usar la regla de tres podemos obtener el número de individuos correspondientes a la capacidad de alojamiento de cada uno de estos.

$616 \text{ cm}^2 \longrightarrow$ Muestra 1 (7 L)

así, capacidad de carga = 3080 individuos

$576 \text{ cm}^2 \longrightarrow$ Muestra 2 (15 L)

así, capacidad de carga = 2880 individuos

$13.500 \text{ cm}^2 \longrightarrow$ Cama 1 (200 L)

así, capacidad de carga = 67500 individuos

Puntos de equilibrio (x)

Recordemos que hallar los puntos de equilibrio es encontrar los valores para los cuales la ecuación logística sea igual a cero. Como se mencionó anteriormente, estos puntos son 0 y k ; así para las diferentes muestras y lechos tenemos:

Muestra 1 (7 L): 0 y 3080

Muestra 2 (15 L): 0 y 2880

Cama 1 (200 L): 0 y 67500

Atractores y repulsores

Teniendo en cuenta el teorema expuesto en el marco teórico para el modelo logístico continuo, que estudia los puntos de equilibrio con la finalidad de saber si son atractores o repulsores, inferimos que para $x = 0$ es un repulsor y para $x = k$ es un atractor local, así:

Muestra 1 (7 L): 0 repulsor y 3080 atractor.

Muestra 2 (15 L): 0 repulsor y 2880 atractor.

Cama 1 (200 L): 0 repulsor y 67500 atractor.

Función logística continua

$$x(t) = \frac{x_0 k}{e^{-rt}(k - x_0) + x_0}$$

Esta ecuación es útil para todas las muestras y los lechos implementados, pues al estar en su forma general permite variar la cantidad de individuos e iniciales, al igual que su capacidad de carga, por lo cual no es necesario un modelo para cada caso.

De esta manera, como el experimento realizado no posee recursos ni espacios infinitos para que se comporte únicamente de forma exponencial, y como ya se conocen los valores de la capacidad de carga de cada muestra, al aplicar la función logística a este experimento obtenemos que:

Tomando los valores r y x_0 de las ecuaciones inferidas de los análisis de dispersión y remplazándolos en la función logística, se tiene:

Para 7 lombrices:

$$r = 0.189$$

$$x_0 = 13.392$$

$$k = 3.080$$

$$x(t) = \frac{(13.392)(3080)}{e^{-0.189t}(3080 - 13.392) + 13.392}$$

$$x(t) = \frac{(41247.36)}{e^{-0.189t}(3066.608) + 13.392}$$

Figura 16. Función logística 7L

Fuente: López, E. (2017).

En la figura podemos observar el crecimiento poblacional para una cantidad inicial de 7 anélidos adultos, cuyos puntos de equilibrio son 0 y 3080. Así, 0 es un repulsor local y 3080, un atractor local.

Para 15 lombrices:

$$r = 0.189$$

$$x_0 = 28.707$$

$$k = 2880$$

$$x(t) = \frac{(28.707)(2880)}{e^{-0.189t}(2880 - 28.707) + 28.707}$$

$$x(t) = \frac{(82676.16)}{e^{-0.189t}(2251.293) + 28.707}$$

Figura 17. Función logística 15 L

Fuente: López, E. (2017).

En la figura podemos observar el crecimiento poblacional para una cantidad inicial de 15 anélidos adultos, cuyos puntos de equilibrio son 0 y 2880. Entonces, 0 es un repulsor local y 2880, un atractor local.

Para 200 lombrices:

$$r = 0.189$$

$$x_0 = 382.72$$

$$k = 67500$$

$$x(t) = \frac{(382.72)(67500)}{e^{-0.189t}(67500 - 382.72) + 382.72}$$
$$x(t) = \frac{(25833.600)}{e^{-0.189t}(67117.28) + 382.72}$$

Figura 18. Función logística 200 L

Fuente: López, E. (2017).

En la figura podemos observar el crecimiento poblacional para una cantidad inicial de 200 anélidos adultos, cuyos puntos de equilibrio son 0 y 67500. En este sentido, 0 es un repulsor local y 67500, un atractor local.

Relación modelo de crecimiento logístico continuo - modelo de crecimiento exponencial

7 anélidos

Figura 19. Relación 7 individuos

Fuente: López, E. (2017).

En la figura anterior se puede observar que los dos modelos tienen el mismo comportamiento poblacional aproximadamente hasta las 16 semanas, de allí en adelante el modelo de crecimiento exponencial tiende al infinito, mientras el modelo logístico continuo, a su capacidad de alojamiento (3080), siendo este último el que más se acerca a los conteos realizados para dicha muestra (7 anélidos iniciales).

15 anélidos

Figura 20. Relación 15 individuos

Fuente: López, E. (2017).

En la figura anterior se puede notar que los dos modelos tienen el mismo comportamiento poblacional aproximadamente hasta las 18 semanas, de allí en adelante el modelo de crecimiento exponencial tiende al infinito, mientras el modelo logístico continuo, a su capacidad de alojamiento (2880), siendo este último el que más se acerca a los conteos realizados para dicha muestra (15 anélidos iniciales).

200 anélidos

Figura 21. Relación 200 individuos

Fuente: López, E. (2017).

En la figura anterior se puede observar que los dos modelos tienen el mismo comportamiento poblacional aproximadamente hasta las 15 semanas, de allí en adelante el modelo de crecimiento exponencial tiende al infinito, mientras el modelo logístico continuo, a su capacidad de alojamiento (67500), siendo este último el que más se acerca a los conteos realizados para dicho lecho (200 anélidos iniciales).

OPTIMIZACIÓN DEL HUMUS

Dado que la capacidad de carga representa el tamaño máximo de población que puede soportar el ambiente en óptimas condiciones, es precisamente al llegar a este valor cuando se producirá la mayor cantidad de humus, pues son todas las posibles lombrices que soportan el lecho, las cuales estarán trabajando en la producción de este abono. Según las figuras, esta capacidad se colma al pasar el año (52 semanas).

Como resultado de las cosechas se obtuvieron los siguientes datos:

Tratamiento	Repetición	Cantidad
T_0	R_1	0.8 kg
T_0	R_2	1.32 kg
T_0	R_3	0.54 kg
T_1	R_1	4.02 kg
T_1	R_2	2.96 kg
T_1	R_3	6.12 kg
T_2	R_1	0.28 kg
T_2	R_2	1 kg
T_2	R_3	3.66 kg

Tabla 5. Producción tratamiento-repetición

Fuente: elaboración propia.

Según la tabla anterior, para T_0 se tiene un total de 2.66 kg de habichuela, para T_1 13.1 kg y para T_2 4.94 kg, lo que nos lleva a concluir que el tratamiento con mayor éxito fue T_1 (humus), esto demuestra que la calidad del humus producido por los anélidos es muy buena.

La cantidad total de habichuela de este segundo siembro fue de 20.7 kg que en comparación con el primero (12.85 kg) aumentó 7.85 kg gracias a los abonos utilizados.

CONCLUSIONES

Se halló un modelo matemático que describe el crecimiento poblacional de la lombriz roja californiana, de igual forma se garantizaron las condiciones de vida óptimas para esta especie, y el diseño experimental permitió inferir la calidad del humus, a la vez diferenciando los efectos de fertilizantes de carácter químico y orgánico.

El modelo se ajusta a la dinámica de la población estudiada aunque no con el 100 % de probabilidad, pues, como es de nuestro conocimiento, el estudio de seres vivos no es una tarea fácil porque su crecimiento poblacional no sigue reglas o patrones de comportamiento que nos permitan saber a largo plazo el número exacto de individuos.

También permite optimizar la cantidad de humus, ya que justamente cuando se habla de una capacidad de carga nos referimos al mayor número de individuos que puede sostener un ecosistema en óptimas condiciones de vida; de esta forma sabemos que es en este punto donde se produce la mayor cantidad de abono, con las mejores condiciones para los productores.

Según los resultados del diseño experimental, el humus beneficia en alto grado al aumento de producción y vigor de un cultivo de habichuela.

Se logró mostrar la aplicabilidad de las ciencias exactas en las agropecuarias, y así se propuso una solución amable con el medioambiente a la problemática de la aplicación de insumos de carácter tóxico.

En la construcción del marco de antecedentes se hallaron varios estudios realizados sobre esta misma especie. En algunos de ellos se encontró bastante relación con el proceso realizado en este proyecto y de hecho se llegan a algunas conclusiones iguales pero mediante caminos diferentes.

RECOMENDACIONES

Se recomienda realizar el mismo experimento pero alimentando poblaciones de anélidos con diferentes tipos de sustrato, observando si el crecimiento poblacional presenta cambios representativos.

De igual forma, se aconseja pesar el sustrato que se suministra ya que de esta manera es más sencillo hallar la cantidad de humus producido por los anélidos.

Para este estudio es esencial utilizar lechos pequeños, pues a la hora de realizar el conteo facilita el trabajo y se ahorra tiempo.

Se aconseja el uso de herramientas computacionales que permitan verificar los resultados encontrados y que contribuyan a la solución del sistema.

Asimismo, se destaca la importancia de los gráficos de dispersión, pues mediante ellos es posible observar el comportamiento de los datos y nos lleva a elegir el mejor modelo que se ajusta a su comportamiento.

REFERENCIAS

- Abranson, G. (2014). Dinámica de poblaciones. En G. Abranson, *La matemática de los sistemas biológicos* (pp. 7-28). Universidad Nacional de Cuyo. Centro Atómico Bariloche, Instituto Balseiro y CONICET. Argentina.
- Anáñis, D. D. (s. f.). Modelos discretos en biología. En U. D. Sevilla, *Matemáticas aplicadas a la biología* (p. 47). España: Universidad de Sevilla.
- Cano Cancela, A. (2011). *Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional* (Tesis de maestría). Madrid, España: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). <https://bit.ly/2RcChxV>
- Colin, W. C. (1990). *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources*. Estados Unidos: Wiley & Sons.
- Ferruzzi, C. (2001). *Manual de lombricultura*. Madrid, España: Mundiprensa.
- Gómez Aiza, R. y Guruprasad, S. (2014). Modelos dinámicos de poblaciones simples y de sistemas depredador-presa. *Miscelánea Matemática*, (58), 77-110. <http://www.miscelaneamatematica.org/Misc58/5806.pdf>
- Henríquez, C. y Durán, L. (2009). *Crecimiento y reproducción de la lombriz roja (Eisenia foetida) en cinco sustratos orgánicos* (Tesis de pregrado). Costa Rica: Universidad de Costa Rica.
- Manso Martos, I. (2012). *Simulación numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a trozos* (Tesis de pregrado). Sevilla, España: Universidad de Sevilla, Escuela Técnica Superior de Ingeniería.
- Martínez Bravo, C., Maza Angulo, L., Arroyo González, Y., Meza Martínez, M., Castro Carmona, J. y Vergara Garay, O. (2017). *Evaluación reproductiva de la lombriz roja californiana Eisenia foetida alimentada con diferentes sustratos en el trópico bajo colombiano* (Tesis de maestría). Colombia: Universidad de Córdoba.
- Mejía Araya, P. (s. f.). *Manual de lombricultura*. Camino Villarrica Loncoche. Chile: Agroflor lombricultura.
- Mendoza Gómez, L. (2008). *Manual de lombricultura*. Chiapas, México: Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos, Secretaría de Educación Pública.
- Núñez Díaz, A. M. (2017). *Monitoreo de la dinámica poblacional de la lombriz de tierra roja californiana (Eisenia foetida L) en cuatro sustratos orgánicos* (Tesis de pregrado). Coahuila, México: Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro.
- Peña Ramos, F. M. (2004). *Un modelo de simulación para estimar la dinámica de una población ideal de Eisenia foetida (lombriz de tierra, roja californiana)* (Tesis de pregrado). Coahuila, México: Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro.
- Rodríguez, R. (28 de octubre de 2017). *Lombricultura casera*. <http://lombricultura-casera.com/cada-cuando-hay-que-recoger-el-humus-de-lombriz/>
- Ruiz Álvarez, J. (25 de octubre de 2017). *Modelos biológicos*. <http://www3.uah.es/juanruiz/files/matbio/transparencias/clase18.pdf>

Sánchez Barbosa, D. M. (2005). *Comparación de la prolificidad, producción y calidad del lombricomposto de la lombriz iridiscente caqueteña (Glossoscolex Sp.) y roja californiana (Eisenia foetida) utilizando como sustrato ovinaza en el municipio de Armero Guayabal* (Tesis de pregrado). Fusagasugá, Colombia: Universidad de Cundinamarca.

Scheinerman, E. (1996). *Invitation to dynamical systems*. Department of Mathematical Sciences The Johns Hopkins University.

Vázquez Pérez, R. (26 de octubre de 2017). *Introducción a la optimización*.
http://www.rvazquez.org/Misitio/Materialia2_files/objetodeestudio1ia2.pdf

UDEC
UNIVERSIDAD DE
CUNDINAMARCA

www.ucundinamarca.edu.co

Universidad
de cundinamarca

ucundinamarcaoficial

@ucundinamarca

UCUNDINAMARCATV

Vigilada MinEducación