Matemáticas
Financieras Básicas Aplicadas

Odair Triana Calderón

Editorial UCundinamarca | UdeC Universidad de Cundinamarca

Triana Calderón, O.

Matemáticas Financieras Básicas Aplicadas.
Fusagasugá: Editorial de la Universidad de Cundinamarca. 2021.
p. 284
ISBN: 978-958-5195-00-4

Primera Edición, 2021

Facultad de Ciencias, Administrativas, Económicas
y Contables.
Programa de Administración de Empresas

Autor:
Odair Triana Calderón

Editorial
Dirección editorial: Dr. Jaime Augusto Porras Jiménez
Editor: Dr. Jaime Augusto Porras Jiménez
Corrección de estilo: Yesid Castiblanco Barreto
Diseño editorial: Zulma Milena Useche Vargas
Registro digital: Ana Milena Bejarano Torres

Dirección de Investigación
Universidad de Cundinamarca
www.ucundinamarca.edu.co
editorial@ucundinamarca.edu.co
Diagonal 18 No. 20 - 29
Fusagasugá - Cundinamarca

ISBN: 978-958-5195-00-4

El presente libro es producto derivado de la labor investigativa del autor como docente TCO de la Universidad de Cundinamarca y miembro del grupo de Investigación ORGANICEMOS.

En cuanto a la información consignada en el presente documento, fue revisada y evaluada por pares evaluadores externos doble ciego con el fin de garantizar una valoración crítica e imparcial sobre la calidad de los manuscritos; por lo cual los autores fueron informados sobre las recomendaciones dadas por los pares para realizar los respectivos cambios y/o ajustes del caso, para finalmente ser aprobados por el Comité Editorial de la Universidad de Cundinamarca.

Acerca del autor

ODAIR TRIANA CALDERÓN. Hijo de campesinos cundinamarqueses, nacido en el municipio de San Juan de Rioseco (Cundinamarca), en el cual se formó como persona, con el anhelo de servir a Dios y la comunidad; como estudiante de colegio enseñaba matemáticas a los chicos sanjuaneros, en ocasiones daba clases tan solo por una gaseosa y algo de comer o, sencillamente, por un simple "gracias". Su propósito era convertirse algún día en profesor de matemáticas y regresar a su pueblo a enseñar en su colegio.

Gracias al esfuerzo inagotable de sus padres y algunos familiares, en especial su tía Chechi, quien reside en Fusagasugá, la cual fue vital con su apoyo para salir adelante. Logró ingresar a estudiar Administración de Empresas en la Universidad de Cundinamarca. Luego se vinculó a tal sector en la misma institución donde estudiaba y ocupó cargos como monitor, auxiliar, técnico y, por último, coordinador de recursos físicos. Finalmente, se dedicó a retomar su deseo y proyecto de vida como era el enseñar; para tal fin, y el con apoyo de su alma mater, ingresó a especializarse en Gerencia para el Desarrollo Organizacional. Posteriormente, en Bogotá laboró en varias instituciones universitarias, pero al poco tiempo regresó a su Universidad a laborar como docente en el programa de Administración de Empresas, en Facatativá, donde continuó su formación posgradual como especialista en Gerencia Financiera, magíster en Diseño, Gestión y Dirección de Proyectos y, en la actualidad como maestrante en Finanzas.

Hoy día, se desempeña como docente en la Universidad de Cundinamarca y catedrático de la Escuela Superior de Administración Pública (Esap). Como fruto de su labor y vocación nació la idea de escribir MATEMÁTICAS FINANCIERAS APLICADAS, resultado de su experiencia en la enseñanza y el deseo de hacer que sus estudiantes comprendan de una forma sencilla los números y su aplicación en las finanzas.

Contenido

INTRODUCCIÓN

Las ciencias exactas a lo largo de la historia han buscado de una u otra forma dar respuesta a los interrogantes comunes del ser humano y el caso de las finanzas no es ajeno, por ello, las matemáticas financieras tienen el propósito de dar solución a los casos en los cuales de una u otra forma interviene el dinero como medio de pago en una transacción económica o, simplemente, busca calcular el lucro que obtiene el dueño de este o cederlo a un tercero, que para nosotros es el denominado interés. (Meza, 2017)

Este texto es producto de una investigación formal de tipo personal, el cual pretende ayudar a dar soluciones a postulados o problemas financieros básicos, tales como inversión y financiación, para lo cual se desarrollan los conceptos del valor del dinero en el tiempo, variables, fórmulas, procedimientos, diagramas y respuestas a temas como interés simple, interés compuesto, tasas de interés, anualidades, gradientes, sistemas de amortización y evaluación de inversiones.

En el capítulo de interés simple se encontrará cómo desde una tabla se estructura una fórmula que permite determinar el monto, los intereses, el capital invertido y el tiempo que pudo estar invertido o financiado, y finalmente su aplicación en el sistema financiero.

Por su parte, el interés compuesto o comúnmente denominado valor futuro muestra un comportamiento en términos de variables como el interés simple; sin embargo, este contiene un sistema diferente en la composición de los intereses ya que se habla de capitalización de estos, es decir, que pasan a hacer parte del capital principal. Este sistema es fundamental para las tasas de interés, anualidades y demás. (Guinot Cerver et al., 2013).

Las tasas de interés hacen parte de este libro, dado que permiten establecer en términos de valores relativos, el nivel de rentabilidad de un capital; así mismo, definen indicadores de crecimiento o descuento en el precio de los artículos o simplemente de un capital, en los que se abarcan temas como tasas de interés efectivo, nominal y periódico, y un indicador económico como la inflación, que determina el crecimiento o la disminución de precios de una economía (Samuelson, 2010).

En cuanto a los pagos variables y uniformes, los capítulos de anualidades y gradientes permitirán dar respuesta a inversiones y financiaciones de dinero, para lo cual las fórmulas y aplicaciones en Excel serán de gran ayuda en el desarrollo temático con aplicaciones a sistemas de crédito tradicional.

Los sistemas de amortización como resultado del comportamiento de los asuntos ya abordados, permitirán al lector identificar el comportamiento que tiene una inversión o financiación en la generación de intereses y el comportamiento de cada pago o cuota, en el caso de los préstamos (Organizaciones et al., 2012).

Finalmente, el capítulo de evaluación de inversiones abarca tres tópicos de importancia, como lo son: la Tasa de Descuento (TD), el Valor Presente Neto (VPN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR), que ayudarán al inversionista a evaluar su decisión de invertir o no, teniendo en cuenta los indicadores. (Padilla, 2016)

GLOSARIO

Para una mejor compresión del documento en términos financieros es ideal tener en cuenta los siguientes términos.

Ahorro: Desde el punto de vista de la economía se define como aquella cantidad del dinero que no se consume y que está disponible para ser colocada en pro de una actividad económica (Samuelson, 2010).

Amortización: Una forma de acabar o, como traduce su original, de matar una deuda. (Díaz & Aguilera, 2008)

Anualidad: Nombre que recibe la formación de un pago, la característica de estos ingresos o egresos es su uniformidad.

Diagrama de Flujo: Gráfica que refleja a través del tiempo, el comportamiento del dinero, donde, las flechas hacia arriba representan ingresos o entradas de dinero y las flechas hacia abajo los egresos o salidas.

Dinero: Medio legal de pago de obligatoria aceptación. (Banco de la Republica, 2020)

Capital: Se puede definir como la cantidad de dinero que no está comprometida y que una persona destina para ser invertida en una actividad económica o proyecto de inversión. (Baca Urbina, 2016)

Capitalización: Proceso mediante el cual los intereses que se van causando periódicamente se suman al capital anterior. (Meza, 2017)

Gradiente: Valor absoluto o relativo que tiene un pago en su formación, el cual es de carácter constante y continuo a lo largo del ejercicio financiero; puede ser progresivo o regresivo. (Agudelo, 2019)

Inflación: En una economía de mercado, la inflación se da por el aumento constante de los precios de bienes y servicios a través del tiempo. (Banco de la Republica, 2020)

Interés: Dado que el dinero es considerado como un bien que se puede comprar y vender (mercado Forex), el uso de un dinero que no es nuestro implica pagar por su uso, teniendo en cuenta variables como el tiempo, la tasa de interés y el dinero.

Interés simple: Cantidad de dinero pagado sobre el capital primitivo o inicial, el cual permanece invariable. En consecuencia, el interés obtenido en cada intervalo unitario de tiempo es el mismo, es decir, la retribución económica causada y pagada no es reinvertida, por cuanto el monto del interés es calculado sobre la misma base. (Meza, 2017)

Interés compuesto: Llamado también interés sobre interés. Es aquel que al cabo de un tiempo toma los intereses ganados y estos llegan a hacer parte del capital inicial, periodo tras periodo; en otras palabras, los intereses ganados en cada periodo se capitalizan, es decir, se convierten en capital. (Meza, 2017)

Inversión: Desde lo económico es sinónimo de ahorro destinado a la producción. Cantidad de dinero que se utiliza para financiar una actividad económica. (Baca Urbina, 2016)

Periodo de gracia: Tiempo otorgado por las entidades financieras, en el cual los tomadores no realizan pago de intereses, abonos a capital o pagos de alícuotas de su obligación. (Díaz, 2013)

Pago: Cantidad de dinero que interviene en un hecho económico, el cual puede ser por concepto de ingreso o egreso. En la mayoría de las veces este valor monetario es un resultado compuesto por distintas variables de formación. (Meza, 2017)

Plazo: Tiempo que estará invertido o financiado un capital.

Tabla de amortización: Descripción del comportamiento del capital, los intereses generados y saldo de la inversión; en el caso de una financiación se adicionará el pago o la cuota. (Álvarez, 2005)

Tasa de interés: Valor porcentual o relativo que se le aplicará a un capital para determinar su interés considerando el tiempo.

Tasa Interna de Retorno (TIR): Tasa resultado de tomar el Valor Presente Neto e igualarlo a cero. (Meza, 2017)

Unidad Monetaria (UM): En relación con los procesos mercantiles donde interviene el dinero, es preciso generalizar en términos de divisas y utilizar la mención UM, con esto, no se hace especificación a un tipo moneda en particular.

Valor del dinero en el tiempo: Para una mejor comprensión podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Es lo mismo recibir 100 um hoy que recibirlas dentro de un año? Si la respuesta es no, esto se da por el valor del dinero en el tiempo, que puede estar afectado por la inflación y demás variables. (Kozikowski, 2007)

Valor Presente Neto (VPN): Indicador de evaluación financiera, el cual determina la diferencia entre la inversión inicial de un proyecto, frente a los beneficios actualizados futuros.

1

INTERÉS SIMPLE

1.1 OBJETIVO

Dar a conocer herramientas que de solución a problemas de tipo financiero relacionados con el modelo de interés simple para una mejor toma de decisiones en ámbitos profesionales y personales.

1.2 CARACTERÍSTICAS DEL INTERÉS SIMPLE

El capital permanece constante durante la operación, base del cálculo de intereses a través del tiempo.

El interés simple es el calculado para un periodo, que es el mismo a lo largo de la obligación, es decir, en el caso de una deuda a pagar en un año con pagos mensuales de 10 um; esto indica que se harán 12 pagos de 10 um por concepto de interés.

Los intereses no son capitalizables, es decir, que al finalizar un periodo estos hagan parte de la deuda inicial.

En los intereses son calculados sobre el capital primario o saldo de la obligación.

Variables que intervienen

Para el desarrollo de problemas financieros para solucionar a través de interés simple es necesario tener en cuenta las siguientes variables:

Capital Inicial o Primario (C)

Capital Final o Monto (M)

Tasa de interés, Ratio o Razón (i)

Plazo, Tiempo o Periodo (n)

Interés o Renta **(I)**

Capitalización **(Kp)**

1.3 FÓRMULA GENERAL

La fórmula es el resultado de una tabla de amortización de una inversión, en la cual se aplica el concepto de interés simple, que posteriormente se desarrollará para mejor comprensión.

Monto = Capital + Interés - $\mathbf{M = C + I}$

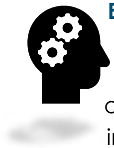
Interés = Capital * Tasa * Tiempo - $\mathbf{I = c\ i\ n}$

Factorizando:

$$\mathbf{M = C + cin} \qquad = \qquad \mathbf{M = C(1 + in)}$$

A continuación, se desarrollará un caso de inversión.

1.4 MONTO O VALOR FUTURO



EJEMPLO 1

¿Cuál es valor final de una inversión de 100.000 um, si se ha obtenido utilidades de 3.000 um, después de 3 meses a interés simple y con el 12 % de tasa anual?

Para resolver un problema financiero es necesario tener en cuenta el siguiente procedimiento:

1. Leer con atención el problema.
2. Identificar el problema o la variable para determinar.

3. Ajustar variables de tiempo y tasa según el caso en la misma unidad de medida.
4. Realizar un diagrama de flujo.
5. Identificar o despejar la fórmula adecuada.
6. Aplicar o sustituir.
7. Dar una respuesta.

Como se mencionó anteriormente, la fórmula general de interés simple es fruto de una tabla de amortización; a continuación, la ilustración señalará el caso considerando el fundamento teórico.

Tabla 1-1 *Amortización de intereses*

Periodo	Capital	Interés	Saldo
1	**100,000**	1,000	101,000
2	100,000	1,000	102,000
3	100,000	1,000	**103,000**

Solución:

Capital Inicial $\mathbf{(C) = 100.000\ um}$

Capital Final o Monto $\mathbf{(M) = x\ ?\ um}$

Tasa de interés, Ratio o Razón $\mathbf{(i) = 12\ \%}$

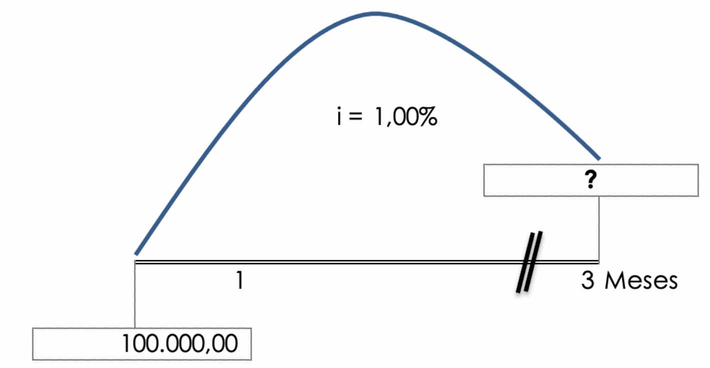
Plazo, Tiempo o Periodo $\mathbf{(n) = 3}$ **meses**

Interés o Renta $\mathbf{(I) = 3.000\ um}$

Ajustar variables tiempo y tasa

12 % = $0{,}12 \div 12 = 0{,}01$

Gráfica 1.1 *Diagrama de flujo*



Fx Fórmula:

$$\mathbf{M = C(1 + in)}$$

Tabla 1-2 *Desarrollo del Problema IS*

Capital primario	$100,000	$100,000
Tiempo (m)	3	3
Tasa de interés	1 %	0,010
Monto	**?**	100,000 x (1+0,010x3)

Respuesta: El monto o valor acumulado de una inversión de 100.000 um al final de tres meses, pagando interés simple a razón del 12 % anual es de **103.000 um**.

1.5 CAPITAL O VALOR PRESENTE

EJEMPLO 2

Si una persona pagó de la siguiente manera un electrodoméstico: una cuota inicial de 500.000 um y posteriormente a los 6 meses un valor equivalente a 1.000.000 um, se liquidan intereses simples a razón del 1,2 % mensual; determine

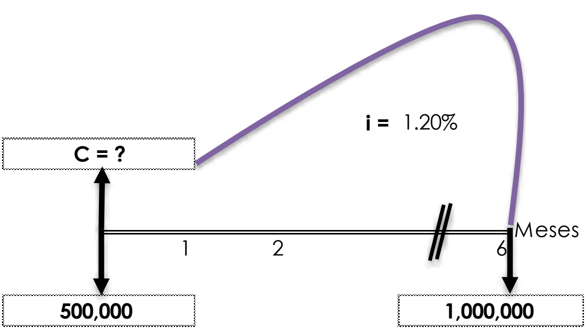
¿Cuál es el valor que tenía el electrodoméstico a la hora de comprarlo?

$P_1 = 500.000$ $n_1 = 0$ $P_2 = 1.000.000$ $n_2 = 6$ $i = 0{,}012$ kp = mensual $C = ?$

Fórmula:

$$\mathbf{C = M \div (1 + in)} \quad \mathbf{o} \quad \mathbf{C = M(1 + in)^{-1}}$$

Gráfica 1.2 *Diagrama de Pagos C*



Como la forma de pagar la deuda fue en dos depósitos, se puede hallar el valor presente de la siguiente manera:

$$\mathbf{C = P1 \div \left(1 + i(0)\right) + P2 \div (1 + i6)}$$

$$\mathrm{C} = 500.000 + 1.000.000 \div (1 + 0{,}012 \text{ x } 6)$$

$$\mathrm{C} = 500.000 + 932.\,836$$

$$\mathbf{C = 1.432.836}$$

Utilizando la fórmula alternativa tendremos:

$$\mathbf{C = P1(1 + i0)^{-0} + P2(1 + i6)^{-1}}$$

$$\mathrm{C} = 500.000 + 1.000.000\ (1 + 0{,}012 \text{ x } 6)^{-1}$$

$$\mathrm{C} = 500.000 + 932.\,836$$

$$\mathbf{C = 1.432.836}$$

Respuesta: El valor que tenía el electrodoméstico a la hora de comprarlo equivale a **1.432.836 um.**

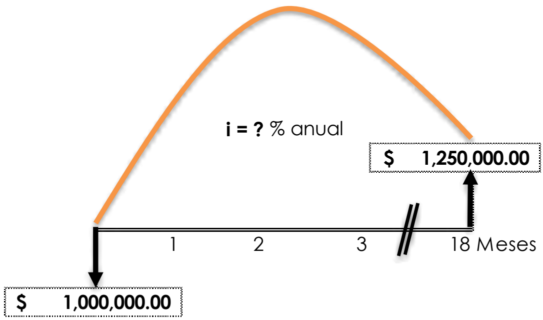
1.6 TASA DE INTERÉS

EJEMPLO 3

Calcular la tasa de interés del periodo y anual de un capital de $1.000.000 um invertido durante 18 meses, el cual acumuló un monto equivalente a $1.250.000 um.

Solución:

Gráfica 1.3 *Diagrama de flujo tasa de interés*



Teniendo en cuenta la fórmula general de monto en la cual $\mathbf{M} = \mathbf{C}(\mathbf{1} + \mathbf{i}\,\mathbf{n})$, despejando la tasa de interés (**i**) se tendrá la ecuación $\mathbf{i} = \left[\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{C}} - \mathbf{1}\right] \div \mathbf{n}$, con la cual ya se podrá determinar en primer lugar la tasa aplicada al caso financiero.

Las variables suministradas son:

$\mathrm{M} = \$1.250.000$ $\quad$ $\mathrm{C} = \$1.000.000$ $\quad$ $\mathrm{n} = 18$ $\quad$ $\mathrm{i} = ?$

$\mathrm{i} = [\ 1.250.000 \div 1.000.000 - 1\ ] \div 18 = 0{,}0138888889$

$0{,}0138888889 \text{ x } 100 = \mathbf{1{,}39\ \%}$

Por otro lado, para hallar la tasa anual basta con multiplicar la tasa mensual por el número de periodos mensuales que tiene un año, es decir, 12.

$0{,}0138888889 \text{ x } 12 = 0{,}16666667$

$0{,}16666667 \text{ x } 100 = \mathbf{16{,}67\ \%}$

Respuesta: La tasa mensual que permitió que $1.000.000 se convirtieran en $1.250.000 en 18 meses equivale al 1,39 % mensual y al 16,67 % anual.

1.7 CÁLCULO DEL PLAZO

EJEMPLO 4

Una persona desea calcular el tiempo que tardaría una inversión de 1.000 USD en generar una rentabilidad de 200 USD, si este estuviese rentando a una tasa de interés del 1,5 % bimestral.

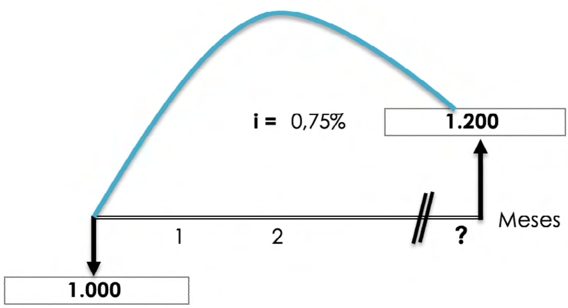
¿Cuántos meses tardaría el capital invertido?

Solución:

Fórmula:

$$\mathbf{n} = \left|\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{C}} - \mathbf{1}\right| \div \mathbf{i}$$

Gráfica 1.4 *Diagrama de estimación del plazo*



$M = 1.200$ $\quad C = 1.000$ $\quad i = 1{,}5\ \%\ b$ $\quad n = ?$

$i = 0{,}015 \div 2 = 0{,}0075$

Cómo resolver en la calculadora

$n = [(1.200 \div 1.000) - 1] \div 0{,}0075$

$n = \mathbf{27}$

Respuesta: El tiempo que debe estar depositado un capital de 1.000 USD para que genere 200 USD de renta a una tasa del 0,75 % mensual son 27 meses.

1.8 CALCULAR EL INTERÉS

EJEMPLO 5

Cierto capital es colocado a rentar a interés simple en una entidad que paga el 1,00 % mensual. Si el tiempo estimado de la inversión de 1.000 um es de 2 años, ¿cuál es el interés generado al final del plazo?

Los datos del problema son:

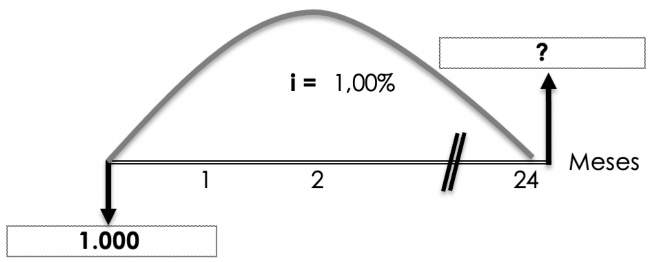
$C = 1.000$ $\quad i = 0{,}01$ $\quad n = 24$ $\quad I = ?$

Solución:

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{I = C\,[(1 + in) - 1\,]}$$

Gráfica 1.5 *Diagrama de cálculo de intereses*



$$\mathbf{I} = 1.000\ [(1 + 0{,}01 \text{ x } 24) - 1\ ]$$

$\mathbf{I = 240}$

Respuesta: Los intereses generados al final de los 2 años corresponden a 240 um.

1.9 DESCUENTO SIMPLE

El descuento es la cantidad de dinero que una persona paga por una deuda de manera anticipada, es decir, antes de que se venza la obligación.

Se deben tener en cuenta las siguientes variables:

D = Descuento

id = Tasa de Descuento

Vp = Valor por pagar

Vd = Valor de la deuda u obligación

n = Tiempo

Fx **Fórmulas:**

$$\mathbf{Vp = Vd - D} \qquad \mathbf{D = Vd \cdot id \cdot n} \qquad \mathbf{V_P = Vd(1 - id.n)}$$

1.10 VALOR POR PAGAR

EJEMPLO 6

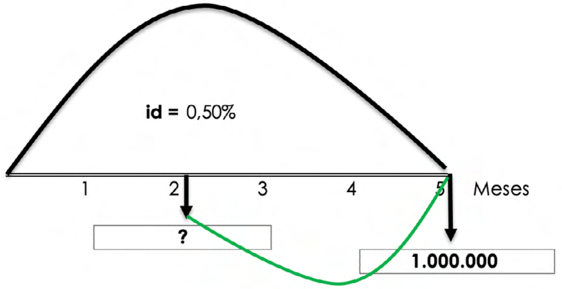
Una persona que tiene una deuda de $1.000.000 por vencer dentro de 5 meses, recibe la siguiente oferta: si paga antes del vencimiento recibiría el 0,5 % por cada mes.

¿Cuál será el valor por pagar por la deuda, 3 meses antes del vencimiento?

Solución:

$\mathrm{Vd} = 1.000.000$ $\quad$ $\mathrm{id} = 0{,}005$ $\quad$ $\mathrm{n} = 3$ $\quad$ $\mathrm{Vp} = ?$

Gráfica 1.6 *Diagrama de estimación del valor por pagar*



Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{V_P = Vd(1 - id.n)}$$

Vp = 1.000.000 (1 – 0,005 x 3)

Vp = 985.000

Respuesta: Si la persona decide pagar su deuda 3 meses antes de su vencimiento, tendría que pagar un valor equivalente a $985.000, es decir, tendría un descuento de $15.000.

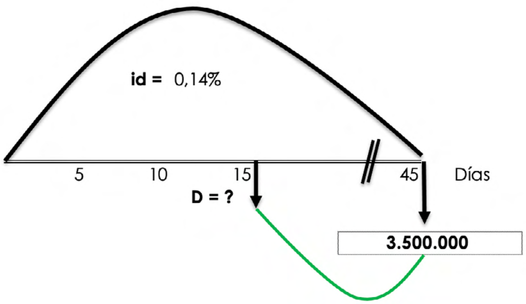
1.11 DESCUENTO

EJEMPLO 7

Una empresa tiene una factura que está por vencer en 45 días por valor de $3.500.000, el proveedor dio la opción de pagar antes del vencimiento y que por tal decisión el cliente tendría una Tasa de Descuento diario del 0,14 %. Si la empresa decide pagar 15 días antes del vencimiento, ¿cuál sería el valor del descuento recibido sobre el valor de la factura?

Vd = 3.500.000 id = 0,0014 n = 15 D = ?

Gráfica 1.7 *Diagrama de cálculo del interés*



Fórmula:

$$\mathbf{D = \; V\,d[\,1 - (1 - id \cdot n)\,]}$$

$$\mathbf{D} = 3.500.000[\,1 - (1 - 0{,}0014 \cdot 15)\,]$$

$$\mathbf{D = 73.500}$$

Respuesta: El descuento recibido por pagar los 3,5 millones 15 días antes de su vencimiento sería igual a **$73.500**.

1.12 CÁLCULO DE LA TASA DE DESCUENTO

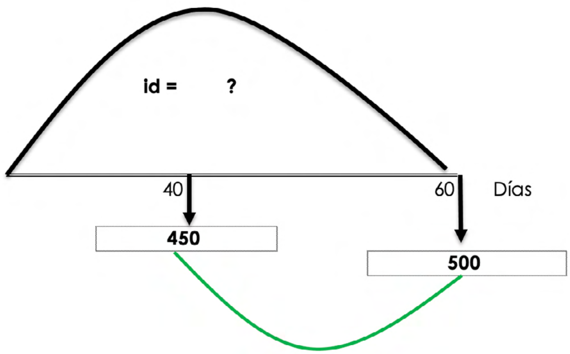
EJEMPLO 8

Cierta persona adeudaba 500 USD a una entidad, la cual debía pagar en 2 meses, sin embargo, poco antes de vencer la deuda se acercó para pagar dicha obligación, cuando llegó a la ventanilla de la entidad, la persona encargada le entregó su cuenta, con la sorpresa de que solo tendría que pagar 450 USD. Si el acreedor fue 20 días antes del vencimiento a la entidad, ¿cuál fue la Tasa de Descuento aplicada?

Los datos del problema son:

$\mathrm{Vd} = 500 \qquad \mathrm{Vp} = 450 \qquad \mathrm{n} = 20 \qquad \mathrm{id} = ?$

Gráfica 1.8 *Diagrama de cálculo de la Tasa de Descuento*



Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{id} = \left|1 - \frac{\mathrm{Vp}}{\mathrm{Vd}}\right| \div \mathrm{n}$$

$$\mathbf{id} = \left|1 - \frac{500}{450}\right| \div 20$$

$$\mathbf{id} = 0{,}005 \text{ x } 100 = \mathbf{0{,}5\ \%}$$

Respuesta: El descuento recibido por la deuda de 500 USD fue del **0,5 %** diario.

1.13 CÁLCULO DEL VALOR DE ADEUDADO

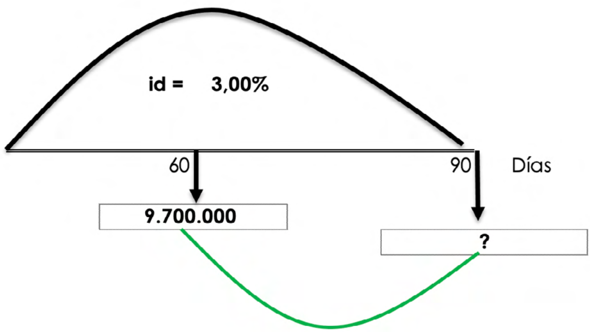
EJEMPLO 9

El Sr. Vanegas, un inversionista conservador, posee un título de renta fija que vence dentro de 90 días; a consecuencia de una pandemia mundial, su flujo de caja se ha visto fuertemente afectado y como resultado de su iliquidez decidió vender el documento y así cubrir su desequilibrio financiero. El comprador pagó $9.700.000 30 días antes del vencimiento, si el documento se descontó a razón del 3 % mensual simple, ¿cuál era el valor del título al vencimiento?

Los datos del caso son:

$\mathrm{Vp} = \$9.700.000$ $\quad$ $\mathrm{n} = 30$ $\quad$ $\mathrm{id} = 0{,}03 \div 30 = 0{,}001$ $\quad$ $\mathrm{Vd} = ?$

Gráfica 1.9 *Diagrama de cálculo del valor adeudado*



Fórmula:

$$\mathbf{Vd} = \mathrm{Vp} \div (1 - \mathrm{id} \cdot \mathrm{n})$$

$\mathbf{Vd} = 9.700.000 \div (1 - 0{,}00 \text{ x } 30)$

$\mathbf{Vd} = 10.000.000$

Respuesta: El valor del título al vencimiento corresponde a un equivalente de **$10.000.000**.

1.14 DETERMINAR EL TIEMPO

EJEMPLO 10

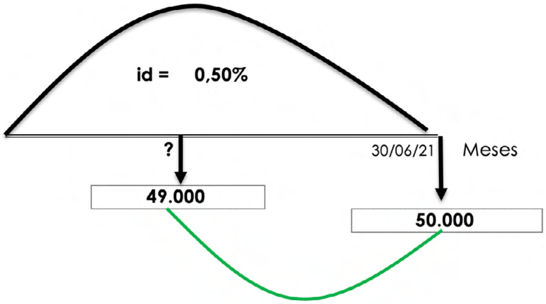
El señor Bonell es tenedor de un bono por valor de 50.000 USD que vence el 30 de junio de 2021, pero por temas de liquidez deberá cederlo antes de su vencimiento para no perder más de 1.000 USD con su venta.

¿En qué fecha debe ceder el título para no perder más de 1.000 USD, considerando una Tasa de Descuento del 0,5 % mensual?

Los datos del caso son:

$\text{Vp} = 50.000 - 1.000 = 49.000$ $\quad$ $\text{Vd} = 50.000$ $\quad$ $\text{id} = 0{,}005$ $\quad$ $\text{n} = ?$

Gráfica 1.10 *Diagrama de cálculo del tiempo*



Fórmula:

$$\mathbf{n} = \left|1 - \frac{\text{Vp}}{\text{Vd}}\right| \div \text{id}$$

$$\mathbf{n} = \left|1 - \frac{49.000}{49.000}\right| \div 0{,}005$$

$$\mathbf{n = 4}$$

Respuesta: Teniendo en cuenta que en los bonos se manejan días calendario y el tiempo para vender el título son 4 meses antes del vencimiento, la fecha estimada para venderlo sin que pierda más de 1.000 USD es el 28 de febrero de 2021.

1.15 ECUACIONES DE VALOR

Son expresiones matemáticas que dan solución al planteamiento de un problema, y en el interés simple no es la excepción. A continuación, se verán algunos ejemplos.

Hallar el valor de la **X**

EJEMPLO 11

La siguiente expresión refleja una igualdad, para lo cual se refleja una incógnita (x), el proceso debe llevar a determinar el valor de esta, ver como es esto:

$$720.000\left(1 + 0{,}0015 \text{ x } \frac{1}{6}\right) + 150.000 = \mathbf{X}\left(1 + 0{,}0015 \text{ x} \frac{1}{6}\right)$$

$$870.180 = 1{,}00025 \text{ X}$$

$$\text{X} = 870.180 \div 1{,}00025$$

$\mathrm{X} = \mathbf{869.962{,}51}$

EJEMPLO 12

Al igual que el caso anterior, es necesario hallar el valor de X.

$1.000.000 + 13.900\mathbf{X} = 1.250.000$

$13.900\mathrm{X} = 1.250.000 - 1.000.000$

$13.900\mathrm{X} = 250.000$

$$\mathrm{X} = \frac{250.000}{13.900}$$

$\mathrm{X} = \mathbf{18}$

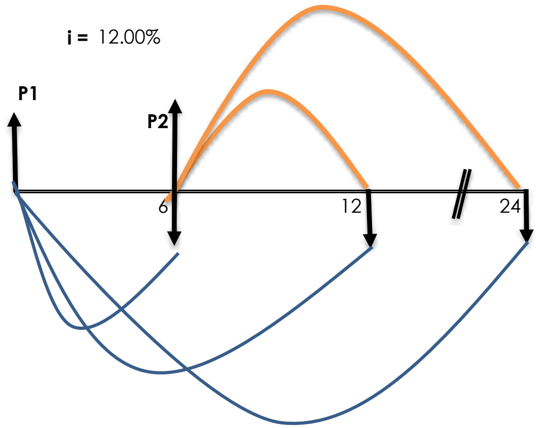
EJEMPLO 13

Finalmente, un caso en el cual se requiere determinar el precio de un artículo.

Se compra una máquina la cual se pagará de la siguiente manera: un pago de 50.000.000 en 6 meses, otro de 100.000.000 al año de comprada y finalmente un pago de 200.000.000 a los 2 años. Si se considera una tasa del 12 % anual determinar el valor de contado de la máquina y su precio dentro de 6 meses. Lo anterior mediante las dos ecuaciones de valor.

Pero antes de determinar las ecuaciones de valor, es fundamental realizar un diagrama.

Gráfica 1.11 *Diagrama de pagos por la adquisición de la máquina*



Fx Fórmula:

$$\textbf{Precio}_{\,1} = \mathrm{P}(1+\mathrm{in})^{-6} + \mathrm{P}(1+\mathrm{in})^{-12} + \mathrm{P}(1+\mathrm{in})^{-24}$$

$$\textbf{Precio}_{\,2} = \mathrm{P} + \mathrm{P}(1+\mathrm{in})^{-6} + \mathrm{P}(1+\mathrm{in})^{-18}$$

1.16 APLICACIÓN EN EL SECTOR REAL

El interés simple es utilizado en el sector real por el sistema financiero formal e informal, seguidamente, se vera cómo se aplica este sistema en una inversión de títulos de renta fija para el caso concreto un Certificado de Depósito a Término (CDT).

EJEMPLO 14

La señora Marina, una inversionista conservadora, decide invertir en un título de renta fija; para esto, deposita 50 millones de COP en el banco de su localidad que paga intereses a razón del 0,37 % mensual durante 6 meses.

Para tener en cuenta que este tipo de rendimientos son afectados por retención en la fuente del 4 %.

Se requiere:

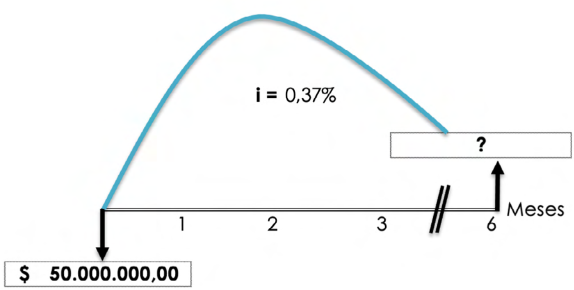
a) Determinar los intereses o rendimientos brutos.
b) Calcular el valor de la retención una vez se venza el título.
c) Establecer el valor de los rendimientos netos.

Solución:

Considerando que se requiere calcular los rendimientos, la fórmula para utilizar es $\mathbf{I = c\,i\,n}$

Es importante antes de efectuar algún cálculo, elaborar un diagrama que refleje la información del problema financiero.

Gráfica 1.12 *Diagrama de inversión de un CDT*



El paso para seguir es identificar las variables por utilizar.

Tabla 1-3 *Variables del caso CDT*

Inversión - **C**	50.000.000	50.000.000
Tiempo en meses - **n**	6	6
Tasa de interés - **i**	0,37 %	0,0037
Tasa de retención - **Rte**	4 %	0,04
Intereses brutos - **INT B**	?	
Retención total - **RT**	?	
Intereses netos - **INT N**	?	

Cálculos

$\mathbf{INT\ B} \quad \mathbf{cin} = 50.000.000 \ \text{x} \ 0{,}0037 \ \text{x} \ 6 = 1.110.000$

$\mathbf{Rte\ T} = \mathbf{INT\ B\ \ x\ Rte} = 1.110.000 \ \text{x} \ 0{,}04 = 44.400$

$\mathbf{INT\ N} = \mathbf{INT\ B - R\ T} = 1.110.000 - 44.400 = 1.065.600$

De esta manera tendremos:

Tabla 1-4 *Solución: liquidación del CDT*

Inversión - **C**	50.000.000	50.000.000
Tiempo en meses - **n**	6	6
Tasa de interés - **i**	0,37 %	0,0037
Tasa de retención - **Rte**	4 %	0,0400
Rta: 1 intereses brutos	?	**1.110.000**
Rta: 2 retención total	?	**44.400**
Rta: 3 intereses netos	?	**1.065.600**

PROBLEMAS

1. Se necesita saber el monto que se retirará dentro de 4 años, sí hoy se invierte 2.000 um al 8 % para el primer año con incrementos del 1 % para los próximos 3 años.

2. Calcular el interés simple que debe pagarse por un préstamo de $3.500.000 al 16 % anual en 200 días.

3. Calcular el interés simple que produce un capital de $12.000.000 en 1 año y 6 meses al 3 % trimestral.

4. Cierto capital invertido al 2 % mensual después de 90 días se convirtió en $3.700.000, ¿cuáles son sus intereses?

5. ¿A qué tasa de interés un capital de 200 USD será equivalente a 212, a interés simple en 9 meses?

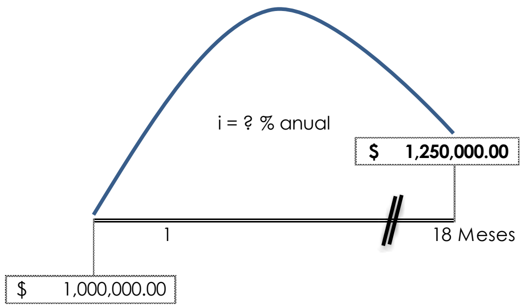
6. Un inversionista estima que un terreno puede ser negociado dentro de 1 año por $85.000.000. ¿Cuánto será lo máximo que él está dispuesto a pagar hoy, si desea obtener un interés del 4 % semestral simple?

7. Cierto capital invertido al 3 % mensual después de 2 años se convirtió en $34.400.000. ¿Cuál es el valor del capital y cuáles son sus intereses?

8. Una caja de ahorros reconoce el 8 % semestral de interés simple. Si hoy deposito 50.000 USD, ¿cuánto tiempo (meses) se debe esperar para obtener $212.725.000, si la TRM para la fecha corresponde a $3.350.

9. Hallar el valor que se debe pagar al finalizar el año, si se prestan $8.500.000 cobrando una tasa de interés simple anual del 20 %.

10.



2
INTERÉS COMPUESTO

2.1 OBJETIVO

Identificar y aplicar herramientas que den solución a problemas de tipo financiero relacionados con el modelo de interés compuesto, en cuanto a la toma de decisiones en el campo de la inversión y financiación.

2.2 CARACTERÍSTICAS DEL INTERÉS COMPUESTO

El interés calculado en un periodo pasa a ser parte del capital en el siguiente, es decir, que se capitaliza.

Los intereses son calculados sobre el saldo de la obligación.

Es posible calcular el valor futuro de un capital o valor presente.

Se puede establecer el valor de un capital o valor presente invertido.

Este tipo de interés es aplicado en el sistema financiero a créditos o préstamos.

2.3 VARIABLES PARA TENER EN CUENTA

Valor Presente **(VP)**

Valor Futuro **(VF)**

Tasa de interés, Ratio o Razón **(i)**

Plazo, Tiempo o Periodo **(n)**

Interés o Renta **(I)**

Capitalización **(Kp)**

2.4 FÓRMULA GENERAL

La fórmula es resultado de una tabla de amortización en la cual se aplica el concepto de interés compuesto. Como se desarrolla a continuación, esta dará una mejor comprensión del tema.

Tabla 2-1 *Tabla progresiva del origen de la fórmula de interés compuesto o valor futuro*

Periodo	Presente	Interés	Futuro	Fórmula
0	P	I	F = P + I	F = P + I
1	P	P x i	F = P + Pi	F = P(1+i)
2	P(1+i)	P(1+i) x i	F = P(1+i) + P(1+i) x i	F = $P(1+i)^2$
3	$P(1+i)^2$	$P(1+i)^2$ x i	F = $P(1+i)^2 + P(1+i)^2$ x i	F = $P(1+i)^3$
N	$P(1+i)^{n-1}$	$P(1+i)^{n-1}$ x i	F = $P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1}$ x i	F = $P(1+i)^n$

Valor Futuro = Valor Presente + Interés - $\mathbf{VF = VP + I}$ Entonces,

Interés = Capital * Tasa - $\mathbf{I = VP * i}$

Factorizando:

Valor Futuro = $\mathbf{VP + VP \times I}$ → $\mathrm{VF} = \mathrm{VP}\,(1 + \mathrm{i})^{\mathrm{n}}$

2.5 VALOR FUTURO

EJEMPLO 1

¿Cuál es valor final de una inversión de 100.000 um, si se ha obtenido utilidades de 3.030,10 um después de 3 meses a interés compuesto y con el 12 % de tasa anual?

Para resolver un problema financiero es necesario tener en cuenta el siguiente procedimiento:

Como se mencionó anteriormente, la fórmula de interés compuesto es fruto de una tabla de amortización. A continuación, la ilustración señalará el caso considerando el fundamento teórico.

Solución:

Valor Presente $\mathbf{(VP) = 100.000\ um}$

Capital Final o Valor Futuro $\mathbf{(M) = x\ ?\ um}$

Tasa de interés, Ratio o Razón $\mathbf{(i)\ 12\ \%}$

Plazo, Tiempo o Periodo $\mathbf{(n) = 3\ meses}$

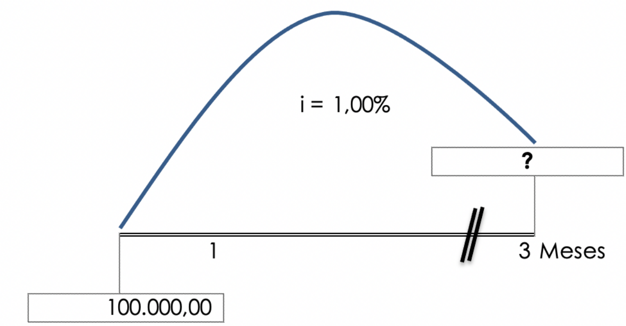
Interés o Renta $\mathbf{(I) = 3.030{,}10\ um}$

Tabla 2-2 *Amortización de intereses para ajustar las variables tiempo y tasa*

Periodo	Valor presente	Interés	Saldo
1	**100,000.00**	1,000.00	101,000.00
2	101,000.00	1,010.00	102,010.00
3	102,010.00	1,020.10	**103,030.10**

$$\mathbf{12\ \% = 0,12 \div 12 = 0{,}01}$$

Gráfica 2.1 *Diagrama del valor futuro*



Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{VF = VP\ (1+i)^\wedge n}$$

Desarrollo:

$\mathrm{Vp} = 100.000$ $\quad$ $\mathrm{i} = 0{,}01$ $\quad$ $\mathrm{n} = 3$ $\quad$ $\mathrm{kp} = \text{mensual}$ $\quad$ $\mathrm{Vf} = ?$

$\mathbf{VF} = 100.000\ (1+0{,}01)^\wedge 3 = \mathbf{103.030{,}10}$

Respuesta: El valor acumulado o valor futuro de una inversión de 100.000 um al final de 3 meses, pagando interés compuesto a razón del 12 % anual es de **103.030,10 um**.

2.6 EXCEL *Fx* VF

Excel dentro de sus bondades ofimáticas posee diferentes funciones que permiten hacer más sencillo y preciso este tipo de cálculos financieros, para este caso se dará solución del problema anterior, mediante la función denominada *VF*.

Para ello se necesita plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

Tabla 2-3 *Tabla de Excel lista para aplicar función VF*

Valor presente	100.000,00	100.000,00
Tiempo	3	3
Tasa de interés	12 %	0,01
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	

Ubicados en la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla 2-3 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, se debe insertar función (Fx); en la opción *categoría* elegir *financiera* y posteriormente en la lista seleccionar *VF*.

Ver cómo es esto.

Imagen 1: Insertar función.

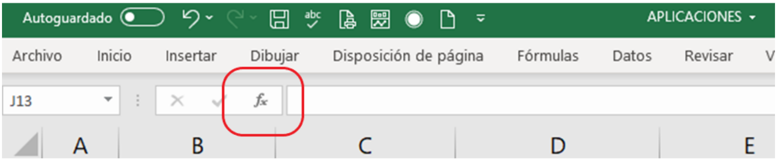


Imagen 2: Ventana Insertar Función.

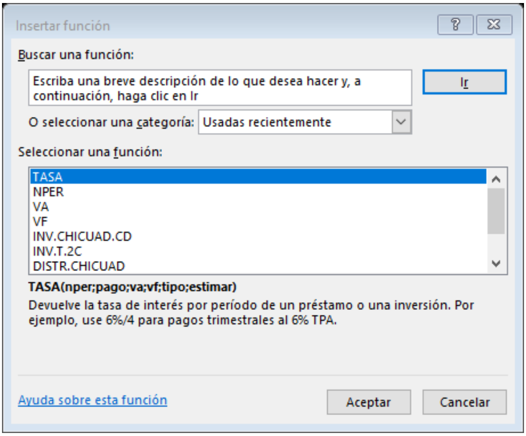
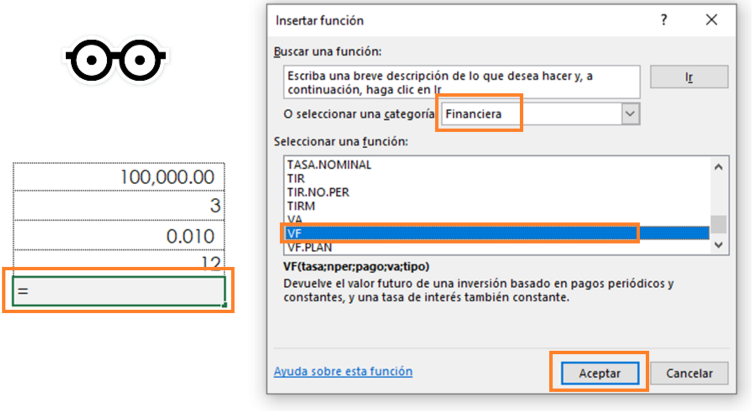


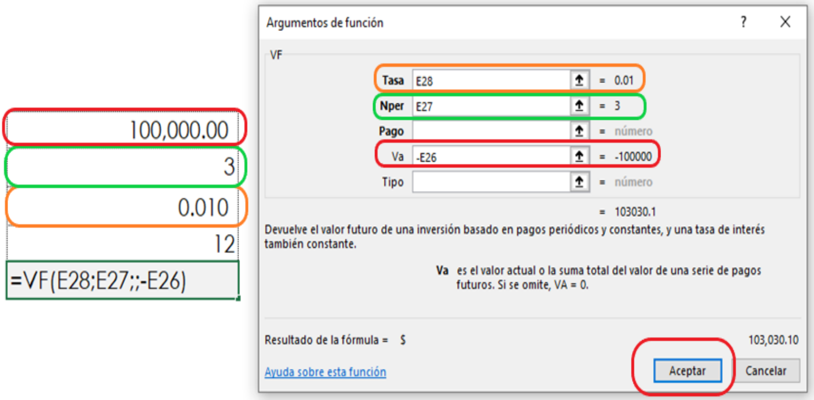
Imagen 3: Función VF.



Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, número de periodos o tiempo y valor presente, las demás variables por ahora no se trabajan; finalmente, se debe tener en cuenta que al valor actual o presente o capital se le debe anteponer un signo menos ya que las inversiones o los egresos son negativos.

Ver cómo es esto.

Imagen 4: Función VF variables.



Luego que se tiene las tres variables listas, se encontrará que el resultado ya aparece previsualizado; en caso de ser negativo, quizá se olvidó anteponer el signo menos al valor presente. Por último, pulsar en *Aceptar*.

Tabla 2-4 *Tabla de Excel lista para aplicar la función VF*

Valor presente	100.000	100.000
Tiempo	3	3
Tasa de interés	12 %	0,010
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	**103.030,10**

Se denota que, al operar el caso de manera mecánica en la calculadora a través de una fórmula con la función de Excel, el resultado es el mismo. Así, se obtendrá como repuesta que al invertir 100.000 um para rentar al 12 % anual compuesto durante 3 meses, el valor futuro equivale a **103.030,10**.

2.7 VALOR PRESENTE

EJEMPLO 2

¿Qué cantidad de dinero se debe depositar el día de hoy en una cuenta de ahorros si se desea que al final de un año el valor sea equivalente a 2.000.000 um, considerando que la entidad financiera paga el 0,05 % mensual?

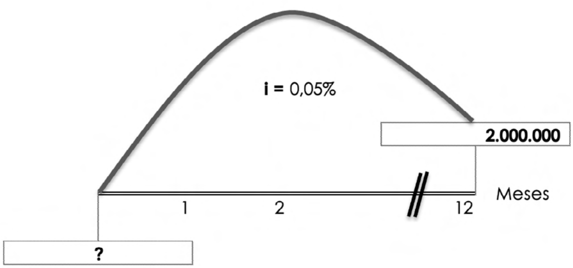
Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{VP = VF(1+i)^{-n}}$$

Desarrollo:

$\mathrm{Vf} = 2.000.000 \qquad \mathrm{i} = 0{,}0005 \qquad \mathrm{n} = 12 \qquad \mathrm{Kp} = \mathrm{mensual} \qquad \mathrm{Vp} = ?$

Gráfica 2.2 *Diagrama valor presente*



$\mathrm{VP} = 2.000.000(1 + 0{,}0005)^{-12}$

$\mathrm{VP} = 1.988.038{,}91$

Otra forma de solucionar el caso es mediante esta fórmula:

$$\mathbf{VP} = \mathbf{VF} \div (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$$

Respuesta: Si una persona desea acumular 2.000.000 al final de un año en una cuenta de ahorros que paga intereses cada mes al 0,05 %, hoy debe depositar **1.988.038,91**.

2.8 EXCEL *Fx* VA

Para ello es necesario plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

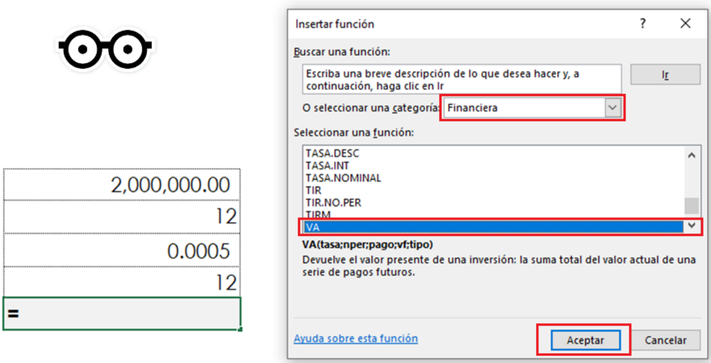
Tabla 2-5 *Tabla de Excel lista para aplicar función VA*

Valor futuro	2.000.000	2.000.000
Tiempo	12	12
Tasa de interés	0,05 %	0,0005
Capitalización	Mensual	12
Valor presente	?	

Como se hizo anteriormente, es necesario ubicar la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla 2-5 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo. Luego de insertar función (Fx), en la opción *categoría* se elige *financiera* y luego dentro la lista seleccionar *VA*.

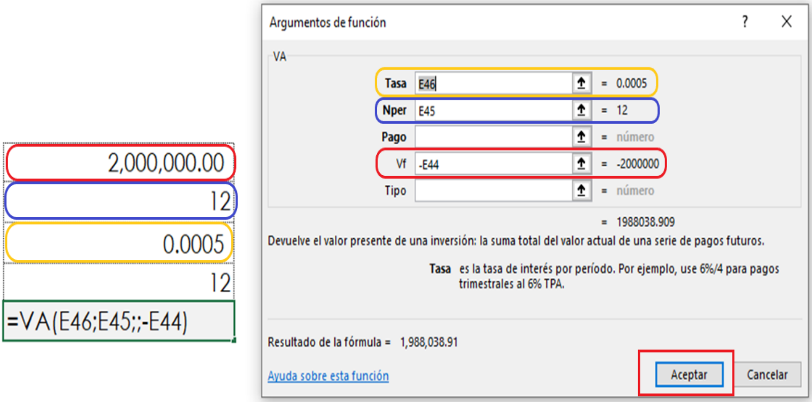
Ver cómo es esto:

Imagen 5: Función VA.



Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, número de periodos o tiempo y valor futuro negativo, las demás variables por ahora no se trabajan.

Observar resultado:
Imagen 6: Función VA variables



Luego de que se tienen las tres variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado; en caso de ser negativo, quizá se olvidó anteponer el signo menos al valor futuro. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor futuro	2.000.000	2.000.000
Tiempo	12	12
Tasa de interés	0,05 %	0,0005
Capitalización	Mensual	12
Valor presente	?	**1.988.038,91**

Respuesta: El dinero que se debe depositar en la cuenta de ahorros debe ser **1.988.038,91**.

2.9 TIEMPO O PLAZO

EJEMPLO 3

Jeidi coloca a rentar un capital de 1.000 USD en una entidad que paga intereses a razón del 1 % mensual compuesto, si su propósito es alcanzar un rendimiento de 100 USD.

¿Cuánto tiempo debe estar depositado el dinero en la entidad financiera?

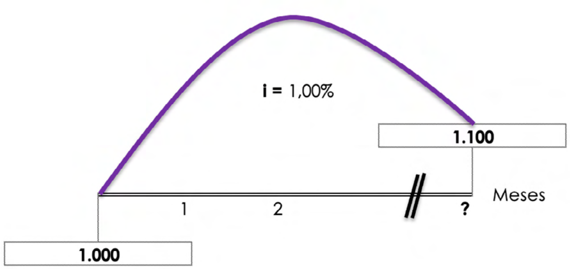
Fórmula:

$$\mathbf{n = \frac{\log\,(VF \div VP)}{\log\,(1 + i)}}$$

Desarrollo:

$Vp = 1.000$ $Vf = 1.100$ $i = 0{,}01$ $kp = \text{mensual}$ $n = ?$

Gráfica 2.3 *Diagrama cálculo del tiempo*



$$\mathbf{n} = \frac{\log\,(1.100 \div 1.000)}{\log\,(1 + 0{,}01)}$$

$$n = 9{,}58$$

Respuesta: Si un inversionista desea ganar 100 USD sobre un capital de 1.000 USD, debe esperar que su dinero rente durante **9,58** meses al 1 %.

2.10 EXCEL Fx NPER

Así como ya se calculó el valor futuro y valor presente, para el caso del tiempo también es necesario plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

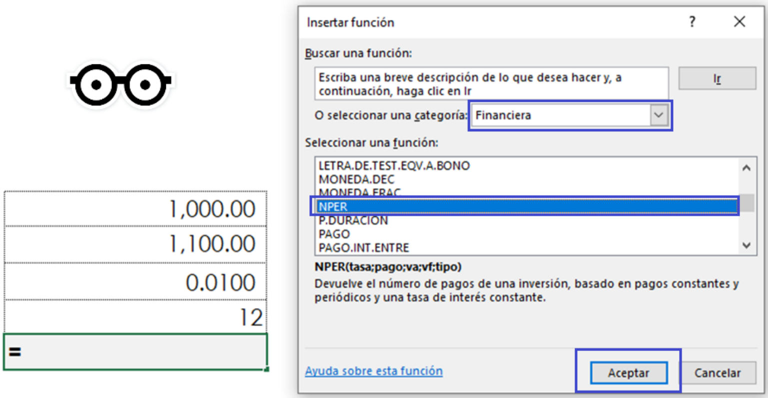
Tabla 2-6 *Tabla de Excel lista para aplicar función NPER*

Valor futuro	1.100,00	1.100,00
Valor presente	1.000,00	1.000,00
Tasa de interés	1 %	0,0100
Capitalización	Mensual	12
Tiempo	?	

Posteriormente es necesario ubicarse en la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla 2-6 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, luego se procede a insertar función (Fx), en la opción *categoría* erigiendo la opción *financiera* y posteriormente dentro la lista seleccionar *NPER*.

Ver cómo es esto:

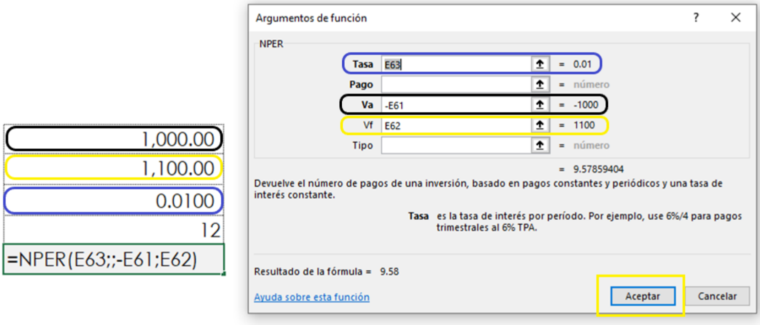
Imagen 7: Función NPER



Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, valor actual o presente negativo y valor futuro, las demás variables por ahora no se trabajan.

Observar cómo es esto:

Imagen 8: Función NPER variables



Luego de que se tienen las tres variables listas, se observará que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor futuro	1.100,00	1.100,00
Valor presente	1.000,00	1.000,00
Tasa de interés	1 %	0,0100
Capitalización	Mensual	12
Tiempo	?	**9,58**

Respuesta: El tiempo que debe permanecer el dinero invertido es de **9,58 meses**.

2.11 TASA DE INTERÉS

EJEMPLO 4

¿Cuál es la rentabilidad trimestral que puede obtener el Sr. Calderón al invertir hoy en una entidad financiera la suma de \$5.000.000 y retirar al término de 2 años un valor de correspondiente a \$5.400.000?

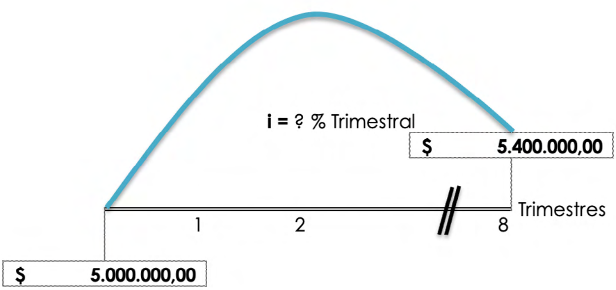
Fórmula:

$$\mathbf{i = \left(\frac{VF}{VP}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Desarrollo:

$\mathrm{Vp} = 5.000.000 \qquad \mathrm{Vf} = 5.400.000 \qquad \mathrm{n} = 2 \times 4 = 8 \qquad \mathrm{Kp} = \mathrm{Trimestral} \qquad \mathrm{i} = ?$

Gráfica 2.4 *Diagrama tasa de interés*



$$\mathbf{i} = \left(\frac{5.400.000}{5.000.000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1$$

$$\mathbf{i = 0{,}01}$$

Respuesta: La rentabilidad que un capital de 5 millones le permite generar un interés de 400.000 durante 2 años es del **1 %** trimestral.

Según el método de despeje de la fórmula general de valor futuro es posible calcular la tasa de esta otra forma:

$$\mathbf{i} = \sqrt[n]{\mathrm{VF} \div \mathrm{VP}} - 1$$

$$\mathbf{i} = \sqrt[8]{5.400.000 \div 5.000.000} - 1$$

$$\mathbf{i = 0{,}01}$$

2.12 EXCEL Fx TASA

Para el caso de la estimación de la tasa de interés es necesario plantear en una hoja de Excel la información de la siguiente manera:

Tabla 2-7 *Tabla de Excel lista para aplicar función TASA*

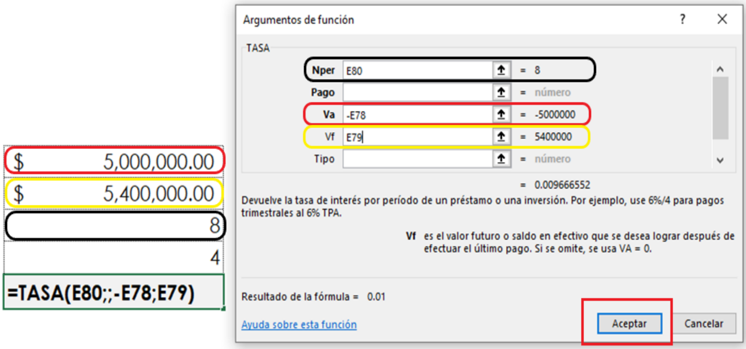
Valor presente	$ 5.000.000	$ 5.000.000
Valor futuro	$ 5.400.000	$ 5.400.000
Tiempo	2	8
Capitalización	Trimestral	4
Tasa de interés	?	

Luego de ubicarse en la celda frente al valor a hallar de color gris, como se observa en la tabla de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, se debe insertar función (Fx), en la opción *categoría* se elige *financiera* y posteriormente dentro la lista seleccionar *TASA*.

Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tiempo, valor actual o presente (negativo) y después el valor futuro; las demás variables por ahora no se utilizarán.

Ver cómo es esto:

Imagen 9: Función TASA variables

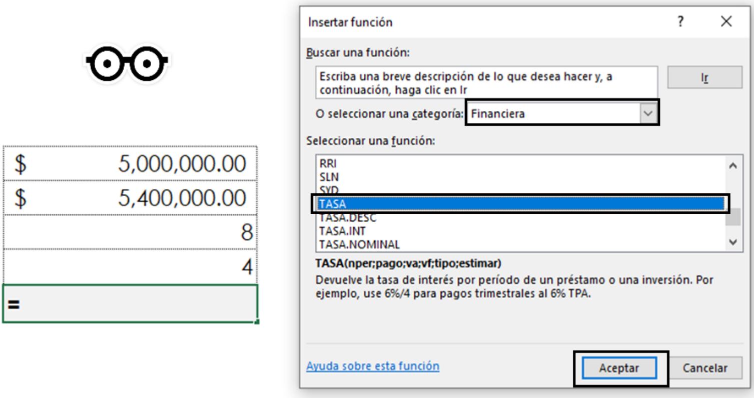


Posteriormente de contar con las tres variables listas, se encuentra que el resultado ya aparece previsualizado en la ventana. Por último, pulsar en *Aceptar*.

Valor presente	$5.000.000,00	$5.000.000,00
Valor futuro	$5.400.000,00	$5.400.000,00
Tiempo	2	8
Capitalización	Trimestral	4
Tasa de interés	?	**0,01**

Respuesta: La tasa de rendimiento del dinero invertido es del **1 % trimestral**.

Imagen 10: Función TASA



PROBLEMAS

1. Se necesita determinar el VF que se retiraría dentro de 4 años, sí hoy se invierte 2.000 USD al 10 % anual y los intereses se capitalizan cada bimestre.

2. Realizar un caso con las variables dadas y resolver: i= 12 %a, vf = $120.000, n = 4 años, kp = 12, **vp =** ?

3. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: vf = $120.000, vp = $74.431, i = 12 % a, kp = 12, **n = años**?

4. Realizar un caso con las variables dadas y resolver: Vp = $74.431, i = 12 % a, n = 4 años, kp = 12, **vf = ?**

5. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: Vp = $74.431, n = 4 años, kp = 12, vf = $120.000, **i =** ? **% a**

6. Realizar un caso con las variables dadas y resolver: i = 13,5 %a, vf = $1.500.000, n = 2 años, kp = 6, **vp =** ?

7. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: vf = $1.500.000, vp = $1.148.501,21, i = 13,5 % a, kp = 6, **n = años**?

8. Favor realizar un caso con las variables dadas y resolver: Vp = $1.148.501,21, i = 13,5 % a, n = 2 años, kp = 6, **vf =** ?

9. Desarrollar un caso con las variables dadas y resolver: Vp = $470.000, n = 1,5 años, kp = 2, vf = $500.000, **i =** ? **% a**

10. Un capital se transformó en $45.600 en dos trimestres, si se aplicó un 1,19 % mensual, ¿cuál fue el capital inicial y el interés ganado por el inversionista?

3

TASAS DE INTERÉS

3.1 OBJETIVO

Fortalecer los conocimientos en Matemáticas Financieras y conocer sus aplicaciones e importancia en la vida del ser humano en cuanto a sus actividades económicas y financieras, a través de herramientas como las tasas de interés (efectivas, nominales y periódicas). (Meza, 2017)

Pregunta: ¿Por qué son importantes las tasas de interés en términos de rentabilidad, a la hora de determinar el costo del dinero?

3.2 TASAS DE INTERÉS

Como las tasas de interés son valores relativos aplicados a un capital considerando el tiempo o la duración de la operación, se puede determinar un interés para ganar o pagar. En el manejo de inversiones y financiaciones, estas tienen un papel muy importante al tomar una decisión en términos financieros (Agudelo, 2019).

Por otra parte, el interés compuesto dio origen a una serie de tasas muy utilizadas y vitales para el desarrollo de problemas financieros, dentro de las cuales se obtienen las tasas periódicas, las tasas nominales y las tasas reales o efectivas.

Diferencias entre tasas

Periódica	**Nominal**	**Efectiva**
Tienen un periodo de capitalización y tipo de vencimiento. Estas son aplicadas en todos los procesos matemáticos para dar solución de casos financieros.	Son la suma de las periódicas en un año. Son anuales, pero su valor es menor que las efectivas. Tienen un periodo de capitalización y tipo de vencimiento.	Son de referencia. Son anuales. No se dividen. Son mayores a las nominales.

Finalmente, se debe tener en cuenta que las tasas de interés tienen un marco referencial y este es el año.

3.3 TASAS PERIÓDICAS

Una tasa de interés periódica es aquella que es aplicada en un periodo determinado para el cálculo de intereses o rendimientos, algunos financieros la llaman o definen como tasa efectiva periódica ya que efectivamente es la que se le aplica a un capital para establecer el interés o rendimiento en un momento dado.

Cuando se habla de un periodo se hace referencia al espacio comprendido desde que se genera el hecho económico hasta cuando se determina el interés que este generó, es decir, que los periodos van relacionados con la capitalización cuando la entidad financiera liquida intereses: estos pueden ser anuales, semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales, mensuales, quincenales, semanales, diarios y, en casos como el sistema financiero informal, hasta en horas.

Las tasas periódicas tienen como característica un periodo de capitalización y un tipo, el cual puede ser vencido o anticipado; estos son referidos en el valor relativo. Para una mejor comprensión, ahora se verán algunos ejemplos:

El **1 % mes vencido** es una tasa periódica que será aplicada al pago de intereses por un mes y se hace una vez termine el periodo, también se puede denotar de la siguiente manera: **1 % mv**.

El **2,5 % tv** refleja que se pagan o cobran intereses una vez termine el trimestre.

El **1 % ma** es una tasa periódica que refleja que los intereses serán cobrados al inicio del mes, dado que es una tasa de mes anticipado.

En el sector es muy dado que se apliquen tasas vencidas a pagos anticipados, de hecho, algo que refuerza el postulado es que Excel no maneja tasas anticipadas.

Para nomenclatura o identificación de una tasa periódica se utilizará las siguientes letras: **(ip)**

3.4 TASAS NOMINALES

Las tasas de interés nominal son aquellas que se identifican por ser el producto de las tasas periódicas en un año, esto significa que tienen una representación anual y, al igual que las periódicas, poseen un tipo y periodo de capitalización.

Las tasas nominales como son anuales reflejan desde la teoría el valor rentado o cobrado por un capital en un año, se dice que esto es en papel o teoría, ya que al elaborar una tabla de amortización el resultado es otro y es cuando se crea otra tasa de interés que es la real o efectiva, de la cual más adelante daremos una aclaración.

Para nomenclatura o identificación de una tasa nominal se utilizará la siguiente letra: **(J)**

Por lo anterior, es claro afirmar que una tasa nominal tiene como características ser anual y poseer un tipo y periodo de capitalización, para ello ver algunos ejemplos:

El **12 % AMV** es una tasa nominal que se leería de la siguiente manera: **12 % Anual Mes Vencido**.

En teoría se puede decir que esta tasa es el producto de aplicar 12 veces el 1 % mensual, así matemáticamente se afirma que la tasa nominal equivale a:

J = 1,00 % x 12 = 12 %

En consecuencia, se definen las siguientes fórmulas:

$\mathbf{J = ip \text{ x } npk}$ en la cual npk son los periodos de capitalización.

$$\mathbf{iP = \frac{J}{npk}}$$

3.5 TASAS EFECTIVAS

Las tasas efectivas o reales son aquellas que, como su nombre lo indica, son el resultado porcentual de intereses cobrados por una financiación o pagados por una inversión al final de un año.

Estas tasas tienen como su indicador de tiempo el año y no tienen periodo de capitalización como las periódicas o nominales; por otro lado, no se pueden utilizar en el proceso de cálculo de intereses inferior a un año y su valor equivalente es mayor a las tasas nominales, en otras palabras, no se pueden dividir para hallar una tasa semestral o cualquier otra diferente a la anual, lo anterior dado que una vez hallada la equivalencia anual de una tasa efectiva, su valor es el mismo. (Agudelo, 2019)

Para nomenclatura o identificación de una tasa efectiva se utilizará la siguiente letra: **(i)**.

Sin embargo, es posible hacer conversiones de tasas debido a la equivalencia de tasas originadas de la fórmula de interés compuesto, como ya se había mencionado.

$$\boldsymbol{P(1+i)^n = P(1+i)^n}$$

Para una mejor perspectiva de una tasa periódica, una nominal y una efectiva se desarrollará una tabla de amortización, en la cual se tendrá un capital de 10.000 um, el cálculo de intereses a razón del 1 % mensual y de la cual se requiere la estimación de cada una de las tasas.

Finalmente, es importante tener en cuenta que para resolver problemas financieros donde la capitalización es inferior a un año, es necesario trabajar y operar el caso con una tasa periódica, en caso tal, que el tiempo o liquidación de intereses sea anual, es posible aplicar en el procedimiento una efectiva o real.

Tabla 3-1 *Amortización para el cálculo de tasas de interés*

Periodo	Capital	Tasa de interés	Interés	Saldo
1	10.000,00	**1 %**	100,00	10.100,00
2	10.100,00	**1 %**	101,00	10.201,00
3	10.201,00	**1 %**	102,01	10.303,01
4	10.303,01	**1 %**	103,03	10.406,04
5	10.000,00	**1 %**	100,00	10.100,00
6	10.100,00	**1 %**	101,00	10.201,00
7	10.201,00	**1 %**	102,01	10.303,01
8	10.303,01	**1 %**	103,03	10.406,04
9	10.000,00	**1 %**	100,00	10.100,00
10	10.100,00	**1 %**	101,00	10.201,00
11	10.201,00	**1 %**	102,01	10.303,01
12	10.303,01	**1 %**	103,03	10.406,04
TOTAL		**12 %**	**1.268,25**	

La tabla 3-1 refleja el comportamiento del interés compuesto en el cual los intereses se capitalizan al final del periodo. Considerando lo anterior, se observa como periodo tras periodo la tasa del 1 % se mantiene generando intereses; claro, estos cambian mes tras mes por ser compuestos.

Al final del año, las tasas (periódicas) aplicadas en cada periodo generan la tasa nominal, es decir, la del año; de esta manera, se tendrá ya dos tasas y tan solo restaría la efectiva, la cual se halla tomando la suma de los intereses y dividiéndola en el capital inicial.

Ver como es esto:

Evidentemente la tasa aplicada mes tras mes del 1 % es la tasa periódica, y esta sería mes vencido.

ip = 1,00 % mv

La tasa nominal sería la suma de las periódicas del año o la multiplicación de ella por 12 periodos.

J = 12,00 % AMV o 1 % x 12 **= 12 % AMV**

Finalmente, se determina que la tasa real o efectiva es el cociente de los intereses sobre el capital inicial.

i = 1.268,25 ÷ 10.000 **= 0,1268**, luego 0,1268 x 100 = **12,68 % EA**

Más adelante se aclarará cómo estas tres tasas son equivalentes.

3.6 TASAS EQUIVALENTES

Son aquellas que, sin importar su clase, es decir, periódica, nominal o efectiva, representan el mismo valor en términos de interés en el año. A manera de ejemplo genérico, al buscar la fórmula equivalente al agua se tendrá que agua = H_2O, o en casos económicos la equivalencia de un dólar en términos de pesos colombianos (COP), conocida esta como la Tasa Representativa del Mercado (TRM).

Para ello, se debe partir de la fórmula de valor futuro identificando lo que hace diferente al P del F, y este es (1+i); ver cómo hacerlo:

$$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}\ (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}}$$

Si se analiza la fórmula de igualdad del valor futuro se puede deducir que lo que hace igual el VP al VF es el interés, que es producto de un multiplicador **(1 + i)**, de no ser así, **VP** ≠ **VF**

En este orden de ideas, asumiendo un mismo capital para obtener un mismo valor futuro, se haría hallando una tasa con diferente periodicidad, lo que se denominaría equivalencia. Lo anterior se representaría así:

$$(\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} = (\mathbf{1} + \mathbf{j})^{\mathbf{m}}$$

1 = Constante
i = Tasa conocida
n = Periodo de capitalización de la tasa conocida
J = Tasa para calcular o hallar
m = Periodo de la tasa para calcular o hallar

Para corroborar los datos de la tabla, se observa cómo el 1 % mv es equivalente al 12,68 %. Para ello, el interrogante sería:

¿Cuál es la tasa efectiva anual equivalente al 1 % mv?

El planteamiento sería el siguiente:

$$(1 + 0{,}01)^{12} = (1 + \mathrm{j})^{1}$$

Como la tasa para calcular es la EA, nótese que el tiempo para esta tasa es uno (1) ya que es anual; para la conocida, basta con sustituir la tasa conocida y, finalmente, 12 son los periodos mensuales en el año.

Seguidamente se despeja *J*.

$$(1 + 0{,}01)^{12} = (1 + \mathrm{j})^{1}$$

$$(1+0{,}01)^{12} = 1 + \mathrm{j}$$
$$(1+0{,}01)^{12} - 1 = \mathrm{j}$$
$$\mathrm{J} = (1+0{,}01)^{12} - 1$$
$$\mathrm{J} = 0{,}1268$$

Respuesta: De esta forma es ideal decir que la tasa efectiva anual equivalente al **1 % mv** es **12,68 %**.

Generalizando, se puede establecer que la fórmula para encontrar la equivalencia de una tasa periódica a una efectiva anual es:

$\mathbf{i} = (\mathbf{1} + \mathbf{i_p})^{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{1}$ o, de otra forma, $\mathbf{i} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{n\rho k}}\right)^{\mathbf{n}} - \mathbf{1}$

Ahora ver como realizar el ejercicio de forma inversa, así la pregunta sería:

¿Cuál es la tasa mes vencido equivalente al 12,68 % EA?

Para esto el planteamiento sería:

$$(1+0{,}1268)^{1} = (1+\mathrm{J})^{12}$$
$$(1+0{,}1268)^{\frac{1}{12}} = ((1+\mathrm{i})^{12})^{\frac{1}{12}}$$
$$(1+0{,}1268)^{\frac{1}{12}} = 1 + \mathrm{i}$$
$$(1+0{,}1268)^{\frac{1}{12}} - 1 = \mathrm{i}$$
$$\mathrm{i} = (1+0{,}1268)^{\frac{1}{12}} - 1$$
$$\mathrm{i} = 0{,}01$$

Respuesta: La tasa mes vencido equivalente al **12,68 % EA** es del **1 %**.

Se puede establecer que la fórmula para encontrar la equivalencia de una tasa efectiva anual a una periódica es:

$$\mathbf{iP = (1 + i)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

3.7 CÁLCULO DE UNA TASA PERIÓDICA

EJEMPLO 1

¿Cuál es la tasa periódica trimestre vencido correspondiente al 12 % ATV?

Solución:

Datos del problema:

$J = 0{,}12$ $\quad$ $npk = 4$ $\quad$ $ip = ?$

Fx ***Fórmula:*** $\mathbf{iP = \frac{J}{npk}}$

$$\mathbf{ip} = \frac{0{,}12}{4}$$

$\mathbf{ip} = 0{,}03$ $\quad$ $0{,}03 \text{ x } 100 = \mathbf{3}$

Respuesta: La tasa trimestre vencido correspondiente o equivalente al 12 % ATV es del **3 %**.

EJEMPLO 2

¿Cuál es la tasa periódica bimestre vencido correspondiente al 12 % EA?

Solución:

Datos del problema:

$i = 0{,}12$ $npk = 6$ $n = 6$ $ip = ?$

Fx ***Fórmula***: $\mathbf{ip = [1 + i]^{\frac{1}{n}} - 1}$

$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}12]^{\frac{1}{6}} - 1$

$\mathbf{ip} = 0{,}019067623$ $0{,}019067623 \text{ x } 100 = \mathbf{1{,}91\ \%\ bv}$

Respuesta: La tasa periódica bimestre vencido correspondiente al 12 % EA es **1,91 %**.

La solución mediante la otra fórmula, la cual depende del método matemático aplicado seria de la siguiente forma:

Fx ***Fórmula:*** $\mathbf{iP = \sqrt[n]{(1 + i)} - 1}$

$\mathbf{iP} = \sqrt[6]{(1 + 0{,}12)} - 1$

$\mathbf{ip} = 0{,}019067623$ $0{,}019067623 \text{ x } 100 = \mathbf{1{,}91\ \%\ bv}$

Como se evidencia, el resultado es el mismo.

3.8 CÁLCULO DE UNA TASA NOMINAL

EJEMPLO 3

¿Cuál es la tasa nominal trimestre vencido correspondiente a 12,6 % EA?

Solución:

Datos del problema:

$i = 0{,}126 \qquad npk = 4 \qquad n = 4 \qquad j = ?$

En este caso, el procedimiento es hallar la tasa periódica y posteriormente la nominal.

Fx ***Fórmula:*** $\mathbf{ip = [1 + i]^{\frac{1}{n}} - 1}$

$$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}126]^{\frac{1}{4}} - 1$$

$\mathbf{ip} = 0{,}030112358$, luego aplicar $\mathbf{J = ip \times npk}$

$\mathbf{j} = 0{,}030112358 \text{ x } 4 = 0{,}120449434 \text{ x } 100 = \mathbf{12{,}04\ \%\ ATV}$

Uniendo las dos fórmulas se tendrá lo siguiente:

$$\mathbf{j} = \left[(\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}} - \mathbf{1}\right] \cdot \mathbf{npk}$$

Respuesta: La tasa nominal anual trimestre vencido correspondiente o equivalente al 12,6 % es del **12,04 %**.

3.9 TASA NOMINAL EN EXCEL

EJEMPLO 4

Ver cómo el caso anterior es resuelto mediante una función de Excel.

¿Cuál es la tasa nominal trimestre vencido correspondiente a 12,6 % EA?

Solución:

Datos del problema:

$i = 0{,}126$ $\quad$ $npk = 4$ $\quad$ $n = 4$ $\quad$ $j = ?$

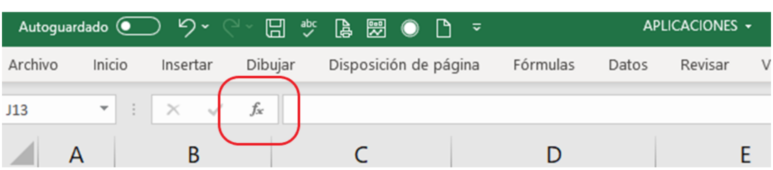
Para lo cual, se necesita abrir un libro de Excel y en una hoja elaborar una tabla que contenga la tasa efectiva y los números de periodos en el año, donde se refleje cuando se capitaliza la tasa nominal y así poder calcularla.

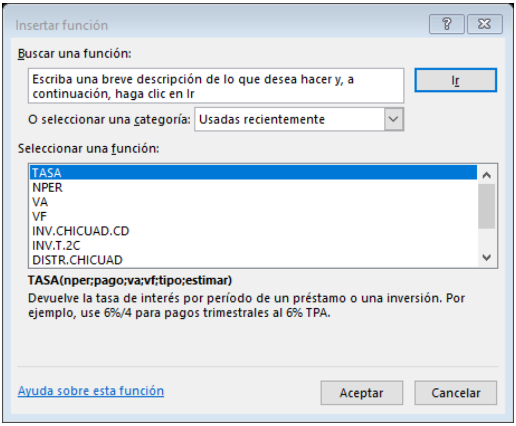
Tabla 3-2 *Tasa nominal en Excel*

Tasa efectiva	12,6 %
Periodos de capitalización	4
Tasa nominal	

Luego es necesario ubicarse en la celda gris en la cual se hallará la tasa, seguidamente ir a insertar la función.

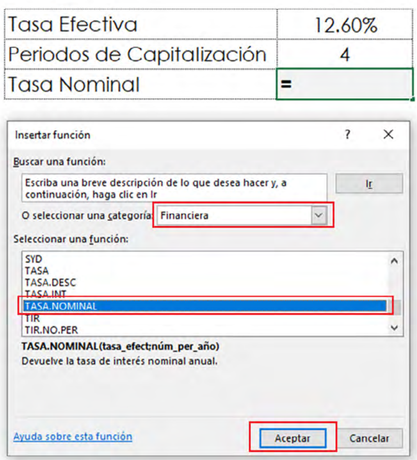
Imagen 11: Insertar Función





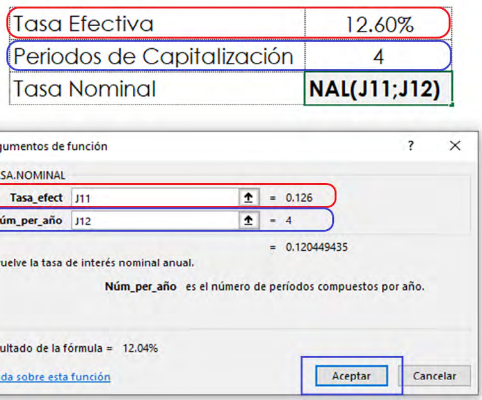
Después de desplegar en la opción *categoría*, elegir *financiera* y en esas opciones en la lista seleccionar *TASA.NOMINAL*.

Imagen 12: Función TASA.NOMINAL



Posteriormente, se abrirá otra ventana que solicitará las dos variables que ya están en la tabla como son la tasa efectiva y los periodos de capitalización; por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 8: Función TASA.NOMINAL variables



Tasa efectiva	12,6 %
Periodos de capitalización	4
Tasa nominal	**12,04 %**

Como se puede corroborar, el resultado obtenido con la fórmula es el mismo que con la función.

Respuesta: La tasa nominal ATV equivalente al 12,6 % EA es del **12,04 %**.

Para tener en cuenta: Excel no calcula tasas periódicas y tampoco tasas anticipadas.

3.10 CÁLCULO DE UNA TASA EFECTIVA

EJEMPLO 5

Las entidades financieras son muy dadas en presentar esta tasa al ofertar algún tipo de producto de inversión. Se debe recordar que esta es la tasa real y es más alta que la tasa nominal, lo que resulta atractivo para un posible cliente, pero en casos como financiación no es muy usual revelarla, por ello es indispensable conocerla y poder tomar una mejor opción o decisión.

¿Cuál es la tasa efectiva que se cobrará realmente por un crédito que cobra interés al 1,3 % mes vencido?

Solución:

Datos del problema:

$\mathrm{ip} = 0{,}013$ $\quad$ $\mathrm{npk} = 12$ $\quad$ $\mathrm{n} = 12$ $\quad$ $\mathrm{i} = ?$

Fx ***Fórmula:***

$$\mathbf{i = (1 + i_p)^{\eta} - 1}$$

$\mathbf{i} = (1 + 0{,}013)^{12} - 1$

$\mathbf{i} = 0{,}167651776$ $\quad$ $0{,}167651776 \text{ x } 100 = \mathbf{16{,}77\ \%}$

Respuesta: La tasa efectiva anual equivalente al 1,3 % mv es **16,77 %**.

3.11 TASA EFECTIVA EN EXCEL

EJEMPLO 6

¿Cuál es la tasa efectiva que se cobrará realmente por un crédito que tiene un interés al 1,3 % mes vencido?

Solución:

Datos del problema:

Hay que recordar que Excel no trabaja tasas periódicas, por ende, se debe calcular la tasa nominal multiplicando por el *npk*.

$\mathrm{ip} = 0{,}013 \ \mathrm{x}\ 12 = \ 0{,}156$ $\quad$ $\mathrm{npk} = 12$ $\quad$ $\mathrm{n} = 12$ $\quad$ $\mathrm{i} = ?$

Para lo cual es necesario abrir un libro de Excel y en una hoja elaborar una tabla que contenga la tasa efectiva y los números de periodos en el año en que se capitaliza la tasa nominal para calcular.

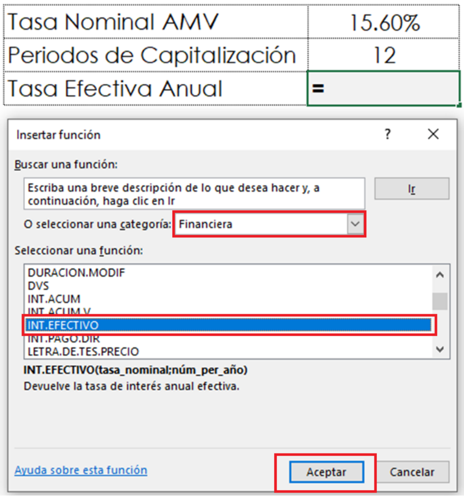
Ver a continuación como sería.

Tabla 3-3 *Tasa efectiva en Excel*

Tasa periódica	15,6 %
Periodos de capitalización	12
Tasa efectiva anual	

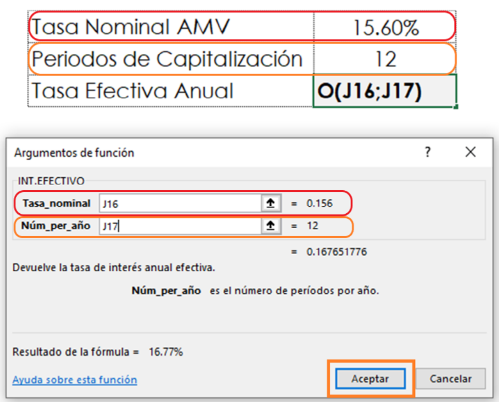
Luego de desplegar en la opción *categoría*, elegir *financiera* y en esas opciones en la lista seleccionar *INT.EFECTIVO*

Imagen 13: Función INT.EFECTIVO



Posteriormente, se abrirá otra ventana que solicitará las dos variables que ya están en la tabla como son: la tasa efectiva y los periodos de capitalización; finalmente, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 14: Función INT.EFECTIVO variables



Respuesta: La tasa efectiva equivalente al 15,6 % AMV es del **16,77 %**.

Tasa nominal AMV	15,6 %
Periodos de capitalización	12
Tasa efectiva anual	**16,77 %**

3.12 TASAS COMBINADAS

Son el producto de al menos una tasa variable y una fija, en el cual las tasas variables, como su nombre lo indica, cambian frecuentemente en determinado tiempo y las tasas fijas son denominadas spread o puntos efectivos.

Algunas tasas variables en Colombia son la inflación, la devaluación, la DTF, la TCC y la TBS.

La DTF es una tasa de captación la cual mide el promedio de los depósitos a término a 90 días de todo el sistema financiero, muy utilizada en créditos blandos por bancos de segundo nivel y del Estado. La DTF es de naturaleza Anual Trimestre Anticipada (ATA).

Por su parte, la TCC mide el promedio de captación de los bancos y de las corporaciones financieras de CDT a 90 días.

Y la TBS mide el promedio de las tasas de los bancos con plazo hasta de un año.

El spread en algunos mercados financieros es la diferencia entre el precio de compra y el de venta, para este caso se toma como la tasa pasiva o fija de un contrato de mutuo o préstamos; estos se dan en puntos efectivos.

Fx Fórmula:

$$\mathbf{TC = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_n) - 1}$$

EJEMPLO 7

El banco agropecuario coloca en el mercado un producto con una tasa de interés DTF + 2 puntos, teniendo en cuenta una DTF del 4,3 % ATA.

¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al préstamo ofertado?

Solución:

Los datos del caso son:

$J = 0{,}0430$ $\quad$ $npk = 4$ $\quad$ $Sp = 2$ $\quad$ $i = ?$

Teniendo en consideración que en este caso se cuenta con una tasa anticipada, es necesario utilizar la forma de equivalencias, salvo con una variación en los signos para la tasa anticipada, es decir, cambiar + por -. Ver como es el planteamiento.

Planteamiento para conversión de una tasa efectiva del 4,42 % a una periódica:

$$\mathbf{(1 + i)^n = (1 - j)^{-m}}$$

$$(1 + 0{,}0442) = (1 - \mathbf{J})^{-4}$$

$$(1 + 0{,}0442)^{-\frac{1}{4}} = 1 - \mathbf{J}$$

$$(1 + 0{,}0442)^{-\frac{1}{4}} - 1 = -\mathbf{J}$$

$$\mathbf{J} = 1 - (1 + 0{,}0442)^{-\frac{1}{4}}$$

Hasta ahora se ha calculado la tasa periódica anticipada, de la cual resulta esta fórmula general:

$$\mathbf{iP = 1 - (1 + i)^{-\frac{1}{n}}}$$

Y la tasa nominal sería: $\mathbf{J = \left[1 - (1 + i)^{-\frac{1}{n}}\right] \cdot n}$

Planteamiento para conversión de una tasa periódica $\frac{0{,}043}{4}$ a una efectiva:

$$\mathbf{(1 - i)^{-n} = (1 + j)^{m}}$$

$$\left(1 - \frac{0{,}043}{4}\right)^{-4} = (1 + i)$$

$$\left(1 - \frac{0{,}043}{4}\right)^{-4} - 1 = j$$

$$J = \left(1 - \frac{0{,}043}{4}\right)^{-4} - 1$$

$$J = 0{,}044180946$$

Fórmula general: $\mathbf{i = \left(1 - \frac{j}{npk}\right)^{-n} - 1}$

Como en este caso se referenciaba una tasa ATA, esta equivale al **4,42 % EA**.

Finalmente, es posible establecer la tasa combinada:

TC = (1+DTF(ea)) (1+0,02) - 1

TC = (1 + 0,0442) (1 + 0,02) -1

TC = 0,0650840 x 100 = **6,51 %**

Respuesta: La tasa efectiva anual del producto financiero ofertado por el banco agrario corresponde al **6,51 %**.

3.13 INFLACIÓN

La inflación es el incremento paulatino y constante de los precios de los productos básicos de la canasta familiar de una economía en un periodo determinado (Banco de la República, 2020).

Esta medida es calculada con base en el Índice de Precios al Consumidor (IPC).

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{INF} = \frac{\mathbf{IPC_n - IPC_{n-1}}}{\mathbf{IPC_{n-1}}} \ \mathbf{x\,100}$$

En la cual,

INF = inflación

$\mathbf{IPC_n}$ = IPC del periodo actual

$\mathbf{IPC_{n-1}}$ = IPC de un periodo anterior.

EJEMPLO 8

Determinar el nivel de inflación del año 2019 con base en la siguiente información:

Tabla 3-4 *Índices de precios al consumidor*

Año (aaaa)-Mes (mm)	Índice
2020-03	105,53
2020-02	104,94
2020-01	104,24

2019-12	103,80
2019-11	103,54
2019-10	103,43
2019-09	103,26
2019-08	103,03
2019-07	102,94
2019-06	102,71
2019-05	102,44
2019-04	102,12
2019-03	101,62
2019-02	101,18
2019-01	100,60

Fuente: Banco de la República, Gerencia Técnica. Información extraída de la bodega de datos Serankua, el 09/04/2020 a las 20:06:43.

Solución: diciembre de 2019.

$\text{IPC diciembre} = 103.80 \qquad \text{IPC noviembre} = 103.54 \qquad \text{INF diciembre} = ?$

$$\text{INF diciembre} = \frac{(103.80 - 103.54)}{103.54} \text{ x } 100$$

$$\text{INF diciembre} = 0{,}25\ \%$$

De acuerdo con el procedimiento anterior, con diciembre de 2019 el resultado para los demás periodos sería:

Tabla 3-5 *Inflación mes a mes de 2019*

Año (aaaa)-Mes (mm)	Índice	INF mensual 2019
2019-12	103,80	**0,25 %**
2019-11	103,54	**0,11 %**

2019-10	103,43	**0,16 %**
2019-09	103,26	**0,22 %**
2019-08	103,03	**0,09 %**
2019-07	102,94	**0,22 %**
2019-06	102,71	**0,26 %**
2019-05	102,44	**0,31 %**
2019-04	102,12	**0,49 %**
2019-03	101,62	**0,43 %**
2019-02	101,18	**0,58 %**

Fuente: Banco de la República, Gerencia Técnica. Información extraída de la bodega de datos Serankua, el 09/04/2020 a las 20:06:43

PROBLEMAS

1. Determinar la tasa anual efectiva de:

Capitalización	# de Pdos	Nominal	TEA
Anual	1	12 %	
Semestral	2	12 %	
Cuatrimestral	3	12 %	
Trimestral	4	12 %	
Bimestral	6	12 %	
Mensual	12	12 %	

2. Determinar la tasa periódica de:

Capitalización	# de Pdos	Nominal	ip
Anual	1	12,68 %	
Semestral	2	12,68 %	
Cuatrimestral	3	12,68 %	
Trimestral	4	12,68 %	
Bimestral	6	12,68 %	
Mensual	12	12,68 %	

3. Un artículo es fabricado en Colombia y cuesta 80.000 COP, a la fecha la TRM es de USD 1 = 4.000 COP. Suponiendo que el IPP del sector en el país es del 20 % y que la devaluación del peso frente al dólar sea del 15 %, hallar el precio del mismo artículo en cada país al final de un año.

4. Se constituye un CDT a 3 meses por $650.000, con una tasa del 26 % ATV. Teniendo en cuenta que la retención en la fuente es de 4 %, determinar:

a) La rentabilidad antes de impuestos.
b) La rentabilidad después de impuestos.
c) El valor que le entregan al vencimiento.
d) Suponiendo una inflación del 8 % establecer la tasa real obtenida.

Para tener en cuenta a la hora de deflactar una tasa efectiva vs. inflación:

$(1 + \mathrm{ir})\,(1 + \mathrm{m}) = (1 + \mathrm{in})$ donde: ir = Tasa real, m = Inflación e in = Tasa de interés

5. Un labriego desea conocer la tasa que el banco le cobrará por un crédito que colocó en las siguientes condiciones: DTF + 1,5 puntos, considerando una DTF a la fecha de 4,43 % ATA.

6. Un inversionista desea obtener una rentabilidad real del 10 %. ¿A qué tasa debe invertir suponiendo que la inflación va a ser del 5 %?

4

ANUALIDADES O PAGOS UNIFORMES

4.1 OBJETIVO

Fortalecer los conocimientos en Matemáticas Financieras y conocer sus aplicaciones e importancia en la vida del ser humano en cuanto a sus actividades económicas y financieras, a través de herramientas como las anualidades o pagos uniformes.

PREGUNTA: ¿Por qué es importante la utilización de las anualidades en el mercado real?

4.2 DEFINICIÓN

Una anualidad es un flujo de caja con montos de dinero uniformes, es decir, todos los flujos son iguales y los movimientos de capitales ocurren a intervalos regulares. La circulación monetaria es por medio de pagos de la anualidad (Yepes, 2017).

Las anualidades no siempre están referidas a periodos anuales de pago. Las fórmulas de las anualidades permiten desplazar en el tiempo un grupo de capitales a la vez.

Algunos ejemplos de anualidades

- Los pagos mensuales por renta.
- El cobro quincenal o semanal de sueldos.
- Los abonos mensuales a una cuenta de crédito.
- Los pagos anuales de primas de pólizas de seguro de vida.

Los principales elementos que conforman las anualidades

A: Pago periódico llamado también renta. Es el importe cobrado o pagado, según sea el caso, en cada periodo y que no cambia en el transcurso de la anualidad.

F: El valor futuro viene a ser la suma de todos los pagos periódicos (A) capitalizados al final del enésimo periodo.

P: El valor actual o presente viene a ser la suma de todos los pagos periódicos (A) descontados o actualizados a una tasa de interés.

ip: Es la tasa de interés por periodo y tiene la característica de ser simultáneamente nominal y efectiva. También representa la tasa efectiva anual (TEA).

n: Obtenemos el número de periodos multiplicando el tiempo por la frecuencia de capitalización de los intereses (n = n en años * npk).

K: Periodos de gracia. Tiempos cuando no se efectúan pagos.

Kp: Capitalización, la cual se refiere al momento cuando las entidades liquidan el interés.

Una anualidad es una serie de pagos que cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos los pagos son de igual valor.
2. Todos los pagos se hacen a iguales intervalos de tiempo.
3. Todos los pagos son llevados al principio o al final de la serie a la misma tasa.
4. El número de pagos debe ser igual al número de periodos.

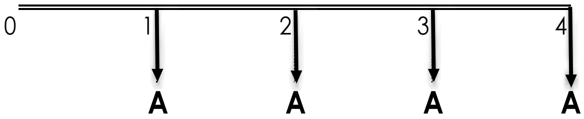
Tipos de anualidades

Ordinaria o vencida, anticipada, diferida y perpetua.

4.3 ANUALIDADES ORDINARIAS O VENCIDAS

Son aquellas en las cuales los pagos se hacen al final de cada periodo, por ejemplo, el pago de salarios a los empleados, ya que primero se realiza el trabajo y luego se hace el pago. Se representa así:

Imagen 15: *Diagrama anualidad vencida*



Ver algunos casos de aplicación de anualidades vencidas:

EJEMPLO 1

Para esto se tiene el siguiente caso: determinar el valor futuro de un ahorro programado en el cual una persona destina 500.000 COP para ser consignados al final de cada mes durante 3 años, teniendo en cuenta que la entidad financiera paga intereses a razón del 4,68 % EA con capitalización mes vencido.

Solución:

Antes de solucionar, se debe leer con atención y recordar la teoría de una anualidad y determinar de qué tipo es. En el caso planteado es una anualidad ordinaria o vencida y se pide establecer el valor futuro, es decir que debe utilizar la siguiente fórmula:

Fx Fórmula:

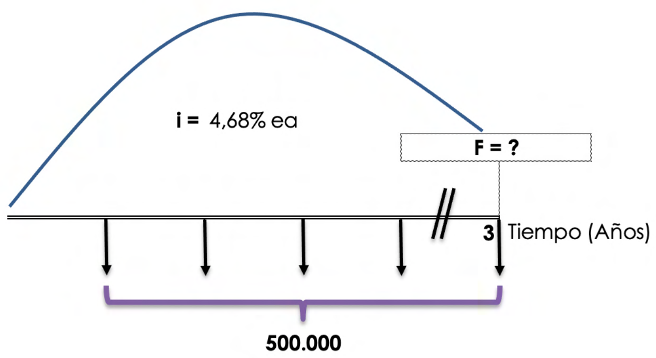
$$\mathbf{F = A\left|\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right|}$$

Luego se debe identificar las variables:

$F = ?$ $n = 3$ años $kp = mv$ $A = 500.000$ $i = 4{,}68\ \%\ EA$

Tras ello, se debe realizar el diagrama de flujo o flujo de caja, el cual quedaría de la siguiente manera:

Gráfica 4.1 *Diagrama anualidad vencida*



Una vez se cuenta con la información, lo que sigue es determinar cuál es la capitalización y hallar su equivalencia en la tasa de interés y el tiempo. Como la capitalización es mes vencido, esto debe estar establecido en meses.

$F = ?$ $kp = mv$ $A = 500.000$ $n = 3$ años $i = 4{,}68\ \%\ EA$

Para los años a meses se multiplica el tiempo en años por los periodos de capitalización, de esta forma:

$n = 3 \text{ años} = \quad n \times npk = \ 3 \times 12 = \mathbf{36}$

Para la tasa de interés se aplica la forma de equivalencia

$$\mathbf{ip = [1 + i]^{\frac{1}{n}} - 1}$$

No se debe olvidar trabajar las tasas en decimales, de esta forma se tendrá lo siguiente:

$$\mathrm{i} = 4{,}68\ \% \quad = \qquad \mathrm{ip} = [1 + 0{,}0468]^{\frac{1}{12}} - 1 \;=\; \mathbf{0{,}00381876394189}$$

Finalmente, se sustituye en la fórmula elegida:

$$\mathbf{F} = 500.000 \left| \frac{(1 + 0{,}00381876394189)^{36} - 1}{0{,}00381876394189} \right|$$

F = 500.000 × ((1+ 0.00381876394189)^36-1) ÷ 0.00381876394189) Calculadora

F = $19.256.652,87

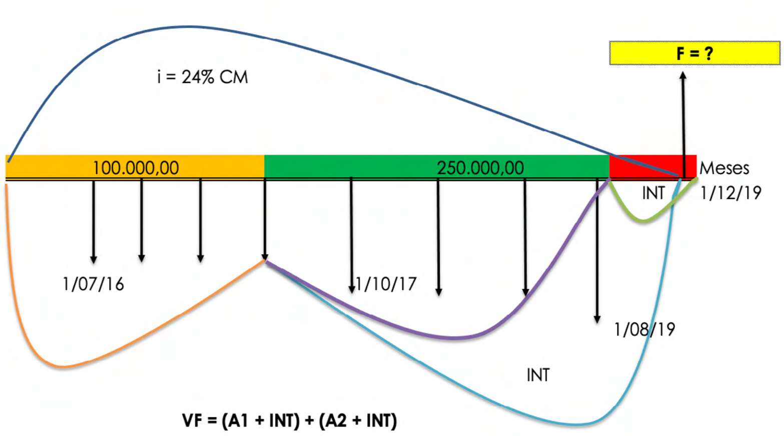
Respuesta: El valor futuro de ahorrar 500.000 COP durante 3 años a una tasa del 4,68 % EA con capitalización mensual es de **19.256.652,87 COP**.

EJEMPLO 2

Una persona inicia el 1 de julio de 2016 a hacer depósitos mensuales de $100.000 el día primero de cada mes. Estos depósitos son efectuados en una entidad financiera que paga el 24 % CM o AMV, pero a partir del 1 de octubre de 2017 decidió que sus depósitos serían de $250.000. El último depósito lo hizo el 1 de agosto de 2019. Si el 1 de diciembre de 2019 decide pagar la cuenta, ¿cuál será el monto de sus ahorros?

Para dar solución a este problema es indispensable realizar primero que todo el diagrama, el cual quedaría de la siguiente forma:

Gráfica 4.2 *Diagrama de dos anualidades vencidas*



El diagrama muestra el proceso para llevar a cabo en el cual existen dos anualidades y unos tiempos cuando ese ahorro gana intereses, quiere decir que hay que hallar el F de cada anualidad y luego el VF, para al final sumarlas y encontrar el valor de **$10.757.468,68**.

Posteriormente, se deben hallar los valores de la primea anualidad. Para determinar el tiempo, se toman las fechas y se establece los meses restando de la fecha final la inicial de la anualidad.

DD	MM	AAAA
01	09	2007
01	06	2006
-	**03**	**1**

- **3** **+** **12** **=** **15 meses**

F	?
A	100.000,00
i	0,02
n	15

i = $\mathbf{0,12 \div 12}$

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{F = A \left| \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right|}$$

$$\mathbf{F} = 100.000 \left| \frac{(1+0{,}02)^{15} - 1}{0{,}02} \right| = 1.729.41{,}69$$

Una vez se ha calculado el valor de la anualidad, se halla el valor futuro del interés hasta el cierre de la cuenta, para esto se toma el F de la anualidad como Vp.

DD	MM	AAAA
01	12	2009
01	09	2007
-	**03**	**2**

- **3** **+** **24** **=** **27 meses**

$$\mathbf{VF = VP\ (1+i)^n =}\quad 1.729.341{,}69\ (1+0{,}02)^{\wedge 27} = \quad \mathbf{2.951.789{,}95}$$

Al igual que para la primera anualidad, se sigue el mismo procedimiento para la siguiente.

DD	MM	AAAA
01	08	2009
01	09	2007
-	**- 1**	**2**

- -1 + 24 = 23 meses

F	?
A	250,000.00
i	0,02
n	23

$$\mathbf{F} = 250.000 \left| \frac{(1+0{,}02)^{23}-1}{0{,}02} \right| \quad = \mathbf{7.211.240{,}80}$$

Una vez se ha calculado el valor de la anualidad, se halla el valor futuro del interés hasta el cierre de la cuenta, para esto se toma el F de la anualidad como Vp.

DD	MM	AAAA
01	12	2009
01	08	2009
-	**04**	**-**

- 4 + - = 4 meses

$$\mathbf{VF} = 7.211.240{,}80\ (1 + 0{,}02)^{\wedge 4} = \mathbf{7.805.678{,}96}$$

Finalmente, se suman los dos valores según se evidencia en el diagrama de flujo.

F = (Anualidad 1 + Intereses) + (Anualidad 2 + Intereses)

$$\mathbf{F = 2.951.789{,}95 + 7.805.678{,}96 = 10.757.468{,}90}$$

Respuesta: El valor acumulado por las dos anualidades al final del 01-12-2019 es de **$10.757.468,90**.

EJEMPLO 3

Un comerciante ahorra 500 euros al final de cada pago de sus obligaciones laborales, es decir, cada mes. Si la entidad donde deposita su dinero paga intereses a razón del 5 % EA.

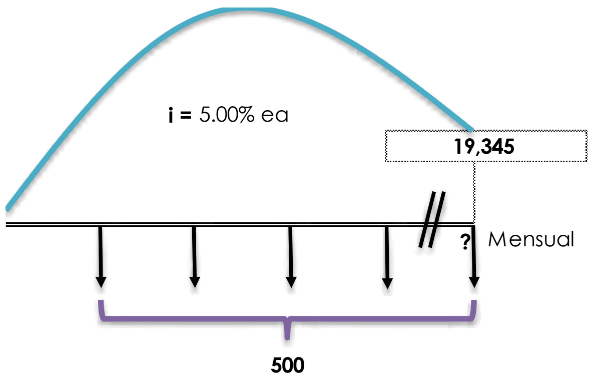
¿Cuánto tiempo debe esperar para tener ahorrados 19.345 euros?

Solución:

Los datos del problema son:

$i = 0{,}0500$ $\quad kp = 12$ $\quad F = 19.345$ $\quad A = 500$ $\quad n = ?$

Gráfica 4.3 *Diagrama tiempo anualidad vencida*



$$\mathbf{ip} = \sqrt[12]{(1+0{,}05)} - 1$$

$$\mathbf{ip} = \quad 0{,}00407412378$$

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{log}\left(\frac{\mathbf{Fi}}{\mathbf{A}} + \mathbf{1}\right)}{\mathbf{log}\ (\mathbf{1} + \mathbf{i})}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{log}\left(\frac{19.345 \text{ x } 0{,}00407412378}{500} + 1\right)}{\mathbf{log}\ (1 + 0{,}00407412378)}$$

$$\mathbf{n} = \ \mathbf{36}$$

Respuesta: El comerciante debe esperar **36** meses para alcanzar su objetivo de ahorro.

EJEMPLO 4

Un terreno que tiene un valor de 70 millones de COP se propone comprar con una cuota inicial del 20 % y 25 cuotas mensuales iguales con una tasa de interés del 1 % mensual.

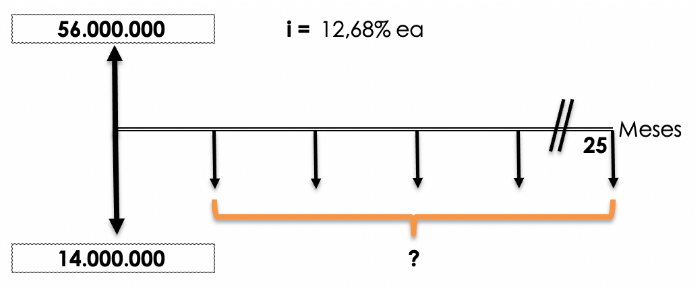
¿Cuál sería el valor de las cuotas?

Solución:

Los datos del problema son:

$ip = 0{,}01 \qquad k = 12 \qquad P = 56.000.000 \qquad PCI = 14.000.000 \qquad n = 25 \qquad A = ?$

Gráfica 4.4 *Diagrama pago de un lote*



Fórmula:

$$\mathbf{A = P \div \left| \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right|}$$

$$\mathbf{A} = 56.000.000 \div \left| \frac{1-(1+0{,}01)^{-25}}{0{,}01} \right|$$

$$\mathbf{A} = 2.542.719$$

Respuesta: El valor de cada pago mensual para cancelar el 80 % del valor del terreno equivale a **2.542.719**.

4.4 ANUALIDADES VENCIDAS *Fx* EXCEL

EJEMPLO 5

Un comerciante ahorra 1.000.000 al final de cada pago del impuesto del IVA, es decir, cada dos meses; si la entidad donde deposita su dinero paga intereses a razón del 4 % EA.

¿Cuánto tiempo debe esperar para tener ahorrados 25.900.192?

Solución:

Los datos del problema son:

$\mathrm{i} = 0{,}04$ $\quad$ $\mathrm{k} = 6$ $\quad$ $\mathrm{F} = 25.900.192$ $\quad$ $\mathrm{A} = 1.000.000$ $\quad$ $\mathrm{n} = ?$

Teniendo en cuenta que la capitalización es bimestral, las variables tiempo y tasa deben estar en la misma medida. Como se ha desarrollado el proceso de cómo convertir una tasa efectiva a una periódica, se puede hacer mediante la fórmula o función de Excel, y el tiempo que está en años se multiplica por la capitalización, de esta manera se tendrá lo siguiente:

$ip = (1+0{,}04)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0{,}00655819694$ $\quad$ $\mathrm{npk} = 6 \times 6 = 36$ $\quad$ $\mathrm{F} = 25.900.192$
$\mathrm{A} = 1.000.000$ $\quad$ $\mathrm{n} = ?$

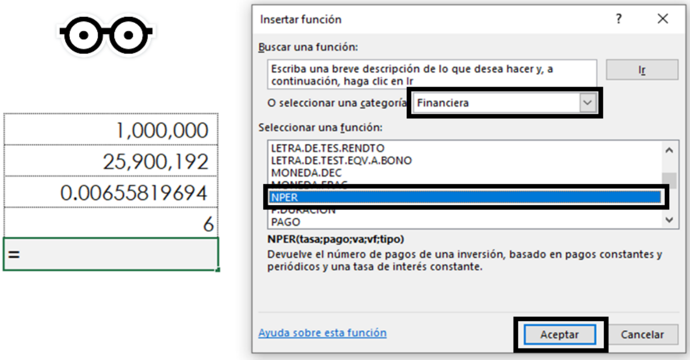
Luego, se elabora el caso en una hoja de Excel de la siguiente manera:

Tabla 4-1 *Hallar* n *en una anualidad vencida*

Anualidad	1.000.000	1.000.000
Valor futuro	25.900.192	25.900.192
Tasa de interés (EA)	4 %	0,00655819694
Capitalización	Bimestral	6
Tiempo (años)	?	

Luego de ubicarse en la celda frente al valor para hallar de color gris, como se observa en la taba 4-1 de la hoja de Excel o también llamada hoja de cálculo, se insertar función (Fx), en la opción *categoría* se elige *financiera* y posteriormente en la lista seleccionar *NPER*.

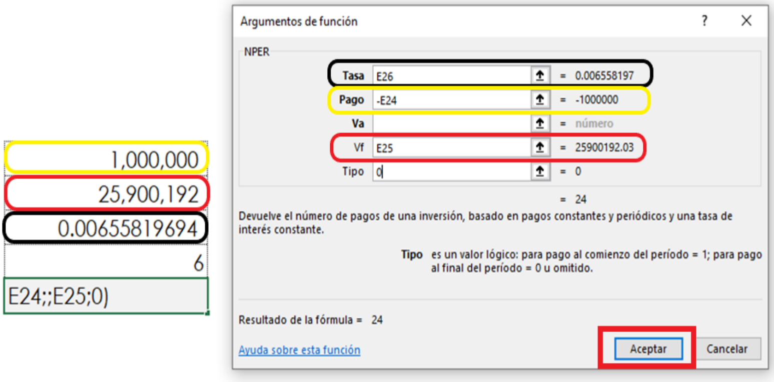
Imagen 17: Función NPER



Luego aparecerá otra ventana que solicitará los datos de tasa de interés, pago o anualidad en negativo, valor futuro, y en tipo se debe digitar cero (0) u omitir.

Ver cómo es esto:

Imagen 18: Función NPER variables



Después de se tienen las variables listas, se encuentra que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Anualidad	1.000.000	1.000.000
Valor futuro	25.900.192	25.900.192
Tasa de interés (EA)	4 %	0,00655819694
Capitalización	Bimestral	6
Tiempo (años)	?	**24**

Respuesta: El comerciante debe esperar **24** bimestres o 4 años para alcanzar su objetivo de ahorro.

EJEMPLO 6

Una persona deposita al final de cada mes 500.000, si la entidad financiera paga intereses cada mes a razón del 4,68 % EA, determine:

¿Cuál es valor futuro al final de 3 años?

Solución:

Como se ha venido trabajando en otros temas, se debe elaborar una tabla de datos de la siguiente manera.

Los datos del problema son:

$i = 0{,}0468$ $\quad kp = 12$ $\quad n = 3$ años $\quad A = 500.000$ $\quad F = ?$

Teniendo en cuenta que la capitalización es mensual, las variables tiempo y tasa deben estar en la misma medida. Como se ha aprendido el cómo convertir una tasa efectiva a una periódica, es posible hacerlo mediante fórmula o función de Excel y el tiempo que está en años se multiplica por la capitalización, de esta manera se tendrá lo siguiente:

Tabla 4-2 *Datos anualidad vencida en Excel*

Anualidad	500.000	500.000
Tiempo (años)	3	36
Tasa de interés (EA)	4,68 %	0,00381876394
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	

Después, desde la celda gris se debe la insertar función *financiera* opción *VF, ver para* recordar cómo hacerlo:

Imagen 19: Insertar Función

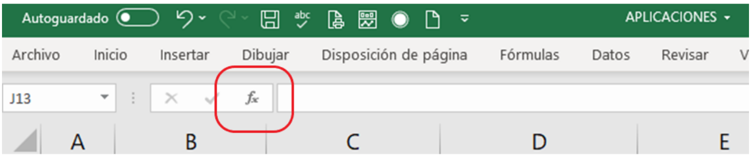
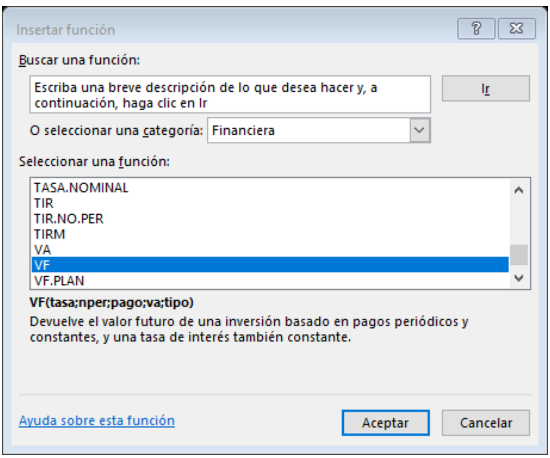
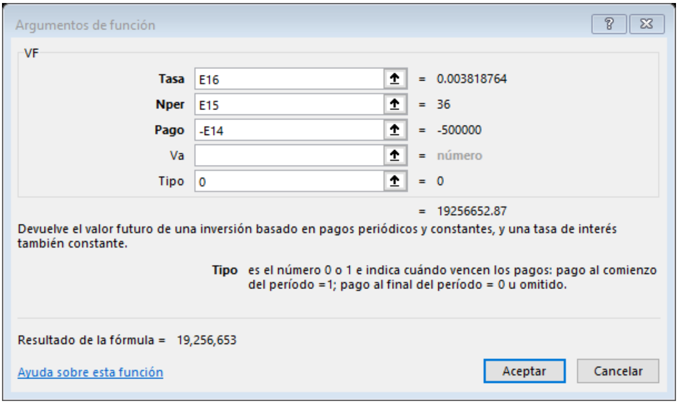


Imagen 20: Función VF



Posteriormente, la ventana emergente solicitará información con la cual ya se cuenta en la tabla previamente elaborada como lo es, la tasa de interés, número de periodos o tiempo, pago o anualidad, recordar que ésta tendrá un signo negativo y, por último, tipo que determinará si es vencida o anticipada; para este caso se puede omitir o digitar cero (0), y finalmente dar clic en *Aceptar*.

Imagen 21: Función VF variables



En consecuencia, el resultado será el siguiente:

Anualidad	500.000	500.000
Tiempo (años)	3	36
Tasa de interés (EA)	4,68 %	0,00381876394
Capitalización	Mensual	12
Valor futuro	?	**19.256.653**

Respuesta: El valor futuro al depositar 500.000 al final de 3 años corresponde a **19.256.653**.

EJEMPLO 7

Si una persona destina 850.000 um para ser depositados en una entidad financiera, con el propósito de acumular al final de un año y medio la suma de 17.000.000 um.

¿Cuál es la tasa mensual mínima que le deben ofrecer para cumplir con su propósito en el tiempo establecido?

Solución:

$F = 17.000.000 \qquad kp = 12 \qquad n = 18 \qquad A = 850.000 \qquad ip = ?$

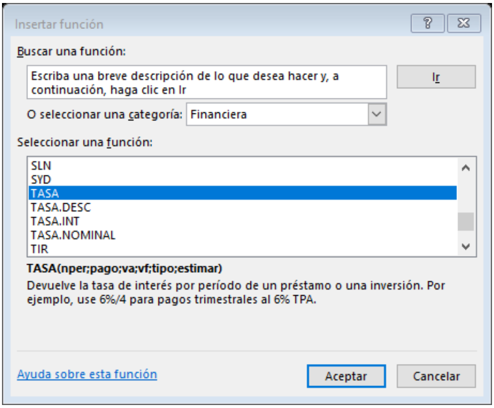
Ahora, lo anterior se elaborará en una tabla en Excel.

Tabla 4-3 *Estimación tasa de interés*

Anualidad	850.000	850.000
Valor futuro	17.000.000	17.000.000
Tiempo (años)	1,5	18
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	?	

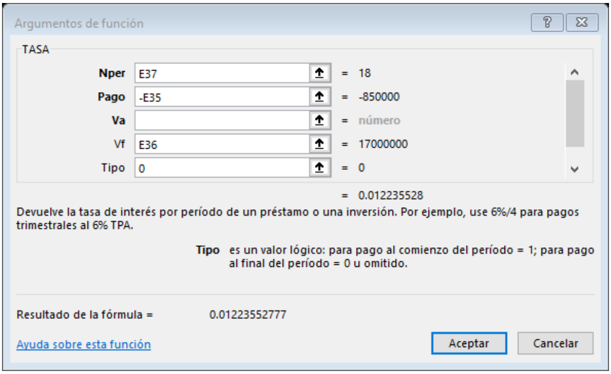
Después, desde la celda gris, se procede a insertar función *financiera*, opción *TASA;* ver cómo es esto:

Imagen 21: Función TASA



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya tiene la tabla como número de periodos o tiempo, pago o anualidad, la cual tendrá un signo negativo, valor futuro y, por último, tipo que determinará si es vencida o anticipada; para este caso es posible omitir o digitar cero (0), y finalmente dar clic en *Aceptar*.

Imagen 22: Función TASA variables



En consecuencia el resultado será el siguiente:

Anualidad	850.000	850.000
Valor futuro	17.000.000	17.000.000
Tiempo (años)	1,5	18
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	?	**0,01223552777**

Respuesta: La persona debe recibir como oferta de una entidad financiera una tasa mayor o igual al **1,22 % mv** para alcanzar su objetivo.

EJEMPLO 8

Si una persona acude a una institución financiera para solicitar un crédito por valor de 12.500.000 para ser pagado en 5 años, asumiendo que con el análisis de crédito es posible que le otorguen esa cantidad y considerando que la entidad financiera cobra un ratio del 11 % EA.

¿Cuál es el valor de la cuota mensual fija que deberá pagar en caso de ser otorgado su crédito?

Solución:

$\mathrm{P} = 12.500.000 \qquad \mathrm{kp} = 12 \qquad \mathrm{n} = 60 \qquad \mathrm{i} = 0{,}11 \qquad \mathrm{A} = ?$

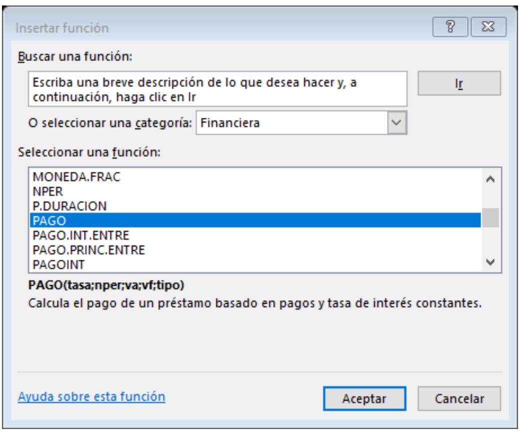
Ahora se elaborará una tabla en Excel, para la cual se utilizó la Fx TASA.NOMINAL para hallar ip mv.

Tabla 4-4 *Estimación cuota crédito*

Valor Presente - Crédito	12.500.000	12.500.000
Tiempo (años)	5	60
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	11 %	0,00873459382
Anualidad - Cuota	?	

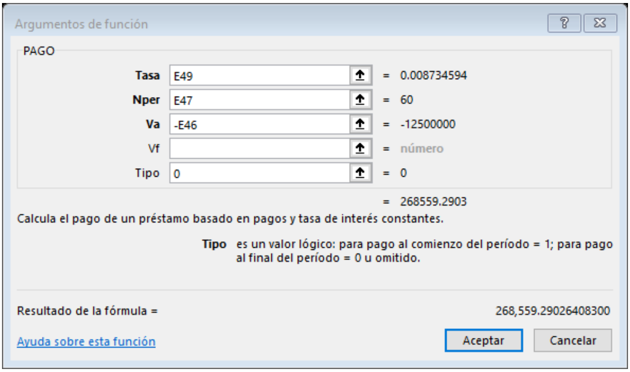
Después desde la celda gris se debe insertar función *financiera*, opción *PAGO*, ver cómo es esto:

Imagen 23: Función PAGO



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya se tiene en la tabla como tasa de interés, número de periodos o tiempo, el valor actual o presente tendrá un signo negativo, y finalmente tipo que para este caso es cero (0). Por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 24: Función PAGO variables



En consecuencia, el resultado será el siguiente:

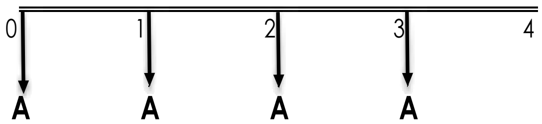
Valor Presente - Crédito	12.500.000	12.500.000
Tiempo (años)	5	60
Capitalización	Mensual	12
Tasa de interés (EA)	11,00 %	0,00873459382
Anualidad - Cuota	?	**268.559**

Respuesta: La cuota que tendrá que pagar mensualmente durante los 5 años será equivalente a **268.559**.

4.5 ANUALIDADES ANTICIPADAS

En esta los pagos se hacen al principio del periodo, por ejemplo, el pago mensual del arriendo de una casa ya que primero se paga y luego se habita el inmueble.

Imagen 25: *Diagrama Anualidad Anticipada*

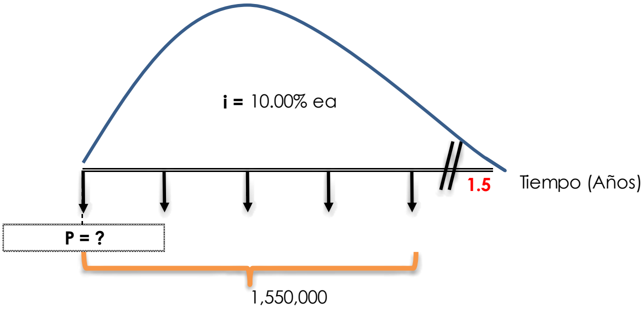


Recordar que estas anualidades tienen la característica de realizar sus pagos al inicio de cada periodo.

EJEMPLO 9

El arrendador de un local desea conocer el valor que debe pagar al inicio de un contrato, el cual tiene la siguiente información, Ver grafico:

Gráfica 4.5 *Diagrama ejemplo anualidad anticipada*



Nota: El valor del arriendo se paga de forma bimestral.

Solución:

En este caso no se cuenta con un problema planteado como el anterior, pero sí con el diagrama que brinda la información necesaria.

Entonces la fórmula para utilizar es la siguiente:

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})$$

Realizando el mismo trabajo que en el caso anterior, en el cual la información dada y la que refleja el diagrama es la siguiente:

$\mathrm{P} = ?$ $\mathrm{kp} = \mathrm{ba}$ $\mathrm{A} = 1.550.000$ $\mathrm{n} = 1{,}5$ años $\mathrm{i} = 10\ \%$ EA

$\mathrm{i} = 10\ \% = ip = [1 + 0{,}10]^{\frac{1}{6}} - 1 = \mathbf{0{,}01601186777339}$

$\mathrm{n} = 1{,}5$ años $= \mathrm{n} \times \mathrm{kp} = 1{,}5 \times 6 = \mathbf{9}$

Finalmente, se tendría lo siguiente resolviendo en la calculadora *Fx-82MS*:

$\mathbf{P} =$ 1550000 × ((1 - (1+0,01601186777339)^-9) ÷ 0,01601186777339) × (1 + 0,01601186777339) = **13.102.203**

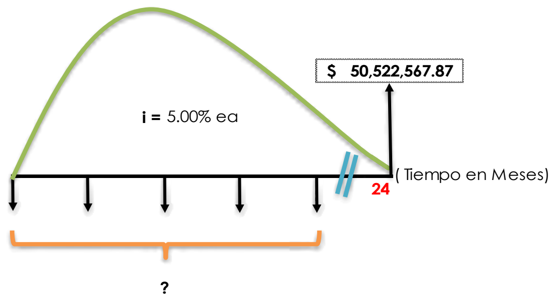
Respuesta: El arrendador tendrá que pagar al inicio del contrato de arrendamiento un valor equivalente a **13.102.203 COP**.

Ahora se presentará otro caso de aplicación de anualidad anticipada.

EJEMPLO 10

En este caso se debe extraer la información del gráfico.

Gráfica 4.6 *Diagrama ejemplo 2 anualidad anticipada*



El diagrama suministra la siguiente información:

F = 50.522.567,87 i = 5,00 % EA n = 24 kp = mensual (12) A = ?

En este caso, se requiere determinar el valor del pago o anualidad, pero antes de proceder a realizar los cálculos, se debe tener en cuenta que la tasa es efectiva anual y no es posible trabajar con ella; según la capitalización es necesario convertirla en mensual y, para tal fin, se procede a lo siguiente:

$ip = (1+ 0{,}05)^{\wedge(1/12)} -1 = 0{,}0040741$

En el caso de que una de las variables sea el valor futuro, la fórmula despejada es la siguiente:

Fórmula:

$$\mathbf{A} = \mathrm{F} \div \left| \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}} \right| (1+\mathrm{i})$$

Finalmente, se sustituye en la fórmula.

Cómo resolverlo en la calculadora *Fx-82MS*:

$\mathbf{A} = 50522567.87 \div (((1+ 0.0040741)\text{^}^{24} - 1) \div 0.0040741) \times (1+0.0040741) =$ **2.008.148**

Respuesta: El valor que se debe pagar al inicio de cada mes durante 2 años corresponde a **$2.008.148**.

EJEMPLO 11

¿Cuántos pagos semestrales de 8.000 um de forma anticipada se deben hacer para acumular una cantidad de 125.015 si esta renta semestralmente al 8 % anual capitalizable?

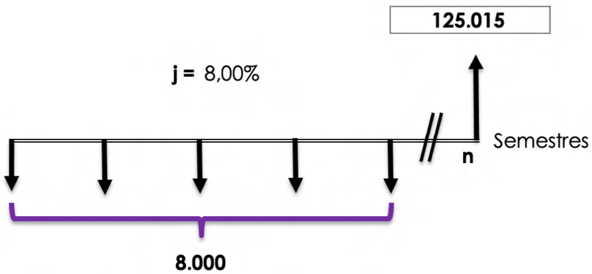
Solución:

Los datos del problema son:

$\mathrm{F} = 125.015$ $\quad \mathrm{j} = 8{,}00\ \%$ $\quad \mathrm{ip} = 0{,}04$ $\quad \mathrm{kp} = \mathrm{semestral}$ $\quad \mathrm{A} = 8.000$ $\quad \mathrm{n} = ?$

Para el caso de las anualidades encontrar el número de pagos equivale al tiempo. Hay que recordar que una característica es que debe haber igualdad en los pagos y periodos.

Gráfica 4.7 *Diagrama cálculo del tiempo*



Fórmula:

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(1 - \dfrac{\mathrm{Fi}}{\mathrm{A}\ (1+\mathrm{i})}\right)}{\log(1+\mathrm{i})}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(1 - \dfrac{125.015 \text{ x } 0{,}04}{8.000(1+0{,}04)}\right)}{\log(1+0{,}04)}$$

$$\mathbf{n} = 12$$

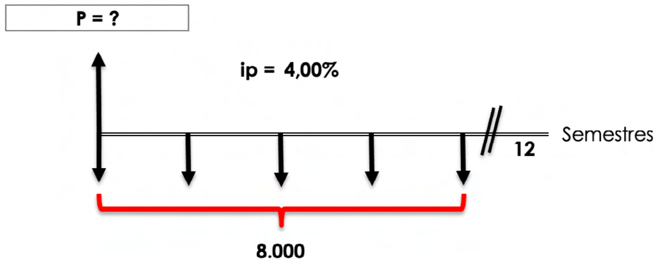
Respuesta: Para lograr reunir un valor de 125.015, se deben realizar **12** pagos de 8.000 cada semestre.

EJEMPLO 12

Suponiendo el mismo caso del ejemplo 11, en el cual se deben realizar 12 pagos de 8.000 de forma anticipada cada semestre a una tasa del 4 %.

¿Cuál sería el valor actual o presente de dichos pagos?

Gráfica 4.8 *Diagrama cálculo valor presente*



Fx Fórmula:

$$\mathbf{P} = A\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i)$$

$$\mathbf{P} = 8.000\left|\frac{1-(1+0{,}04)^{-12}}{0{,}04}\right|(1+0{,}04)$$

$\mathbf{P} = 78.084$

Respuesta: En caso de aceptar la oferta de hacer un único pago ahora con las mismas condiciones, este pago sería de **78.084**.

4.6 ANUALIDADES ANTICIPADAS Fx DE EXCEL

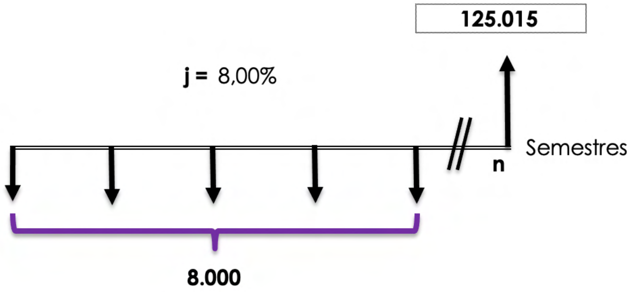
EJEMPLO 13

Para el siguiente caso de anualidades anticipadas se elaborará una tabla en Excel con las variables de anualidad o pago, tasa de interés y capitalización, con el fin de hallar el tiempo; para esto se seguirá utilizando la función NPER y solamente habrá una variación. Ver cómo hacerlo.

Tabla 4-5 *Tiempo de una anualidad anticipada*

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tasa de interés (EA)	8 %	0,04
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (años)	?	

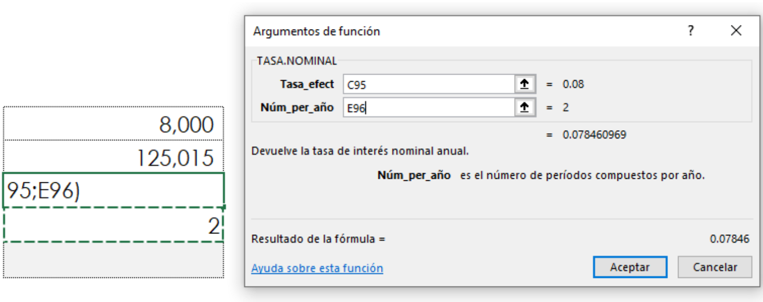
Gráfica 4.9 *Tiempo de una anualidad anticipada*



Como se puede observar en la tabla 4-5, la capitalización es semestral, es decir, dos periodos al año; teniendo en cuenta que la tasa es efectiva anual, es necesario convertirla en semestre vencido por dos razones: una que Excel no trabaja tasas anticipadas y dos, que en la práctica, normalmente se aplican tasas vencidas para el cálculo de pagos anticipados, de este modo la respuesta del tiempo se estimará en semestres.

A modo de repaso se hará el cálculo de la tasa periódica con la función TASA.NOMINAL.

Imagen 26: *Función TASA.NOMINAL*



Posteriormente dar clic en *Aceptar*, y como el resultado es una tasa nominal, es necesario dividir el resultado en el número de capitalizaciones, que para el caso es 2, así se obtendrá la tasa periódica semestre vencido.

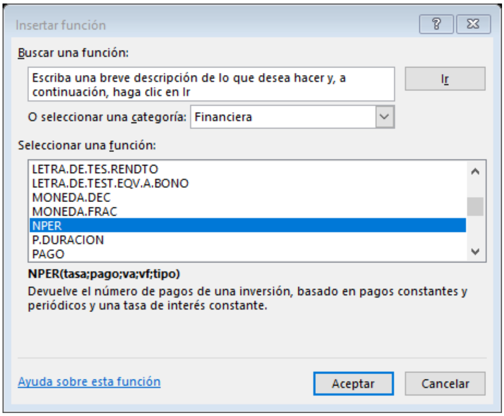
Anualidad	8,000	8,000
Valor Futuro	125,015	125,015
Tasa de Interés (EA)	8.00%	C95;E96)/E96
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (Años)	**?**	

El resultado es:

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tasa de interés (EA)	8 %	0,04
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (años)	?	

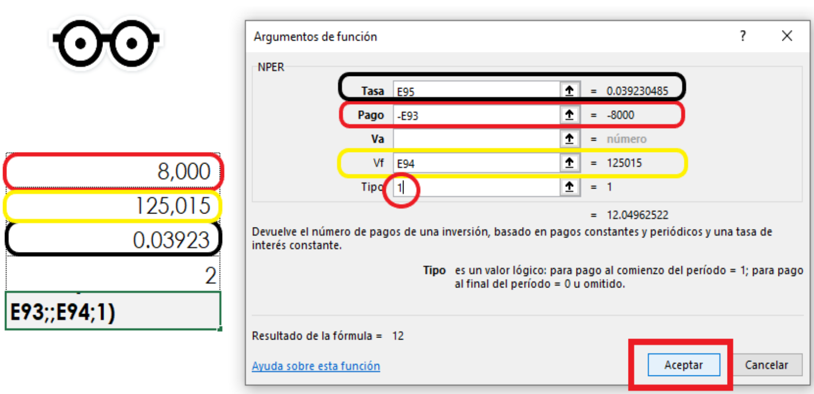
Finalmente, es necesario ubicarse en la celda gris de la tabla de datos de salida y proceder a insertar la función NPER:

Imagen 27: *Función NPER*



Después la ventana emergente solicitará la información que ya se tiene en la tabla como tasa de interés y pago o anualidad; recordar que esta tendrá un signo negativo, en este caso se cuenta con el valor futuro y finalmente con tipo. Como en este caso es una anualidad anticipada digitar *1* y, finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Imagen 28: *Función NPER variables*



Luego de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tasa de interés (EA)	8 %	0,04
Capitalización	Semestral	2
Tiempo (años)	?	**12**

En caso de que el problema no suministre el valor futuro, pero sí el actual o presente, el procedimiento es el mismo y el resultado será igual.

Respuesta: Los números de pagos (o el tiempo) sobre 8.000 que deben efectuarse para obtener un valor futuro de 125.015 a razón del 8 % EA son **12**.

EJEMPLO 14

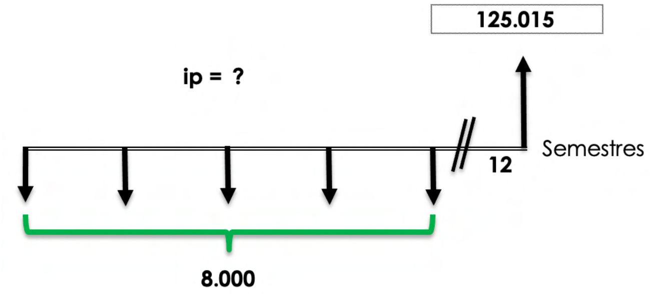
En este caso se determinará la tasa de interés aplicada a una anualidad anticipada. Como se desarrolló en el ejemplo 16, también se formularán las variables en Excel y se tomará el mismo caso del ejercicio 11. Ver cómo esto:

Tabla 4-6 *Tasa de interés de una anualidad anticipada*

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Tasa de interés	?	

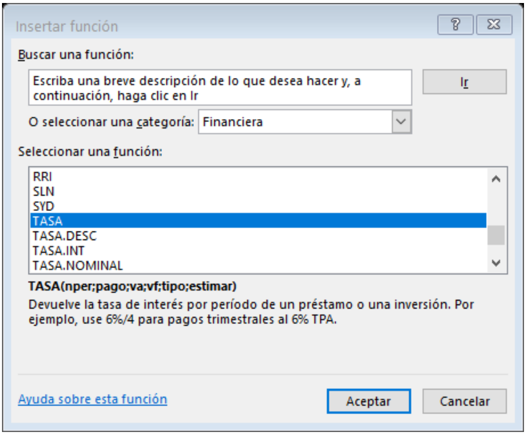
.

Gráfica 4.10 *Tasa de interés de una anualidad anticipada*



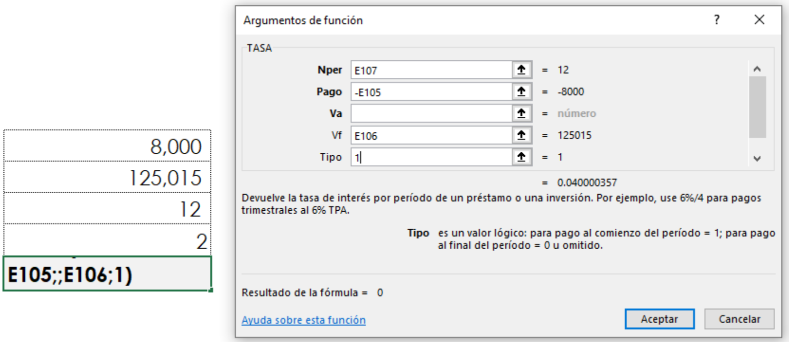
Como se observa en la tabla 4-6, las variables son las del caso 11 trabajado anteriormente, luego de ubicarse en la celda gris de los datos de salida y se procede a insertar la función *TASA* ya trabajada en otros temas:

Imagen 29: *Función TASA*



Posteriormente, la nueva ventana emergente solicitará cierta información, con la cual ya se cuenta en la tabla organizada como lo es tiempo y pago o anualidad. Recordar que esta tendrá un signo negativo, en este caso se cuenta con el valor futuro y finalmente el tipo; como se está desarrollando una anualidad anticipada, digitar *1* y, por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 30: *Función TASA variables*



Luego de que se tienen las variables listas, el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente pulsar en *Aceptar*.

Anualidad	8.000	8.000
Valor futuro	125.015	125.015
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Tasa de interés	?	**0,04**

Respuesta: Para el caso, la tasa aplicada en la anualidad corresponde al **4 % sv**.

EJEMPLO 15

Ahora se presentará cómo calcular el valor presente del ejemplo 12, el cual se trata de una anualidad anticipada; esta es muy utilizada en temas de créditos de sistema de pagos cuota fija o en los contratos de arrendamiento.

Suponiendo que existe un tomador de una bodega en arriendo, en la cual paga 8.000 dólares cada semestre y tiene un contrato por 6 años con el dueño del bien; en caso de existir una negociación por pago anticipado del valor del acuerdo a una tasa del 4 %.

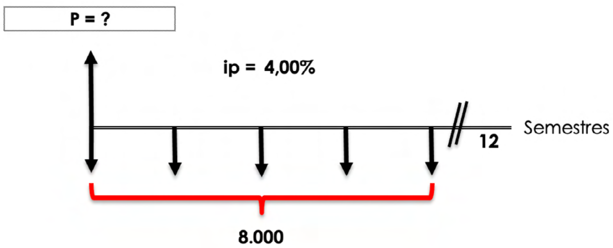
¿Cuánto tendría que pagar el tomador por el contrato al inicio de este?

Teniendo en cuenta la metodología trabajada anteriormente en relación con el planteamiento del problema en datos de entrada y salida en Excel, éste quedaría de la siguiente manera:

Tabla 4-7 *Valor presente o actual de una anualidad anticipada*

Anualidad	8.000	8.000
Tasa de interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor actual o presente	?	

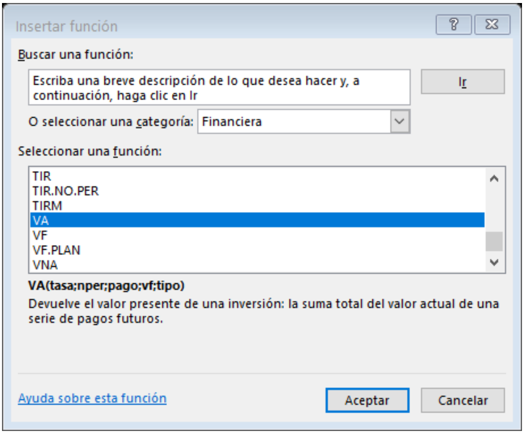
Gráfica 4.11 *Valor presente o actual de una anualidad anticipada*



Como se observa en la tabla 4-7, las variables son las del ejemplo 12; posteriormente, se debe ubicar en la celda gris de los datos de salida y se procede a insertar la función *VA* también ya utilizada en temas atrás.

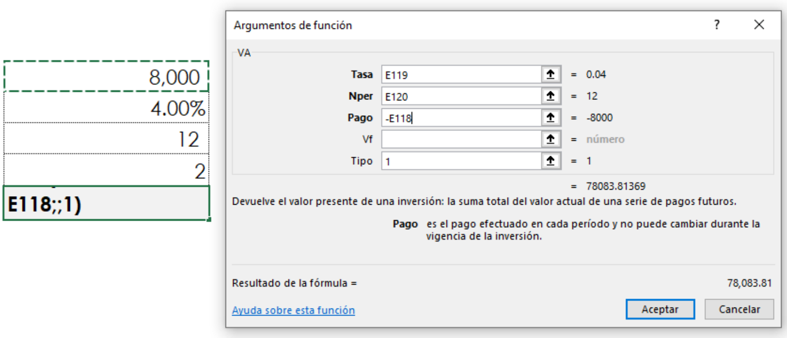
Ver como es esto:

Imagen 31: Función VA



Luego la nueva ventana emergente solicitará cierta información, la cual ya se encuentra en la tabla organizada como lo es la tasa de interés, tiempo y pago o anualidad. Recordar el pago tendrá un signo negativo, y finalmente en tipo. Como se está desarrollando una anualidad anticipada, se debe digitar *1*, y por último dar clic en *Aceptar*.

Imagen 32: Función VA variables



Después de que se tiene las variables listas, se observar que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Anualidad	8.000	8.000
Tasa de interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor actual o presente	?	**78.084**

Respuesta: En caso del tomador decidir pagar hoy el valor del contrato a razón del 4 % sv, tendría que acreditar de su cuenta una suma equivalente a **78.084** dólares.

EJEMPLO 16

Ahora se calculará el valor futuro del ejemplo 11, siendo esta una anualidad anticipada utilizada en temas de créditos con sistema de pago cuota fija o en los contratos de arrendamientos como ya se había mencionado.

Suponga que existe un tomador de una bodega en arriendo, por la cual paga 8.000 dólares cada semestre y tiene un contrato por 6 años con el dueño del bien; en caso de existir una negociación por pago único una vez termine el contrato, cuyo acuerdo fija una tasa del 4 %.

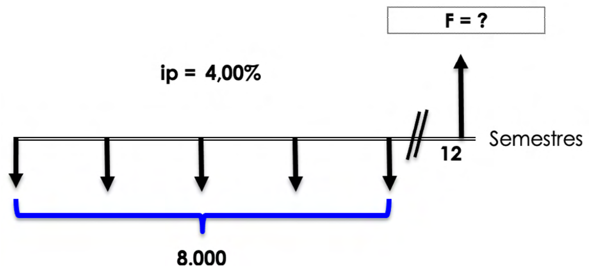
¿Cuánto tendría que pagar el tomador por el contrato una vez termine este?

Teniendo en cuenta la metodología trabajada el planteamiento del problema en datos de entrada y salida en Excel se daría de la siguiente manera:

Tabla 4-8 *Valor futuro de una anualidad anticipada*

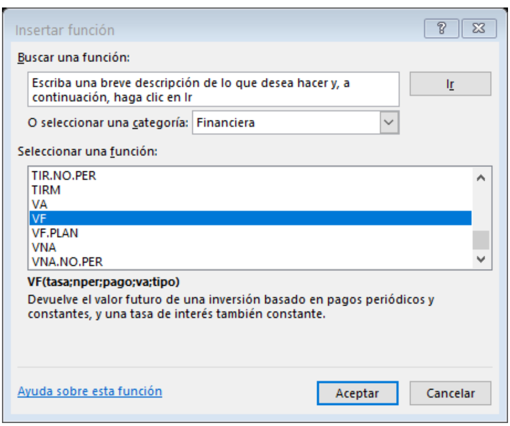
Anualidad	8.000	8.000
Tasa de Interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor futuro	?	

Gráfica 4.12 *Valor futuro de una anualidad anticipada*



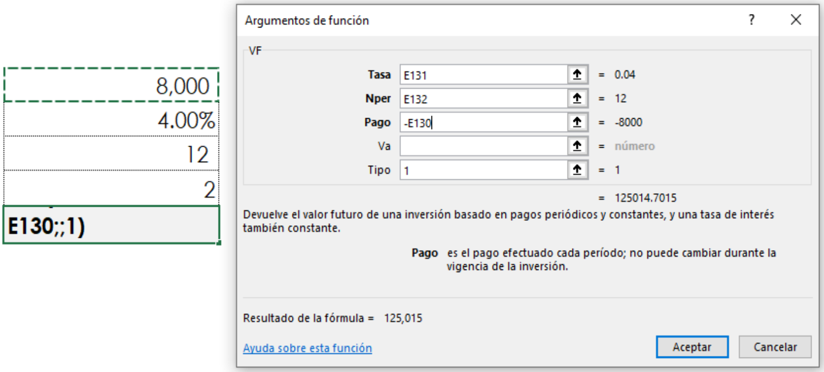
Como se observa en la tabla 4-8, las variables son las del caso o ejemplo 11; posteriormente, es necesario ubicarse en celda gris de datos de salida y posteriormente se procede a insertar la función *VF* también ya utilizada en temas atrás. Ver como hacerlo:

Imagen 33: Función VF



Luego la nueva ventana emergente solicitará cierta información, la cual ya reposa en la tabla organizada como es la tasa de interés, tiempo y pago o anualidad; recordar que esta tendrá un signo negativo, y finalmente el tipo. Como se está desarrollando una anualidad anticipada, es necesario digitar *1* y, por último, dar clic en *Aceptar*.

Imagen 34: *Función VF variables*



Después de contar con las variables necesarias, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Anualidad	8.000	8.000
Tasa de interés - ip	4 %	0,04
Tiempo (años)	6	12
Capitalización	Semestral	2
Valor futuro	?	**125.015**

Respuesta: En caso de que el tomador decida pagar al final del contrato un único pago teniendo en cuenta una razón del 4 % sv, el valor para pagar sería una suma equivalente a **125.015** dólares.

PROBLEMAS

1 - RJ necesita reunir 25.000.000 COP para el día 10-12-2025, para tal fin constituye un fondo de ahorro mediante depósitos trimestrales, efectuándose el primero el 10-09-2020 y el último el 10-06-2025. Además, se efectúa un pago extraordinario de 1.000.000 COP el 10-03-2024. Si el fondo paga el 16 % ATV, realizar el diagrama de flujo. Además, ¿cuál es el valor de cada pago? ¿Cuál fue la TEA aplicada en la operación? **Respuesta: 735,348 y 16.99 %**.

2 - Un electrodoméstico se financia de la siguiente forma: una cuota inicial de $400.000 y 12 cuotas iguales mensuales de $85.000 pagaderas de forma anticipada. Si la tasa que se le cobra es del 3,5 % mensual, ¿cuál es valor del electrodoméstico? **Respuesta: $ 1.250.131,83**.

3 - Un artículo que tiene un valor de contado de $3.000.000 se compra financiado de la siguiente forma: una cuota inicial de $250.000 y cuotas mensuales de $194.125,16 pagaderas de forma anticipada. Si le cobran una tasa del 3 % mensual, ¿en cuánto tiempo termina de pagar el artículo? **Respuesta: 18 meses**.

4 - ¿Cuánto dinero de acumularía si se efectúan 60 pagos iguales mensuales de $500.000, si el banco liquida intereses al 0,9 % mensual. **Respuesta: $ 39.548.156,63**.

5 - Una deuda de $50.000 se va a pagar mediante 12 pagos uniformes vencidos, con una tasa del 2 % mensual. Hallar el valor de cada pago determinando la fecha focal el día de hoy y establecer la fecha del pago número12. **Respuesta: $ 4.727,99**.

6 - Una persona empieza el 5 de julio de 2016 a hacer depósitos de $150.000 mensualmente, el día 5 de cada mes. Estos depósitos son efectuados en una entidad financiera que paga el 12 % AMV, pero a partir del 5 de octubre de 2017 decidió que sus depósitos serían de $200.000. El último depósito lo hizo el 5 de agosto de 2019. Si el 5 de

octubre de 2019 decide pagar la cuenta, ¿cuál será el monto de sus ahorros? **Respuesta: $ 8.343.115,98**.

7 - Una persona arrienda una casa en $500.000 pagaderos por mes anticipado, si tan pronto como recibe cada arriendo lo invierte en un fondo que paga el 2 % mensual, ¿cuál será el monto de sus ahorros al final de un año? **Respuesta: $ 6.840.165,76**.

8 - Un contrato de arrendamiento estipula pagos mensuales de $400.000 al principio de cada mes durante un año. Si suponemos una tasa de interés del 30 % CM, ¿cuál será el valor del pago único que hecho al principio del contrato lo pagaría en su totalidad? **Respuesta: $ 4.205.683,49**.

9 - Una persona necesita reunir 12.000 USD para el día 15-08-2015, para tal fin constituye un fondo de ahorro mediante depósitos bimestrales, efectuándose el primero el 15-04-2010 y el último el 15-02-2015; además, se efectúa un pago extraordinario de 1.200 USD el 15-12-2013. Si el fondo paga el 12 % ABV, ¿cuál es el valor de cada pago? **Respuesta: 244 dólares**.

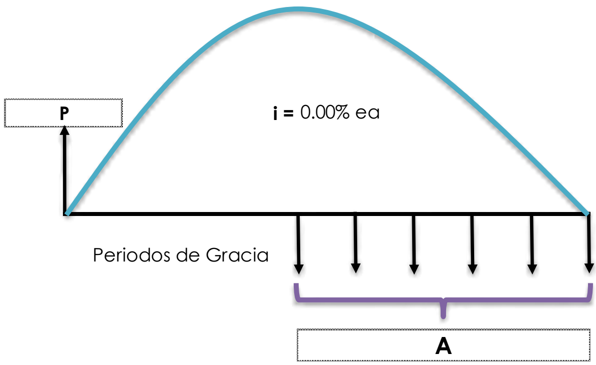
10 - Una máquina produce 2.000 unidades mensuales, las cuales deben venderse a $ 80 c/u. El estado actual de la máquina es regular y si no se repara podrá servir durante seis meses más y luego desecharla, pero si hoy le hacemos una reparación total a un costo de $ 800.000, se garantiza que la máquina podrá servir durante un año contado a partir de la reparación. Suponiendo una tasa del 4 %, ¿será aconsejable repararla? **Respuesta: No es aconsejable.**

4.7 ANUALIDADES DIFERIDAS

Diferir (del latín *differre*), aplazar la ejecución de un acto.

Son aquellas anualidades valoradas con posterioridad a su origen. El tiempo que transcurre entre el origen de la anualidad y el momento de valoración es el periodo de diferimiento, gracia o carencia.

Gráfica 4.13 *Diagrama de anualidad diferida*



Para recordar y tener en cuenta que este tipo de anualidades tiene un periodo de gracia, es decir, unos tiempos cuando no se efectúan pagos, pero ello no quiere decir que no se apliquen o cobren intereses. Ver el siguiente caso:

EJEMPLO 17

¿Qué valor debe pagar mensualmente una persona que toma un crédito de 4.000.000 um con las siguientes condiciones: la entidad financiera otorga el empréstito para ser pagado en seis pagos iguales, teniendo en cuenta un periodo de gracia de tres meses a razón del 32,92 % EA?

$P = 4.000.000 \quad n = 6 \quad k = 3 \quad i = 32{,}92\ \% \quad kp = \text{mensual} \quad A = ?$

Antes, se debe hallar la tasa periódica para poder reemplazar en la fórmula, así: $\mathbf{ip} = (1 + 0{,}3292)$ ^ $(1 \div 12)$ - $1 \ = 0{,}023998$

Luego determinar la fórmula para utilizar.

***Fx* Fórmula:**

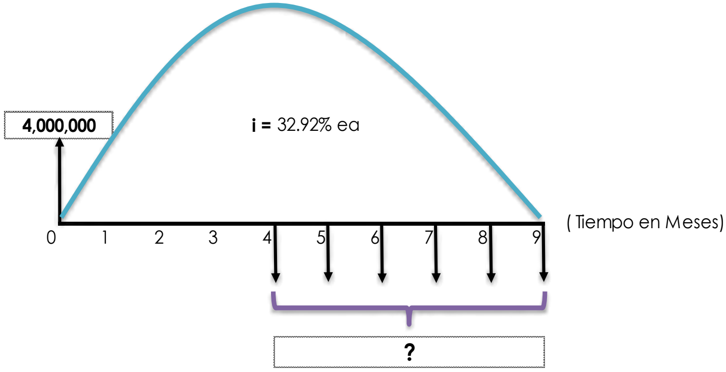
$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})^{\mathrm{k}}$$

Despejando A quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} = \mathrm{P} \div [\,(1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}) \div \mathrm{i}\,](1+\mathrm{i})^{-\mathrm{k}}$$

Tras tener las variables listas para aplicar, se diseña el diagrama de pagos o flujo de caja.

Gráfica 4.14 *Diagrama de anualidad diferida*



Finalmente, sustituir.

Cómo hacerlo en la calculadora *Fx-82MS:*

$$A = 4000000 \div (((1\text{-}(1+0.023998)^{\wedge\text{-}6}) \div 0.023998\ ) \times (1+0.023998\ )^{\wedge\text{-}3})$$

$$\mathbf{A = 777.137}$$

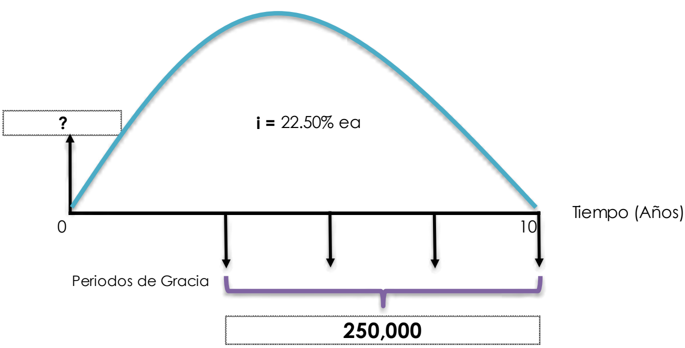
Respuesta: El valor que debe pagar la persona que tomó el crédito con las condiciones anteriormente descritas es de **777.137 um**.

EJEMPLO 18

Determinar el valor de un crédito otorgado por una entidad financiera a una persona que se le dieron cinco periodos de gracia y luego pagó al final de cada mes la suma de $250.000 durante 10 años, teniendo en cuenta que la entidad liquidaba intereses a razón del 22,5 % EA.

Para resolver este problema de anualidad diferida es necesario ver el problema desde un diagrama, el cual sería de la siguiente manera:

Gráfica 4.15 *Diagrama de valor presente anualidad diferida*



Según el diagrama, la información planteada en el caso por resolver es necesario despejar y convertir el tiempo y la tasa de interés en periodos mensuales.

$\mathrm{Ip} = (1 + 0{,}0225)\text{^}(1 \div 12) - 1 = \mathbf{0{,}01705555}$

$\mathrm{n} = 10 \text{ x } 12 = \mathbf{120}$

Por lo anterior se tendrá lo siguiente:

$\mathrm{A} = 250.000 \qquad \mathrm{i} = 0{,}01705555 \qquad \mathrm{n} = 120 \qquad \mathrm{k} = 5 \qquad \mathrm{kp} = \mathrm{mv} \qquad \mathrm{P} = ?$

Para resolver se utiliza la siguiente fórmula:

Fx Fórmula:

$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{k}}$$

Cómo resolverlo en la calculadora *Fx-82MS:*

$\mathbf{P} = 250000 \text{ x } ((1\text{-}(1+0.01705555)^{\wedge -120}) \div 0.01705555\ ) \text{ x } (1+ 0.01705555)^{\wedge -5}$

$\mathbf{P} = 11.699.414$

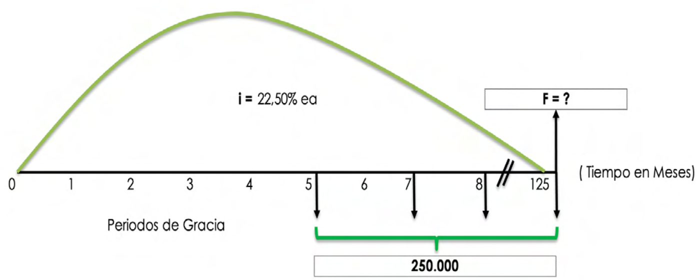
Respuesta: El valor del crédito otorgado fue de **$11.699.414**.

EJEMPLO 19

Determinar el valor futuro de un crédito otorgado por una entidad financiera a una persona que se le asignaron cinco periodos de gracia y luego pagó al final de cada mes la suma de $250.000 durante 10 años, teniendo en cuenta que la entidad liquidaba intereses a razón del 22,5 % EA.

Para resolver este problema de anualidad diferida es necesario ver el problema desde un diagrama, el cual sería de la siguiente manera:

Gráfica 4.16 *Diagrama de valor futuro anualidad diferida - Ejemplo 10*



El diagrama muestra la información planteada en el caso por resolver, luego se tendrá que despejar o convertir el tiempo y la tasa de interés en periodos mensuales.

$\mathrm{Ip} = (1 + 0{,}225)^\wedge(1 \div 12) - 1 = \mathbf{0{,}01705555}$

$\mathrm{n} = 10 \text{ x } 12 = \mathbf{120}$

Por lo anterior se tendría lo siguiente:

$\mathrm{A} = 250.000 \qquad \mathrm{i} = 0{,}01705555 \qquad \mathrm{n} = 120 \qquad \mathrm{k} = 5 \qquad \mathrm{kp} = \mathrm{mv} \qquad \mathrm{F} = ?$

Para resolver se utiliza la siguiente fórmula:

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\left[\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{1}}{\mathbf{i}}\right](\mathbf{1}+\mathbf{i})^{-\mathbf{k}}$$

$$F = 250.000\left[\frac{(1+0{,}01705555)^{120} - 1}{0{,}01705555}\right](1+0{,}01705555)^{-5}$$

$$\mathbf{F} = 89.027.669$$

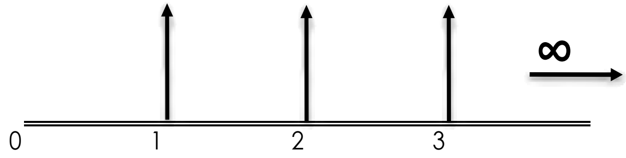
Respuesta: El valor futuro del crédito otorgado equivale a **$89.027.669**.

4.8 ANUALIDADES PERPETUAS

Las anualidades perpetuas son una serie de ingresos o egresos que tienen infinito número de pagos, en realidad estas anualidades infinitas no existen ya que todo tiene un final; sin embargo, cuando el número de pagos es muy grande se asume que es infinito (Baca Currea, 2000).

Este tipo de anualidades son típicas cuando se pone a rentar un capital y solo se retiran los intereses.

Gráfica 4.17 *Anualidad perpetua o infinita*



La fórmula para utilizar será:

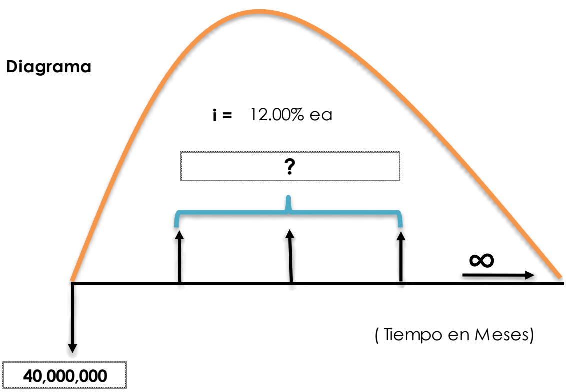
Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{P} = \frac{A}{i}$$

EJEMPLO 20

Calcule la renta perpetua mensual vencida que se genera al comprar un bono del Gobierno por un valor de 40.000.000 COP, los cuales poseen una tasa de interés del 12 % EA.

El diagrama de la inversión quedaría de la siguiente forma:



Luego se procede a llevar la tasa a mv así: $ip = (1 + 0{,}12)$ ^ $(1 \div 12) - 1 = 0{,}00948879$

Despejando la fórmula de valor presente se tendrá: $\boldsymbol{A} = P * i$

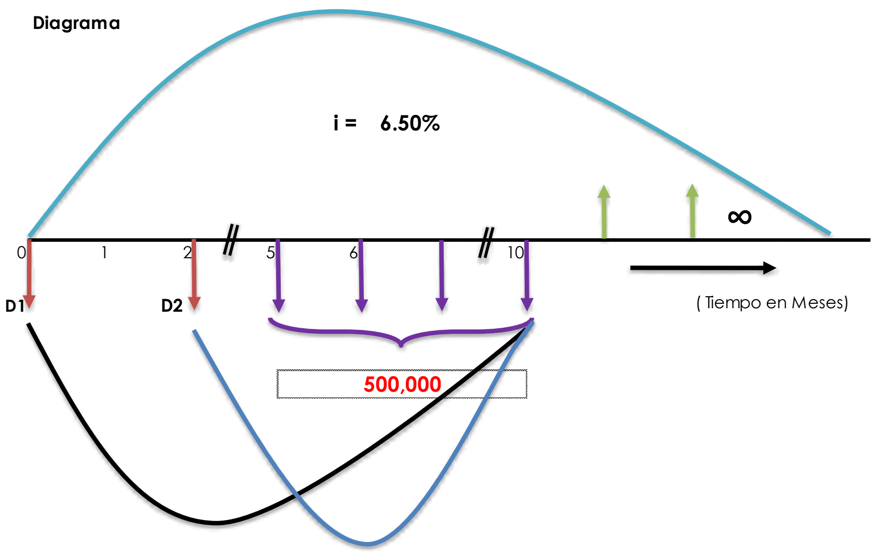
$A = 40.000.000 \ \text{x} \ 0{,}00948879 \ = 379.551{,}72$

Respuesta: El valor por recibir de forma perpetua será equivalente a **379.551,72 COP**.

EJEMPLO 21

Un joven inversionista deposita hoy 10 millones de COP, posteriormente 5 millones a los 2 años, luego al final del año 5 inicia a hacer depósitos mensuales de 500.000 COP durante 5 años. Si el fondo de inversiones le reconoce 6,5 % EA, ¿cuánto podrá retirar de manera indefinida comenzando a partir del año 11?

Para resolver este caso es necesario realizar un diagrama de flujo, el cual dará un panorama más claro del paso por seguir para resolver de forma acertada el problema financiero.



Como se observa en el diagrama, es necesario determinar el valor futuro en el año 10, esto es lo que se conoce como fecha focal. De esta manera se puede determinar el pago perpetuo a partir de ahí, sin embargo, es necesario realizar tres procesos: uno corresponde en llevar al año 10 el valor del primer y segundo depósito mediante el cálculo del VF a través del interés compuesto, luego determinar al mismo año el valor de todos los pagos efectuados desde el año cinco de forma mensual y, finalmente, sumar. Lo anterior será de la siguiente manera:

$\text{Depósito } 1 = 10.000.000 \qquad n = 10 \qquad ip = 0{,}065 \qquad VF = ?$

$VF = 10.000.000\ (1 + 0{,}065)^{\wedge 10} = \mathbf{18.771.374{,}65}$

$\text{Depósito } 2 = 5.000.000 \qquad n = 8 \qquad ip = 0.065 \qquad VF = ?$

$VF = 5.000.000\ (1 + 0{,}065)^{\wedge 8} = \mathbf{8.274.978{,}36}$

Para hallar el valor futuro de los pagos uniformes, es necesario pasar la tasa efectiva a mes vencido al igual que el tiempo a meses.

$Ip = (1 + 0{,}065) \wedge (1 \div 12) - 1 = 0{,}00526169 \qquad n = 5 * 12 = 60$

$A = 500.000 \qquad ip = 0{,}00526169 \qquad n = 60 \qquad kp = mv \qquad F = ?$

En la calculadora *Fx-82MS:*

$\mathbf{F} = 500000 \text{ x } (((1 + 0.00526169)^{\wedge 60} - 1) \div 0.00526169) = \mathbf{35.168.012{,}81}$

$\mathbf{F = 18.771.374{,}65 + 8.274.978{,}36 + 35.168.012{,}81 = 62.214.365{,}81}$

La fórmula despejada para hallar el pago es A = P * i

A = 62.214.365,81 x 0,00526169 = **327.353**

Respuesta: El valor que el inversionista recibirá de manera indefinida, una vez haya efectuado los depósitos después de los diez años equivale a **327.353 COP**.

Cómo despejar una fórmula

Valor presente de una anualidad anticipada… Despejar **A**

$$P = \mathbf{A}\left|\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right|(1+i) \quad \ldots \quad P \div |\ (1-(1+i)\hat{}-n)/\ i\ \ |(1 \div i) = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A = P \div |\ (1-(1+i)\hat{}(-n))/i\ \ |(1+i)}$$

Valor presente de una anualidad anticipada… Despejar **n**

$$P = A\,|\ (1-(1+i)\hat{}(-n)\ \ )/i\ \ |(1+i) \quad \ldots\ldots \qquad \frac{P}{A(1+i)} = \frac{1-(1+i)}{i}$$

Como no se deben tener variables negativas (?) es necesario multiplicar x -1

$$\frac{P_i}{A(1+i)} = 1-(1+i)^{-n} \quad \textbf{(-1)} \quad \ldots\ldots \qquad \frac{Pi}{A(1+i)} - 1 = -(1+i)^{-n} \quad \textbf{(-1)}$$

$$-\frac{Pi}{A(1+i)} + 1 = (1+i)^{-n} \qquad \text{ordenando,} \quad 1 - \frac{P_i}{A(1+i)} = (1+i)^{-n}$$

Necesario bajar *n* que es un exponente, para lo cual se aplica *Log*.

$$\log\left(1 - \frac{Pi}{A(1+i)}\right) = -n\log(1+i)$$

Nuevamente se debe multiplicar x -1, de esta forma quedaría así:

$$-\log\left(1 - \frac{Pi}{A(1+i)}\right) = n\log(1+i)$$

$$\mathbf{n} = \frac{-\log\left(1 - \frac{\mathrm{Pi}}{\mathrm{A}(1+\mathrm{i})}\right)}{\log(1+\mathrm{i})}$$

Fórmulas valor futuro de una anualidad anticipada

$$\mathbf{F} = \mathrm{A}|\ ((1+\mathrm{i})\hat{}\mathrm{n} - 1)/\mathrm{i}\ \ |(1+\mathrm{i})$$

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(1 - \frac{\mathrm{Fi}}{\mathrm{A}(1+\mathrm{i})}\right)}{\log(1+\mathrm{i})}$$

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{F} \div |\ ((1+\mathrm{i})\hat{}\mathrm{n} - 1\ )/\mathrm{i}\ \ |(1+\mathrm{i})$$

Fórmulas valor futuro de una anualidad vencida

$$\mathbf{F} = \mathrm{A}\left|\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}}\right|$$

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(\frac{\mathrm{Fi}}{\mathrm{A}} + 1\right)}{\log(1+\mathrm{i})}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{F} \div \left|\frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{i}}\right|$$

Fórmulas valor presente de una anualidad anticipada

$$\mathbf{P} = \mathrm{A}|\ (1 - (1+\mathrm{i})\hat{}(-\mathrm{n}))/\mathrm{i}\ \ |(1+\mathrm{i})$$

$$\mathbf{n} = \frac{-\log\left(1 - \frac{\mathrm{Pi}}{\mathrm{A}(1+\mathrm{i})}\right)}{\log(1+\mathrm{i})}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{P} \div |\ (1 - (1+\mathrm{i})\hat{}(-\mathrm{n}))/\mathrm{i}\ \ |(1+\mathrm{i})$$

Fórmulas valor presente de una anualidad vencida

$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|$$

$$\mathbf{n} = \frac{\log\left(1 - \frac{\mathrm{Pi}}{A}\right)}{\log(1+\mathrm{i})}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{P} \div \left|\frac{1 - (1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|$$

Fórmulas valor presente de una anualidad diferida

$$\mathbf{P} = \mathrm{A}\left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{k}}$$

$$\mathbf{A} = \mathrm{P} \div \left|\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right|(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{k}}$$

$$\mathbf{n} = -\frac{\log\left(1 - \frac{\mathrm{Pi}}{\mathrm{A}(1 + \mathrm{i})^{-\mathrm{k}}}\right)}{\log(1 + \mathrm{i})}$$

Fórmulas valor presente de una anualidad perpetua

$\mathbf{P} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{i}}$ $\mathbf{A} = \mathrm{P} \times \mathrm{i}$ $\mathbf{i} = \mathrm{A} \times \mathrm{P}$

PROBLEMAS

- Un empresario solicita a un banco, del cual es cliente preferencial, que le preste 100 millones de COP para ser pagados en 60 pagos trimestrales de A cada uno, pero también solicita que le permitan pagar su primera cuota hasta un año después de recibir el préstamo ya que el dinero será utilizado para sufragar gastos de una importación de maquinaria. Determinar la A con una tasa del 2 % tv. **Respuesta: 3.113.937**.

- Hallar el valor presente de pago perpetuo mensual de 100.000 um, suponiendo una tasa de interés del 10,5 % a. **Respuesta: 11.968.657,89**.

- Calcule la TEA de una serie de pagos perpetuos mensuales de 407.412,38, de una inversión equivalente a 100.000.000 um. **Respuesta: 5 % EA**.

- Encontrar el valor de la incógnita teniendo en cuenta las siguientes variables: A = 5.963.409,99 i = 8,24 % EA n = 3 años k = 6 kp = tv P = ¿ **Respuesta: 56.000.000**.

5
LEASING

5.1 OBJETIVO

Conocer las herramientas que permitan a las empresas o las familias financiar y adquirir un activo sin contar con los recursos financieros necesarios para comprarlo.

5.2 DEFINICIÓN

El *leasing* es un término inglés que se utiliza para identificar lo que se conoce como arrendamiento financiero, es decir, el propietario de un activo cede su bien para ser administrado y usufructuado por otro, teniendo en cuenta el tiempo o la duración del contrato, una tasa de interés y finalmente una opción de compra, para el caso de *leasing* financiero. (Meza, 2017)

Desde décadas atrás esta modalidad de financiación viene tomando fuerza hasta hoy, cuando cuenta con ventajas operativas, financieras y contributivas.

5.3 TIPOS DE *LEASING*

En el ámbito financiero y normativo existen dos tipos de contratos de arrendamientos, estos son el *leasing* operativo y el financiero.

El *leasing* operativo es aquel en el cual el dueño del activo (arrendador) cede su bien a una empresa o persona (arrendatario) para ser utilizado por un tiempo acordado, este se obliga a pagar periódicamente al arrendador una cuota o canon, determinado por el valor del activo más impuestos, el tiempo de contrato y la tasa de interés; al finalizar los términos el activo es regresado a su propietario.

Por su parte, el *leasing* financiero cuenta con las mismas características que el operativo, salvo que para determinar el canon es necesario tener en cuenta el valor futuro del activo, que se establece con un porcentaje del valor inicial de este y que comúnmente se denomina opción de compra, la cual al final del contrato puede ser tomada por el arrendador para ser pagada y quedar como propietario del activo.

5.4 VENTAJAS GENERALES

- No es necesario contar con el valor total del dinero para adquirir el bien.
- No se incurre en gastos administrativos como mantenimiento, depreciación y pago de impuestos.
- Se mantiene un bien de acuerdo con las necesidades y tecnologías requeridas.
- Es posible cambiar o actualizar el activo.
- Ajusta el flujo de caja del arrendador y el arrendatario.
- Sus trámites son fáciles y rápidos.
- Se libera la capacidad de pago y endeudamiento.
- Se puede adquirir un bien nacional e importado.
- Otros.

5.5 DESVENTAJAS

- No es posible entregar el activo antes del término del contrato.
- Cláusulas penales por incumplimiento.
- Finalmente, en algunos casos no es factible tomar como opción de compra el bien.

5.6 VARIABLES

Para el desarrollo del contrato de arrendamiento-*leasing*, se tendrá en cuenta la siguiente nomenclatura.

VA - Valor del activo

i = Tasa de interés.

n = Tiempo o plazo del contrato.

Cn = Canon o alícuota.

OpC = Opción de compra.

Kp = Capitalización.

“El leasing es una modalidad de anualidad en la cual los pagos o el canon son uniformes durante el plazo del contrato”.

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{Cn} = \frac{\mathbf{VA} - \mathbf{opC}\,(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\left[\frac{\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}}\right]}$$

5.7 *LEASING* OPERATIVO

Como ya se vio anteriormente, en el *leasing* operativo el activo regresa a su propietario una vez venzan los términos del contrato. Ver el siguiente caso:

EJEMPLO 1

Una empresa metalúrgica tomó un contrato de arrendamiento operativo con el fin de mejorar su proceso productivo, en el cual se pacta con la empresa de *leasing* los siguientes términos: valor del activo 350 millones, tiempo del contrato un año, tasa de interés 15,5 % EA y pagos mensuales vencidos. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál será el valor del canon por pagar mes a mes?

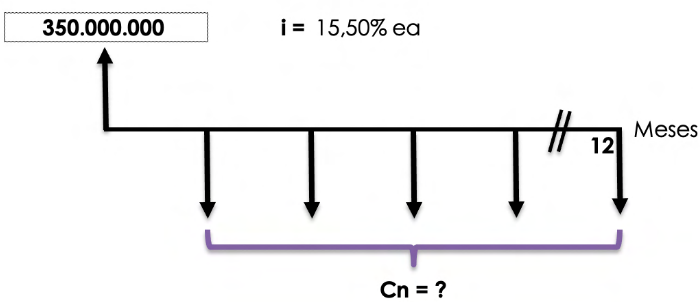
Solución:

$\mathrm{VA} = 350.000.000 \qquad \mathrm{i} = 15{,}5\ \% \qquad \mathrm{n} = 1 \qquad \mathrm{Kp} = \mathrm{mensual} \qquad \mathrm{Cn} = ?$

Como la forma de pago es mes vencido, es necesario pasar a meses la tasa y el tiempo.

$ip = [\,1 + 0{,}155\,]^{\frac{1}{12}} - 1 = \quad \mathbf{0{,}0120808} \qquad \mathrm{n} = 1 \times 12 = \mathbf{12}$

Gráfica 5.1 *Canon leasing operativo*



Como se trata de *leasing* operativo, la fórmula tiene una variación o simplemente en la general se debe sustituir por cero la opción de compra.

Fórmula:

$$\mathbf{Cn} = \mathbf{VA} \div \left[\frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}}\right]$$

$$\mathbf{Cn} = 350.000.000 \div \left[\frac{1 - (1 + 0{,}0120808)^{-12}}{0{,}0120808}\right]$$

$$\mathbf{Cn} = 31.507.380$$

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante un año como canon es de **31.507.380**.

5.8 *LEASING* OPERATIVO EN EXCEL

Como se mencionó anteriormente, el cálculo del *leasing* funciona con la misma temática de una anualidad, por ende, para su cálculo en Excel, se utiliza la opción *PAGO* para determinar el canon. Ver cómo desarrollarlo.

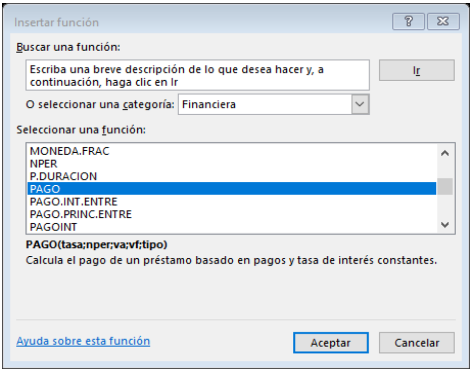
Para ello se elaborará una tabla en Excel con los datos del caso desarrollado del ejemplo 1.

Tabla 5-1 *Canon de leasing operativo*

Valor del activo	350.000.000	**350.000.000**
Tiempo (años)	1	**12**
Tasa de interés (EA)	15,5 %	**0,0120808**
Opción de compra	0 %	**0**
Capitalización	Mensual	**12**
Canon	?	

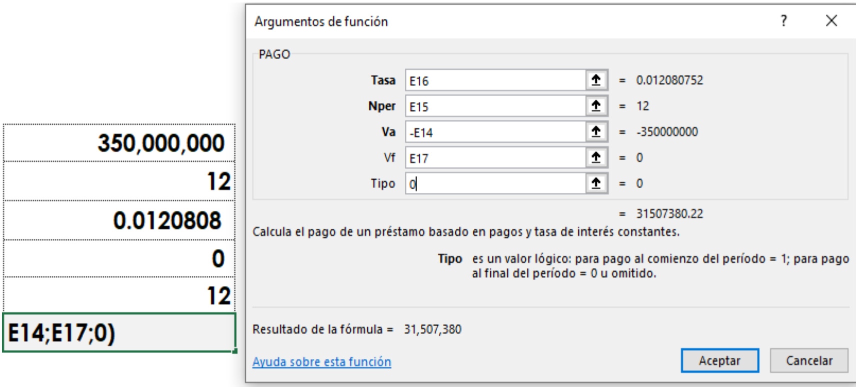
Después, desde la celda gris insertar la función *financiera* y opción *PAGO*, ver cómo es esto:

Imagen 35: *Función PAGO*



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya esta contenida en la tabla como tasa de interés y número de periodos o tiempo; el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, luego el valor futuro cero y finalmente el tipo, que para este caso es *0*, finalmente dar clic en *Aceptar*.

Imagen 36: *Función PAGO variables*



Después de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor del activo	350.000.000	**350.000.000**
Tiempo (años)	1	**12**
Tasa de interés (EA)	15,5 %	**0,0120808**
Opción de compra	0 %	**0**
Capitalización	Mensual	**12**
Canon	?	**31.507.380**

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante un año como canon es de **31.507.380**.

En caso de que el problema requiera hallar el valor de otra variable, a continuación, se encuentran las fórmulas despejadas.

Fx ***Fórmula: Cómo hallar el valor del activo - Leasing operativo.*** En Excel se hallaría con la opción **VA**.

$$\mathbf{VA} = \mathrm{Cn}\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}\right]$$

Fx ***Fórmula: Cómo hallar el tiempo - Leasing operativo.*** En Excel se hallaría con la opción **NPER**.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathrm{LOG}(1-(\mathrm{VA}\cdot \mathrm{i}) \div \mathrm{Cn})}{\mathrm{LOG}(1+\mathrm{i})}$$

5.9 *LEASING* FINANCIERO

El *leasing* financiero es el tipo de arrendamiento en el cual el tomador al arrendar cuenta con la posibilidad de pagar un valor una vez termine el contrato y pasar de arrendador a propietario del bien. Ver algunos ejemplos.

EJEMPLO 2

Una empresa metalmecánica tomó un contrato de arrendamiento financiero por una máquina con el fin de mejorar su proceso productivo. Se pacta con la empresa de *leasing* los siguientes términos: valor del activo 300 millones, tiempo del contrato dos años, tasa de interés 20 % EA, una opción de compra del 10 % y pagos mensuales vencidos. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál será el valor del canon por pagar mes a mes?

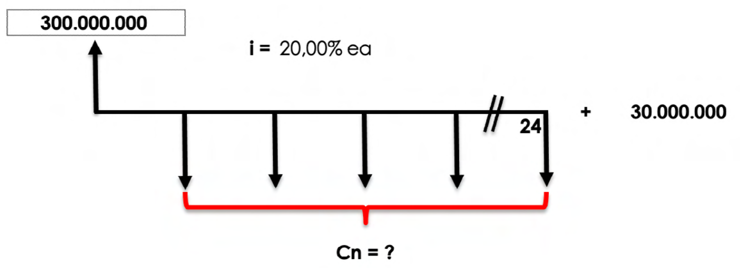
Solución:

$\mathrm{VA} = 300.000.000 \quad \mathrm{i} = 20\ \% \quad \mathrm{n} = 2 \quad \mathrm{opC} = 10\ \% \quad \mathrm{Kp} = \text{mensual} \quad \mathrm{Cn} = ?$

Como la forma de pago es mes vencido, es necesario pasar a meses la tasa y el tiempo.

$$ip = [\,1 + 0{,}20\,]^{\frac{1}{12}} - 1 = \quad \mathbf{0.0153095} \qquad \mathrm{n} = 2 \times 12 = \mathbf{24}$$

Gráfica 5.2 *Canon* leasing *financiero*



***Fx* Fórmula:**

$$\text{Cn} = \frac{\text{VA} - \text{opC}\,(1+\text{i})^{-\text{n}}}{\left[\frac{1-(1+\text{i})^{-\text{n}}}{\text{i}}\right]}$$

$$\mathbf{Cn} = \frac{300.000.000 - 30.000.000\,(1+0{,}0153095)^{-24}}{\left[\frac{1-(1+0{,}0153095)^{-24}}{0{,}0153095}\right]}$$

$\mathbf{Cn} = 13.987.289$

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante dos años como canon es de **13.987.289**, y en caso de optar por la opción de compra y quedarse con el activo deberá pagar 30 millones más.

EJEMPLO 3

Una empresa social del Estado tomó un contrato de arrendamiento financiero por maquinaria pesada con el fin de mejorar sus servicios en obras públicas, los términos que pacta con la empresa de *leasing* son: tiempo del contrato 3 años, tasa de interés 16 % EA, una opción de compra de 50 millones de COP y pagos mensuales vencidos por valor de 16.207151. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿cuál será el valor de la maquinaria tomada en *leasing*?

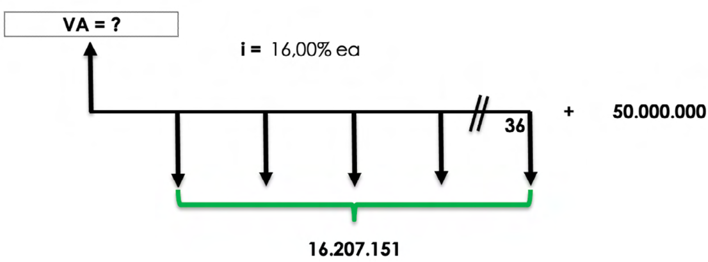
Solución:

$\mathrm{opC} = 50\ \mathrm{M} \quad \mathrm{i} = 16\ \% \quad \mathrm{n} = 3 \quad \mathrm{Cn} = 16.207.151 \quad \mathrm{Kp} = \mathrm{mensual} \quad \mathrm{VA} = ?$

Como la forma de pago es mes vencido, es necesario pasar a meses la tasa y el tiempo.

$ip = [\,1 + 0{,}16\,]^{\frac{1}{12}} - 1 = \ \mathbf{0{,}0124451} \qquad \mathrm{n} = 3 \times 12 = \mathbf{36}$

Gráfica 5.3 *Valor del activo* leasing *financiero*



Fx Fórmula:

$$\mathbf{VA = Cn\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right] + opC(1+i)^{-n}}$$

$$\mathbf{VA} = 16.207.151\left[\frac{1 - (1+0{,}0124451)^{-36}}{0{,}0124451}\right] + 50.000.000\ (1+0{,}0124451)^{-36}$$

$$\mathbf{VA} = 500.000.000$$

Respuesta: El valor de la maquinaria tomada en *leasing* por 3 años tiene un valor de **500.000.000** y en caso de optar por la opción de compra y quedarse con el activo deberá pagar 50 millones más.

5.10 *LEASING* FINANCIERO EN EXCEL

EJEMPLO 4

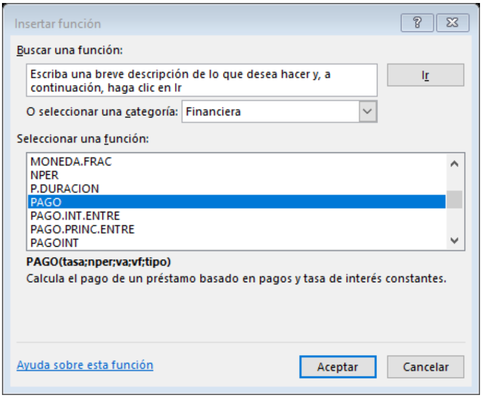
Con Excel el proceso es exactamente igual al *leasing* operativo, salvo que en el valor futuro el valor es la opción de compra. Ver el caso planteado desde una tabla en Excel, la cual solicita calcular el valor del canon.

Tabla 5-2 *Canon de* leasing *financiero a través de Excel*

Valor del activo	300.000.000	**300.000.000**
Tiempo (años)	2	**24**
Tasa de interés (EA)	20 %	**0,0153095**
Opción de compra	10 %	**30.000.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Canon	?	

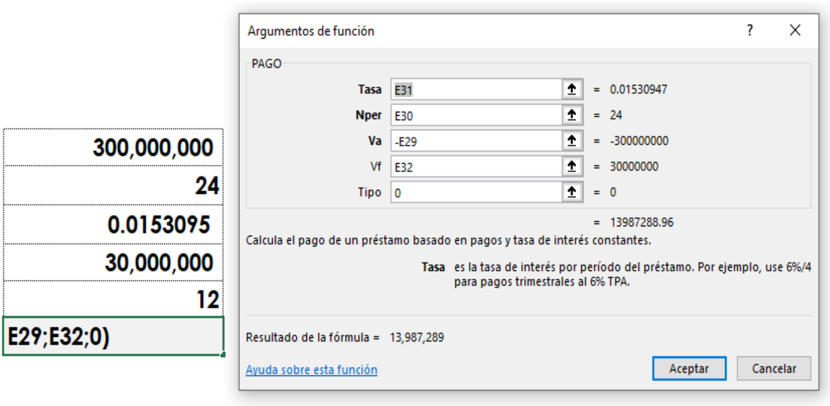
Después, desde la celda gris se debe insertar la función *financiera* y luego la opción *PAGO*, ver cómo es esto:

Imagen 37: *Función PAGO*



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya contiene la tabla como tasa de interés y número de periodos o tiempo; el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, el valor futuro será la opción de compra en valores y, finalmente, el tipo que para este caso es *0*.

Imagen 38: *Función PAGO variables*



Luego de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Valor del activo	300.000.000	**300.000.000**
Tiempo (años)	2	**24**
Tasa de interés (EA)	20 %	**0,0153095**
Opción de compra	10 %	**30.000.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Canon	?	**13.987.289**

Respuesta: El valor que debe pagar el arrendatario al final de cada mes durante dos años como canon es de **13.987.289** y en caso de optar por la opción de compra y quedarse con el activo deberá pagar 30 millones más.

EJEMPLO 5

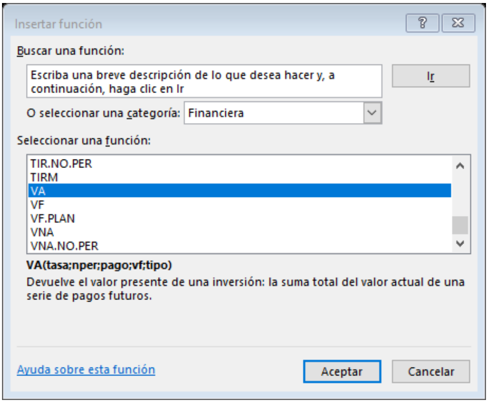
En este caso se calculará el valor del activo financiado mediante *leasing* financiero y se planteará el caso en una tabla de Excel, ver cómo hacerlo:

Tabla 5-3 *Valor del activo de* leasing *financiero a través de Excel*

Canon	16.207.151	**16.207.151**
Tiempo (años)	3	**36**
Tasa de interés (EA)	16 %	**0,0124451**
Opción de compra		**50.000.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor de activo	?	

Después, desde la celda gris se debe hincar la función *financiera*, opción *VA*. Antes de insertar la función es necesario anteponer un signo menos. Así:

Imagen 39: *Función VA*



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya se tienen en la tabla que contiene las variables: canon o pago, número de periodos o tiempo, tasa de interés, la opción de compra que para nuestro caso será el valor futuro y, finalmente, el tipo, que para este caso es cero (0). Luego de tener las variables listas, se observa que el resultado ya aparece previsualizado y es negativo, por tal motivo antes de insertar la función es necesario el sigo negativo. Finalmente pulsar en *Aceptar*.

Imagen 40: *Función VA variables*

Canon	16.207.151	**16.207.151**
Tiempo (años)	3	**36**
Tasa de interés (EA)	16 %	**0,0124451**
Opción de compra		**50.000.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor de activo	?	**500,000,003**

Respuesta: El valor del activo tomado en arriendo con opción de compra según información es de **500.000.003**.

PROBLEMAS

Caso 1:

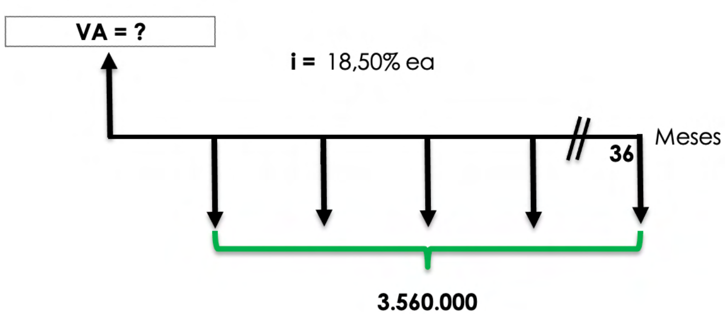
Cn = ? **VA** = 250.000 USD **OpC** = 12 % **i** = 15,5 % EA

n = 5 años **k** = Trimestre vencido **Respuesta:** 16.816

Caso 2:

Suponga que usted es el coordinador de recursos físicos de una entidad del Estado y está en la disyuntiva entre comprar una máquina que vale 180.000.000 o tomarla con la figura de *leasing* con las siguientes condiciones: contrato a un año, una tasa del 17,17 % EA, canon de $16.747.486 mes vencido y una opción de compra por $30.000.000. **Respuesta: Comprar el activo.**

Caso 3:



Nota: La capitalización para el caso 3 es mes vencido. **Respuesta: 99.719.959**.

Caso 4:

Cn = ? **VA** = 250.000.000 **OpC** = 10 % **i** = 17,5 % EA

n = 3 años **k** = Mes vencido **Respuesta: 8.274.779**

6

GRADIENTES

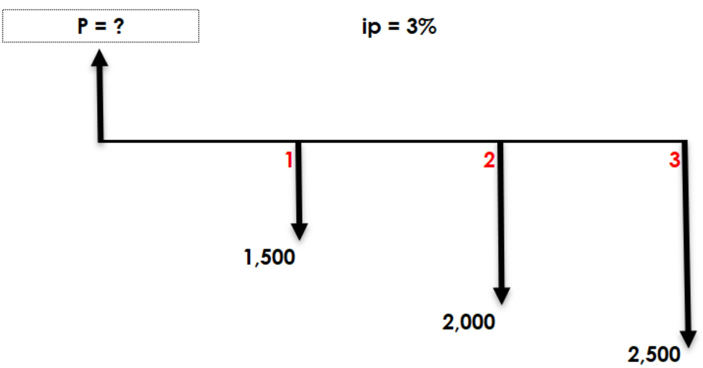
6.1 DEFINICIÓN

Los gradientes, o también denominados series variables, son pagos que aumentan o disminuyen periodo a periodo con respecto al inmediatamente anterior; esta variación constante se presenta en unidades absolutas o relativas.

Los gradientes son muy utilizados en empresas que programan producción lineal y consecuentemente sus costos y gastos también se elevan o disminuyen de manera gradual, sin embargo, estos cálculos matemáticos en la práctica son muy difíciles que se presenten. (Meza, 2017)

Ver cómo lo anterior se refleja gráficamente.

Gráfica 6.1 *Comportamiento de un gradiente*



$$P = \qquad \frac{1.500}{(1+0,03)^{\wedge}1} \qquad \frac{2.000}{(1+0,03)^{\wedge}2} \qquad \frac{2.500}{(1+0,03)^{\wedge}3}$$

P =	**1.456**	**1.885**	**2.288**
P =	**5.629**		

El gráfico muestra cómo un primer pago de 1.500 aumenta en 500 para el segundo y tercer pago, siendo este de 2.500 y 3.000, respectivamente; de igual manera, considerando una tasa de interés del 3 %, el valor presente de estos pagos sería igual a **5.629**.

6.2 CARACTERÍSTICAS DE UN GRADIENTE

Teniendo en cuenta lo visto en series uniformes o anualidades, estos guardan algunas características.

Los pagos deben contener una constante de aumento o disminución.

Los pagos deben guardar la misma periodicidad.

Los pagos pueden ser traídos al presente o llevados al futuro.

Igual número de pagos, igual número de periodos.

6.3 GRADIENTE LINEAL (creciente)

El gradiente lineal o aritmético es constante en su variación, puede ser creciente o decreciente, el creciente es aquel que aumenta positivamente un valor constante durante todo el tiempo, y el decreciente es aquel cuya constante es negativa, es decir, disminuye periodo a periodo en la misma cantidad.

***Fx* Fórmulas:**

$$\mathbf{P = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]}$$

$$\mathbf{F = C\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i} - n\right]}$$

En las cuales:

P = Valor presente o actual.

F = Valor futuro.

C = Valor de la primera cuota.

i = Tasa de interés.

G = Constante o gradiente.

n = Tiempo o número de pagos.

EJEMPLO 1

Una persona tomó un crédito para ser pagado en un año, en el cual empezó a pagar 956.030,1 el primer mes; la tasa de interés que la entidad cobraba era del 12,68 % ea, a partir de la primera cuota realizó un incremento de 70.000 hasta el último pago. Si la capitalización es mes vencido, ¿cuál es valor del crédito tomado?

Solución:

Teniendo en cuenta que la capitalización es mes vencido se debe convertir la tasa efectiva a periódica, al igual que el tiempo en meses.

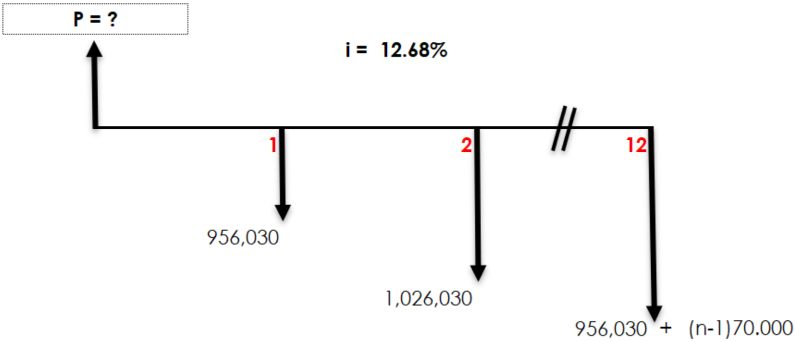
De esta forma se tendrá:

$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}1268]^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}01$ $\qquad$ $n = 1 \text{ x } 12 = \mathbf{12}$

En consecuencia tendrá lo siguiente:

$C = 956.030{,}1 \quad ip = 0{,}01 \quad n = 12 \quad kp = mv \quad G = 70.000 \quad P = ?$

Gráfica 6.2 *Valor presente de un gradiente lineal*



Fórmula:

$$\mathbf{P = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]}$$

$$\mathbf{P} = 956.030{,}1\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01}\right] + \frac{70.000}{0{,}01}\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01} - 12(1+0{,}01)^{-12}\right]$$

$$\mathbf{P} = 15.000.000$$

Respuesta: El valor del crédito otorgado es igual a 15 millones.

Ver cómo solucionar este problema de gradiente lineal en Excel.

Para ello se tomará un libro de Excel y luego elaborar una tabla con las variables necesarias, como la siguiente:

Tabla 6-1 *Valor presente gradiente lineal creciente*

Valor presente	¿	¿
Tiempo (años)	1	**12**
Tasa de interés (EA)	12,68 %	**0,01**
Gradiente	70.000	**70.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor primera cuota	956.030,1	**956.030,1**

Seguidamente, se debe construir una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente.

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés; se fija la tasa con F4.

Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

Pago = Valor de la primera cuota.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.

Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.

Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 1.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y se arrastra hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así: .Xls

Tabla 6-2 *Amortización del valor presente gradiente lineal creciente*

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				15.000.000
1	150.000	806.030	956.030,1	14.193.970
2	141.940	884.090	1.026.030,1	13.309.880
3	133.099	962.931	1.096.030,1	12.346.948
4	123.469	1.042.561	1.166.030,1	11.304.388
5	113.044	1.122.986	1.236.030,1	10.181.401
6	101.814	1.204.216	1.306.030,1	8.977.185
7	89.772	1.286.258	1.376.030,1	7.690.927
8	76.909	1.369.121	1.446.030,1	6.321.806
9	63.218	1.452.812	1.516.030,1	4.868.994
10	48.690	1.537.340	1.586.030,1	3.331.654
11	33.317	1.622.714	1.656.030,1	1.708.941
12	17.089	1.708.941	1.726.030,1	0

EJEMPLO 2

Una persona tomó un crédito de 15.000.000 para ser pagado en un año, la tasa de interés que la entidad cobraba era del 12,68 %, a partir de la primera cuota realizó un incremento de 70.000 periódicamente hasta el último pago; si la capitalización es mes vencido, ¿cuál es valor de la primera cuota?

Solución:

Teniendo en cuenta que la capitalización es mes vencido se debe convertir la tasa efectiva a periódica, al igual que el tiempo en meses.

De esta forma se tendrá:

$$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}1268]^{\frac{1}{12}} - 1 = \mathbf{0{,}01} \qquad \mathrm{n} = 1 \text{ x } 12 = \mathbf{12}$$

Y en consecuencia lo siguiente:

$P = 15.000.000 \quad ip = 0{,}01 \quad n = 12 \quad kp = mv \quad G = 70.000 \quad C = ?$

Gráfica 6.3 *Valor primera cuota de un gradiente lineal*

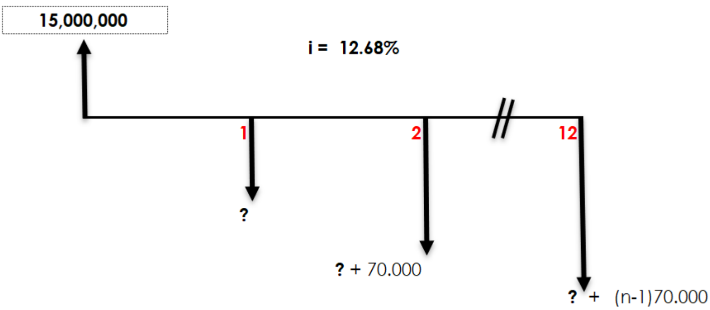


Tabla 6-3 *Valor primera cuota gradiente lineal creciente*

Valor presente	15.000.000	15.000.000
Tiempo (años)	1	**12**
Tasa de interés (EA)	12,68 %	**0,01**
Gradiente	70.000	**70.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor primera cuota	?	?

Seguidamente, se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente = $P_{0.}$

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés, y fijar la tasa con F4.

Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

Pago = Dejarla en blanco por el momento.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés, y fijar la tasa.

Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.

Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar este.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 1.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y se arrastra hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				$= P_0$
1	$= P_0 \times i\$p\$$	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1 \times i\$p\$$	$= C_2 - Int_2$	$= C_1 + G$	$= P_1 - Amort_2$

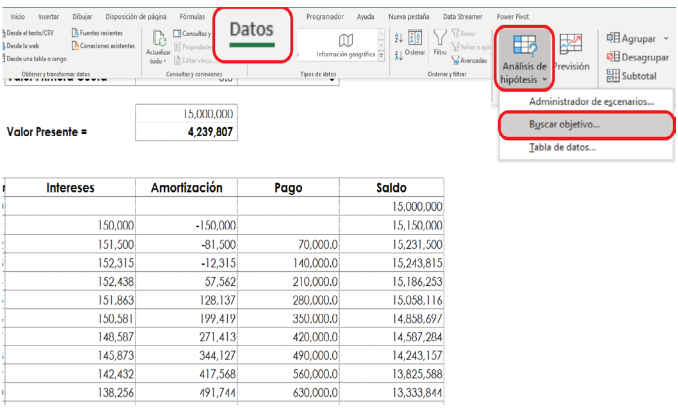
El resultado será el siguiente:

Tabla 6-4 *Amortización cálculo primera cuota valor presente gradiente lineal creciente*

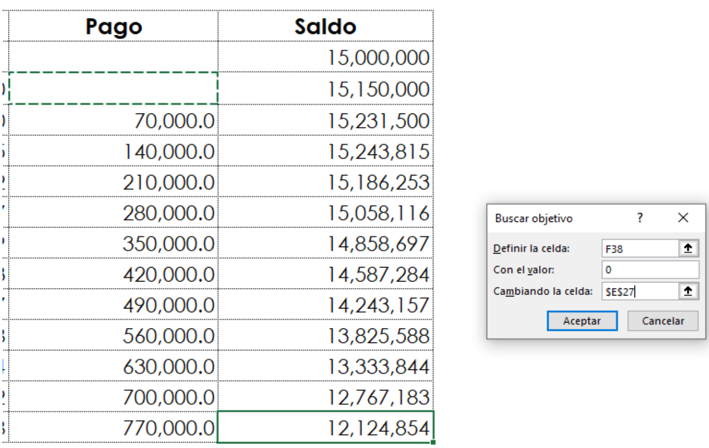
Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				15.000.000
1	150.000	-150.000		15.150.000
2	151.500	-81.500	70.000	15.231.500
3	152.315	-12.315	140.000	15.243.815
4	152.438	57.562	210.000	15.186.253
5	151.863	128.137	280.000	15.058.116
6	150.581	199.419	350.000	14.858.697
7	148.587	271.413	420.000	14.587.284
8	145.873	344.127	490.000	14.243.157
9	142.432	417.568	560.000	13.825.588
10	138.256	491.744	630.000	13.333.844
11	133.338	566.662	700.000	12.767.183
12	127.672	642.328	770.000	12.124.854

Luego de este proceso ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña *Datos*, seleccionar la pestaña *Análisis de hipótesis* y ahí escoger la opción *Buscar objetivo…*, ver cómo es esto:

Imagen 41: *Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo*



Intereses	Amortización	Pago	Saldo
			15,000,000
150,000	-150,000		15,150,000
151,500	-81,500	70,000.0	15,231,500
152,315	-12,315	140,000.0	15,243,815
152,438	57,562	210,000.0	15,186,253
151,863	128,137	280,000.0	15,058,116
150,581	199,419	350,000.0	14,858,697
148,587	271,413	420,000.0	14,587,284
145,873	344,127	490,000.0	14,243,157
142,432	417,568	560,000.0	13,825,588
138,256	491,744	630,000.0	13,333,844



Pago	Saldo
	15,000,000
	15,150,000
70,000.0	15,231,500
140,000.0	15,243,815
210,000.0	15,186,253
280,000.0	15,058,116
350,000.0	14,858,697
420,000.0	14,587,284
490,000.0	14,243,157
560,000.0	13,825,588
630,000.0	13,333,844
700,000.0	12,767,183
770,000.0	12,124,854

Luego, dar clic en *Buscar objetivo…* y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda gris); en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción *cambiando la celda* seleccionar la celda del pago del periodo 1, la cual estaba sin valores y, posteriormente, dar clic en *Aceptar*.

Excel realizará el proceso y calculará el valor de la cuota inicial, y ajustará la tabla para que los pagos cumplan con la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver cómo hacerlo:

Tras dar clic en *Aceptar* la tabla de amortización quedará de la siguiente forma:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				15.000.000
1	150.000	806.030	956.030,1	14.193.970
2	141.940	884.090	1.026.030,1	13.309.880
3	133.099	962.931	1.096.030,1	12.346.948
4	123.469	1.042.561	1.166.030,1	11.304.388
5	113.044	1.122.986	1.236.030,1	10.181.401
6	101.814	1.204.216	1.306.030,1	8.977.185
7	89.772	1.286.258	1.376.030,1	7.690.927
8	76.909	1.369.121	1.446.030,1	6.321.806
9	63.218	1.452.812	1.516.030,1	4.868.994
10	48.690	1.537.340	1.586.030,1	3.331.654
11	33.317	1.622.714	1.656.030,1	1.708.941
12	17.089	1.708.941	1.726.030,1	0

Respuesta: El valor del crédito tomado equivale a **15.000.000**.

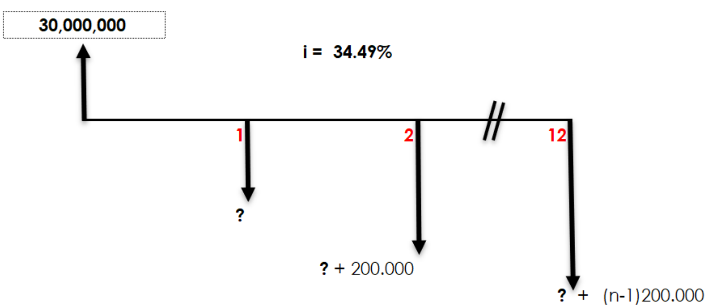
EJEMPLO 3

Una persona posee una deuda de 30 millones de COP, la cual va a financiar en 12 cuotas, estas aumentan en 200.000 COP cada mes; si la tasa de interés es del 34,49 %, calcular el valor de la primera y de la última cuota.

$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}3449]^{\frac{1}{12}} - 1 = \mathbf{0{,}025}$ $\qquad$ $n = 1 \text{ x } 12 = \mathbf{12}$

$ip = 0{,}025 \quad n = 12 \quad kp = mv \quad G = 200.000 \quad P = 30.000.000 \quad C = ?$

Gráfica 6.4 *Valor primera cuota, gradiente lineal*



***Fx* Fórmula:**

$$\mathbf{P} = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]$$

Despejando C, quedaría:

$$\mathbf{C} = \frac{P - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]}{\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

$$\mathbf{C} = \frac{30.000.000 - \frac{200.000}{0,025}\left[\frac{1-(1+0,025)^{-12}}{0,025} - 12\left(1+0,025\right)^{-12}\right]}{\left[\frac{1-(1+0,025)^{-12}}{0,025}\right]}$$

$$\mathbf{C}\ = 1.883.378$$

El valor de la última cuota será igual a $1.883.378 + 11 \text{ x } 200.000 = 4.083.378$

Respuesta: Teniendo en cuenta el valor del crédito, el tiempo, la tasa de interés y el gradiente creciente de 200.000 COP, el valor de la primera cuota sería igual a **1.883.378** y el valor de la última, es decir el pago 12, a **4.083.378**.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Tabla 6-5 *Valor primera cuota gradiente lineal creciente*

Valor presente	30.000.000	**30.000.000**
Tiempo (años)	1	**12**
Tasa de interés (EA)	34,49 %	**0,025**
Gradiente	200.000	**200.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor primera cuota	¿	¿

Seguidamente, se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	**Intereses**	**Amortización**	**Pago**	**Saldo**
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente = P_0.

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.

Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

Pago = Dejarla en blanco por el momento.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.

Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.

Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 1.

Luego de seleccionar desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				$= P_0$
1	$= P_0 \times i\$p\$$	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1 \times i\$p\$$	$= C_2 - Int_2$	$=C_1 + \$G$	$= P_1 - Amort_2$

El resultado será el siguiente:

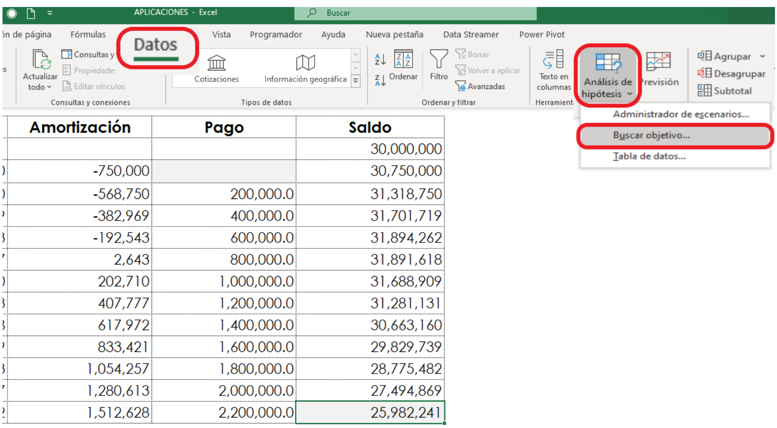
Tabla 6-6 *Amortización cálculo primera cuota valor presente gradiente lineal creciente*

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				30,000,000
1	750.000	-750.000		30.750.000
2	768.750	-568.750	200.000	31.318.750
3	782.969	-382.969	400.000	31.701.719
4	792.543	-192.543	600.000	31.894.262
5	797.357	2.643	800.000	31.891.618
6	797.290	202.710	1.000.000	31.688.909
7	792.223	407.777	1.200.000	31.281.131
8	782.028	617.972	1.400.000	30.663.160

9	766.579	833.421	1.600.000	29.829.739
10	745.743	1.054.257	1.800.000	28.775.482
11	719.387	1.280.613	2.000.000	27.494.869
12	687.372	1.512.628	2.200.000	25.982.241

Luego de este proceso, ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña *Datos*, seleccionar la pestaña *Análisis de hipótesis* y ahí la opción *Buscar objetivo*… ver cómo hacerlo:

Imagen 42: Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo

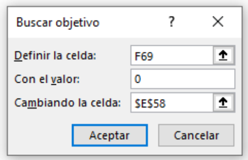


Amortización	Pago	Saldo
		30,000,000
-750,000		30,750,000
-568,750	200,000.0	31,318,750
-382,969	400,000.0	31,701,719
-192,543	600,000.0	31,894,262
2,643	800,000.0	31,891,618
202,710	1,000,000.0	31,688,909
407,777	1,200,000.0	31,281,131
617,972	1,400,000.0	30,663,160
833,421	1,600,000.0	29,829,739
1,054,257	1,800,000.0	28,775,482
1,280,613	2,000,000.0	27,494,869
1,512,628	2,200,000.0	25,982,241

Luego dar clic en *Buscar objetivo*… y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda gris); en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción cambiando la celda seleccionar la celda del pago del periodo 1, la cual estaba sin valores y dar clic en *Aceptar*.

Excel hará el proceso, calculará el valor de la cuota inicial y ajustará la tabla para que los pagos cumplan la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, la finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver resultado:

Pago	Saldo
	30,000,000
	30,750,000
200,000.0	31,318,750
400,000.0	31,701,719
600,000.0	31,894,262
800,000.0	31,891,618
1,000,000.0	31,688,909
1,200,000.0	31,281,131
1,400,000.0	30,663,160
1,600,000.0	29,829,739
1,800,000.0	28,775,482
2,000,000.0	27,494,869
2,200,000.0	25,982,241



Luego de dar clic en *Aceptar* la tabla de amortización quedará de la siguiente forma:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				30.000.000
1	750.000	1.133.378	**1.883.378**	28.866.622
2	721.666	1.361.712	2.083.378	27.504.910
3	687.623	1.595.755	2.283.378	25.909.154
4	647.729	1.835.649	2.483.378	24.073.505
5	601.838	2.081.540	2.683.378	21.991.965
6	549.799	2.333.579	2.883.378	19.658.386
7	491.460	2.591.918	3.083.378	17.066.468
8	426.662	2.856.716	3.283.378	14.209.751
9	355.244	3.128.134	3.483.378	11.081.617

10	277.040	3.406.338	3.683.378	7.675.279
11	191.882	3.691.496	3.883.378	3.983.783
12	99.595	3.983.783	4.083.378	0

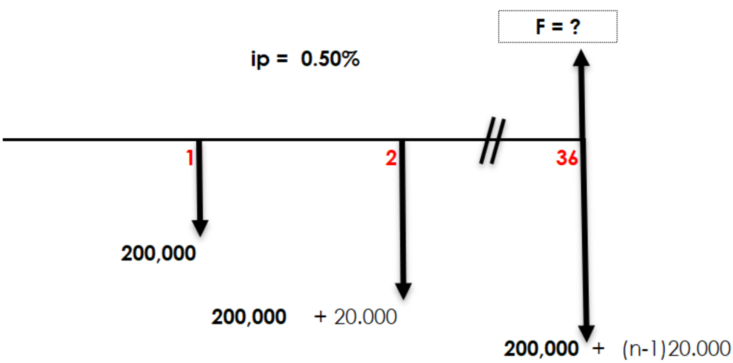
Respuesta: El valor de la primera cuota equivale a **1.883.378**.

EJEMPLO 4

Una persona inicia ahorrando 200.000 COP cada mes en una entidad financiera que paga el 0,5 % mes vencido, este se propone aumentar periódicamente en 20.000 COP el valor de sus depósitos. Al final de tres años, ¿cuál será el valor de sus ahorros?

$ip = 0{,}005 \qquad n = 36 \qquad kp = mv \quad G = 20.000 \quad C = 200.000 \quad F = ?$

Gráfica 6.5 *Valor futuro de un gradiente lineal*



Fx ***Fórmula:***

$$\mathbf{F = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}$$

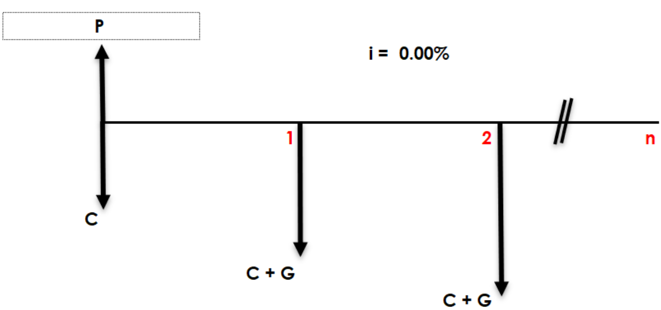
$$\mathbf{F} = 200.000\left[\frac{(1+0{,}005)^{36} - 1}{0{,}005}\right] + \frac{20.000}{0{,}005}\left[\frac{(1+0{,}005)^{36} - 1}{0{,}005} - 36\right]$$

$$\mathbf{F} = 21.211.641$$

Respuesta: El valor de sus ahorros al final de los tres años equivale a **21.211.641 COP.**

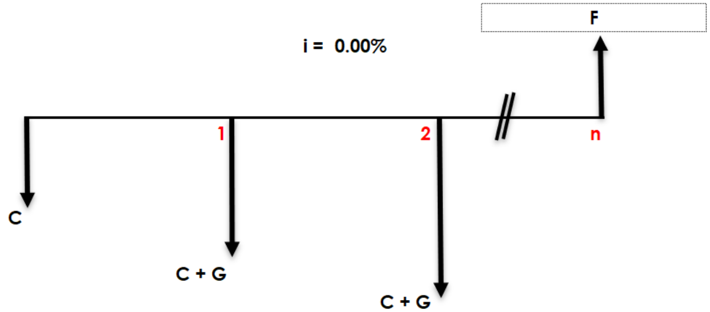
Fx ***Fórmula:*** Valor presente gradiente lineal creciente anticipado

$$\mathbf{P = \left\{c\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]\right\}(1+i)}$$



***Fx* Fórmula:** Valor futuro gradiente lineal creciente anticipado

$$\mathbf{F} = \left\{ \mathbf{c}\left[\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{1}}{\mathbf{i}} \right] + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{i}}\left[\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{1}}{\mathbf{i}} - \mathbf{n} \right] \right\} (\mathbf{1}+\mathbf{i})$$



6.4 GRADIENTE LINEAL (decreciente)

Este tipo de gradientes tienen la característica de ir disminuyendo en un valor constante del pago periodo a periodo.

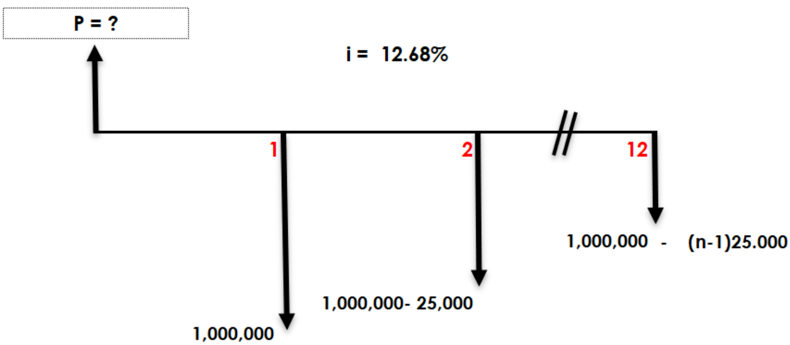
Ver algunos casos:

EJEMPLO 5

Una persona inicia el pago de su motocicleta, la cual ha financiado a un año con cuotas mensuales que tienen el siguiente comportamiento: la primera cuota corresponde a 1.000.000 COP y cada mes disminuye en 25.000 COP; si la tasa de interés es del 1 % mv, ¿cuál será el valor del crédito otorgado?

$\text{ip} = 0{,}01 \qquad \text{n} = 12 \qquad \text{kp} = \text{mv} \qquad \text{G} = 25.000 \qquad \text{C} = 1.000.000 \qquad \text{P} = ?$

Gráfica 6.6 *Valor presente de un gradiente lineal decreciente*



Fx Fórmula:

$$\mathbf{P = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]}$$

$$\mathbf{P} = C\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right]$$

$$\mathbf{P} = 1.000.000\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01}\right] - \frac{25.000}{0{,}01}\left[\frac{1-(1+0{,}01)^{-12}}{0{,}01} - 12(1+0{,}01)^{-12}\right]$$

$$\mathbf{P} = 9.740.861$$

Respuesta: El valor del crédito tomado para pagar la motocicleta fue de **9.740.861 COP**.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Tabla 6-7 *Valor presente de un gradiente lineal decreciente*

Valor presente	?	?
Tiempo (años)	1	**12**
Tasa de interés (EA)	12,68 %	**0,0100**
Gradiente	25.000	**25.000**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor primera cuota	1.000.000	**1.000.000**

Seguidamente, de construir una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	**Intereses**	**Amortización**	**Pago**	**Saldo**
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo si es desconocido, se deja en cero (0).

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.

Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

Pago = El valor de la primera cuota.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.

Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.

Pago = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 1.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				0
1	$= P_0 \times i\$p\$$	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1 \times i\$p\$$	$= C_2 - Int_2$	$=C_2 + \$G$	$= P_1 - Amort_2$

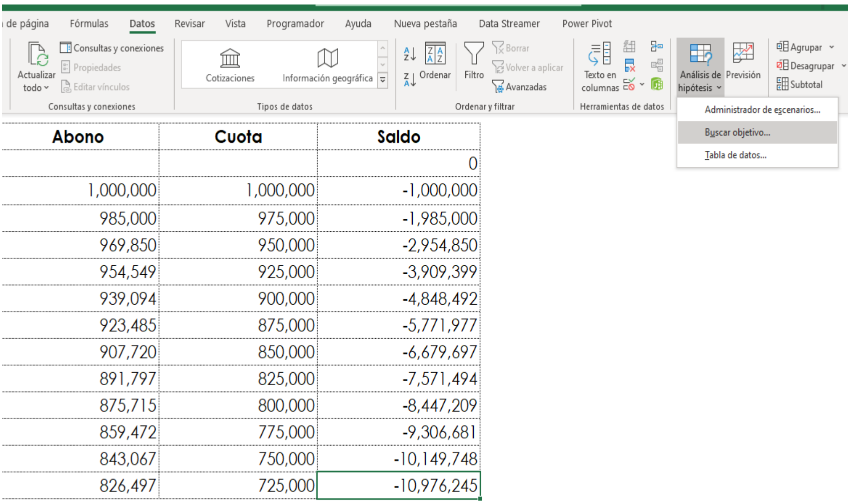
El resultado será el siguiente:

Tabla 6-8 *Amortización cálculo valor presente gradiente lineal creciente*

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				0
1	0	1.000.000	1.000.000	-1.000.000
2	-10.000	985.000	975.000	-1.985.000
3	-19.850	969.850	950.000	-2.954.850
4	-29.549	954.549	925.000	-3.909.399
5	-39.094	939.094	900.000	-4.848.492
6	-48.485	923.485	875.000	-5.771.977
7	-57.720	907.720	850.000	-6.679.697
8	-66.797	891.797	825.000	-7.571.494
9	-75.715	875.715	800.000	-8.447.209
10	-84.472	859.472	775.000	-9.306.681
11	-93.067	843.067	750.000	-10.149.748
12	-101.497	826.497	725.000	-10.976.245

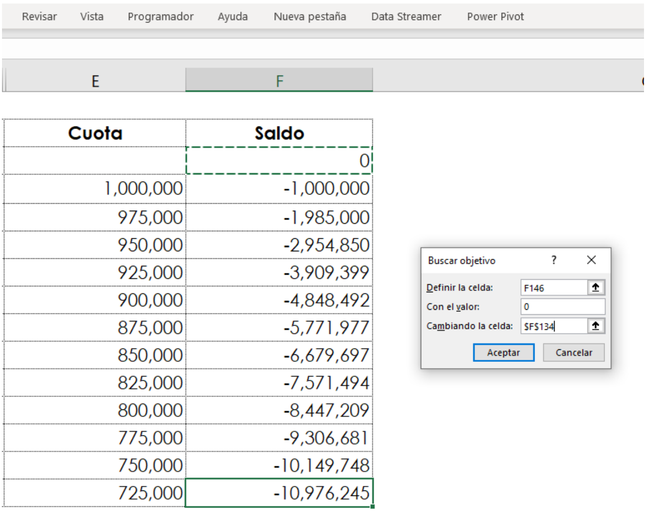
Luego de este proceso ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña *Datos*, seleccionar la pestaña *Análisis de hipótesis* y ahí la opción *Buscar objetivo…*, ver cómo es esto:

Imagen 43: Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo



Abono	Cuota	Saldo
		0
1,000,000	1,000,000	-1,000,000
985,000	975,000	-1,985,000
969,850	950,000	-2,954,850
954,549	925,000	-3,909,399
939,094	900,000	-4,848,492
923,485	875,000	-5,771,977
907,720	850,000	-6,679,697
891,797	825,000	-7,571,494
875,715	800,000	-8,447,209
859,472	775,000	-9,306,681
843,067	750,000	-10,149,748
826,497	725,000	-10,976,245

Después dar clic en *Buscar objetivo…* y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda gris), en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción cambiando la celda seleccionar la celda del saldo del periodo 0, la cual estaba sin valores y dar clic en *Aceptar*. Excel el realizará proceso y calculará el valor inicial o presente, y ajustará la tabla para que los pagos cumplan con la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver cómo hacerlo:



Luego de dar clic en *Aceptar* la tabla de amortización quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				**9.740.861**
1	97.409	902.591	1.000.000	8.838.269
2	88.383	886.617	975.000	7.951.652
3	79.517	870.483	950.000	7.081.168
4	70.812	854.188	925.000	6.226.980
5	62.270	837.730	900.000	5.389.250
6	53.892	821.108	875.000	4.568.142
7	45.681	804.319	850.000	3.763.824
8	37.638	787.362	825.000	2.976.462
9	29.765	770.235	800.000	2.206.227
10	22.062	752.938	775.000	1.453.289
11	14.533	735.467	750.000	717.822
12	7.178	717.822	725.000	0

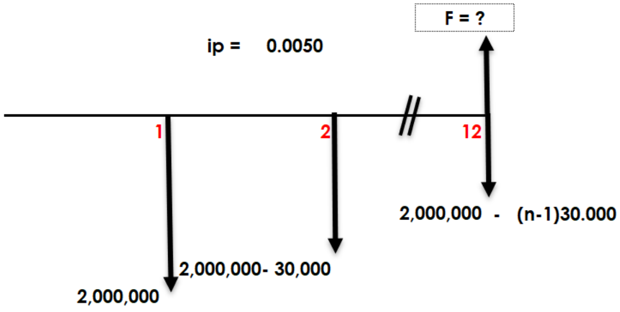
Respuesta: El valor del préstamo equivale a **9.740.861**.

EJEMPLO 6

Una persona inicia ahorrando durante un año en una entidad financiera que paga el 0,5 % mensual, la primera cuota correspondió a 2.000.000 COP y por ciertas dificultades cada mes empezó a disminuir en 30.000 COP sus depósitos de manera constante; si al final del año paga su cuenta, ¿cuál será el valor de sus ahorros?

$\text{ip} = 0{,}005 \qquad \text{n} = 12 \qquad \text{kp} = \text{mv} \quad \text{G} = 30.000 \quad \text{C} = 2.000.000 \quad \text{F} = ?$

Gráfica 6.7 *Valor futuro de un gradiente lineal decreciente*



***Fx* Fórmula:**

$$\mathbf{F = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]}$$

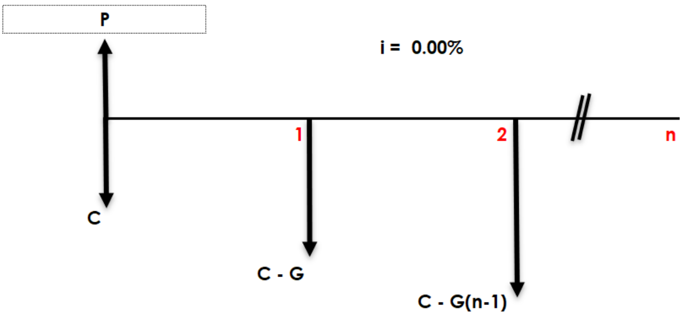
$$\mathbf{F} = 2.000.000\left[\frac{(1+0{,}005)^{12}-1}{0{,}005}\right] - \frac{30.000}{0{,}005}\left[\frac{(1+0{,}005)^{12}-1}{0{,}005} - 12\right]$$

$$\mathbf{F} = 22.657.751$$

Respuesta: El ahorro al final del año tras ahorrar 30.000 COP menos, a partir de la cuota de 2.000.000 es de **22.657.751**.

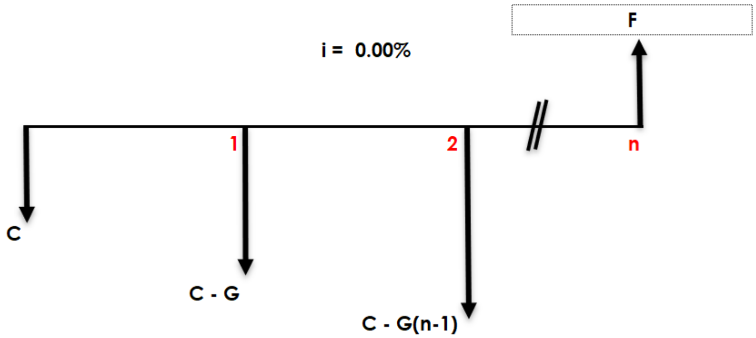
Fx ***Fórmula:*** Valor presente gradiente lineal decreciente anticipado

$$\mathbf{P} = \left\{\mathbf{c}\left[\frac{\mathbf{1-(1+i)^{-n}}}{\mathbf{i}}\right] - \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{i}}\left[\frac{\mathbf{1-(1+i)^{-n}}}{\mathbf{i}} - \mathbf{n(1+i)^{-n}}\right]\right\}\mathbf{(1+i)}$$



Fx ***Fórmula:*** Valor futuro gradiente lineal decreciente anticipado

$$\mathbf{F} = \left\{\mathbf{c}\left[\frac{\mathbf{(1+i)^{n} - 1}}{\mathbf{i}}\right] - \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{i}}\left[\frac{\mathbf{(1+i)^{n} - 1}}{\mathbf{i}} - \mathbf{n}\right]\right\}\mathbf{(1+i)}$$



6.5 GRADIENTE GEOMÉTRICO (creciente)

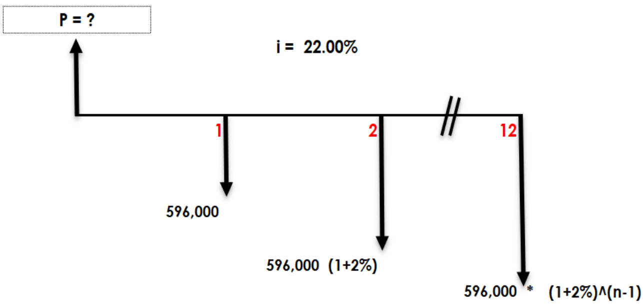
El gradiente geométrico tiene las mismas condiciones del gradiente lineal o aritmético, es decir, existe una constante de incremento o disminución desde la primera cuota; la diferencia está en el valor del patrón o constante de variación, mientras que el lineal aumenta o disminuye una cantidad absoluta, en el gradiente geométrico es un valor relativo o porcentual. Estos también pueden ser vencidos o anticipados, además, es posible calcular su valor presente o futuro. Ver algunos ejemplos:

EJEMPLO 7

Jorge Mario obtuvo del banco un préstamo para ser pagado en un año, en el cual el valor de la primera cuota fue de 596.000 y el valor de esta se incrementaba cada mes en un 2 %; si la tasa de interés cobrada por la entidad correspondía al 22 % EA, ¿cuál fue el valor del préstamo otorgado a Jorge Mario?

$ip = 0{,}0167 \qquad n = 12 \qquad kp = mv \qquad G = 2\,\% \qquad C = 596.000 \qquad P = ?$

Gráfica 6.8 *Valor presente de un gradiente geométrico creciente vencido*



***Fx* Fórmula:**

$$P = C\left[\frac{\left(\frac{(1+G)}{(1+i)}\right)^{n} - 1}{G - i}\right]$$

$$P = 596.000\left[\frac{\left(\frac{(1+0{,}02)}{(1+0{,}0167)}\right)^{12} - 1}{0{,}02 - 0{,}0167}\right]$$

$P = 7.161.059$

Respuesta: El valor del préstamo otorgado a Jorge Mario correspondió a **7.161.059**.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Tabla 6-9 *Valor presente gradiente geométrico creciente vencido*

Valor presente	¿	¿
Tiempo (años)	1	12
Tasa de interés (EA)	22 %	**0,0167**
Gradiente	2 %	**0,02**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor primera cuota	596.000	**596.000**

Seguidamente se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente al valor del crédito o valor presente = P_0.

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.

Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

Pago = Dejarla en blanco por el momento.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.

Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.

Pago = Pago del periodo 1 más valor del gradiente y fijar el gradiente.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 1.

Luego se selecciona desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				$= P_0$
1	$= P_0 \times i\$p\$$	$= C_1 - Int_1$		$= P_0 - Amort_1$
2	$= P_1 \times i\$p\$$	$= C_2 - Int_2$	$=C_1*(1+G\$)$	$= P_1 - Amort_2$

El resultado será el siguiente:

Tabla 6-10 *Amortización cálculo valor presente gradiente geométrico creciente vencido*

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				7.161.059

1	119.654	476.346	596.000	6.684.713
2	111.695	496.225	607.920	6.188.487
3	103.403	516.675	620.078,4	5.671.812
4	94.770	537.710	632.480	5.134.102
5	85.786	559.344	645.129,6	4.574.758
6	76.439	581.593	658.032,2	3.993.165
7	66.722	604.471	671.192,8	3.388.694
8	56.622	627.995	684.616,7	2.760.699
9	46.128	652.181	698.309	2.108.519
10	35.231	677.044	712.275,2	1.431.475
11	23.918	702.602	726.520,7	728.872
12	12.179	728.872	741.051,1	0

En caso de establecer o determinar el valor de una cuota en particular, la fórmula será la siguiente:

Fx ***Fórmula:***

$$\mathbf{C_n = C\ (1 + G)^{n-1}}$$

En caso de desear conocer el valor de la cuota del periodo 5 de la tabla anterior, el resultado sería así:

$\mathbf{C_5 = 596.000}\ (1 + \mathbf{0,02})^{\mathbf{5-1}}$

$\mathbf{C_5 = 596.000}\ (1 + \mathbf{0,02})^{\mathbf{4}}$

$\mathbf{C_5 = 645.129,60}$

Fx ***Fórmula:*** *Valor futuro gradiente geométrico vencido*

$$F = \frac{C\left[1-\left(\frac{1+G}{1+i}\right)^{n}\right]}{(i-G)}\,(1+i)^{n}$$

EJEMPLO 8

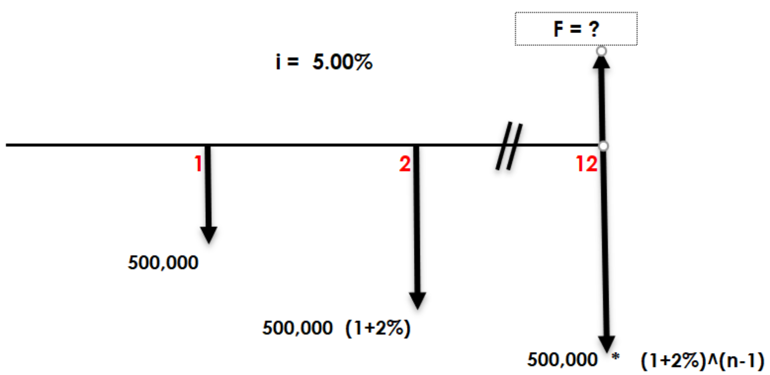
Samuel, un joven ahorrador, inició depósitos en una entidad que pagaba el 5 % EA, el valor de la primera cuota depositada fue de 500.000 y, debido a algunas circunstancias, pudo empezar a elevar el valor de su ahorro incrementando cada mes en un 2 %. Si esto lo hizo periódicamente durante un año, ¿cuál fue el valor de los ahorros de Samuel en el periodo 12?

Solución:

$\mathbf{ip} = [1+0{,}05]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = \; 0.0041 \qquad\qquad n = \; 1 \text{ x } 12 = 12$

$\text{ip} = 0{,}0041 \qquad n = 12 \qquad \text{kp} = \text{mv} \qquad G = 2\,\% \qquad C = 500.000 \qquad P = \;?$

Gráfica 6.9 *Valor futuro de un gradiente geométrico creciente vencido*



Fx ***Fórmula:***

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{C}\left[\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1+G}}{\mathbf{1+i}}\right)^{\mathbf{n}}\right]}{(\mathbf{i-G})}(\mathbf{1+i})^{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{500.000\left[1 - \left(\frac{1+0{,}02}{1+0{,}0041}\right)^{12}\right]}{(0{,}0041 - 0{,}02)}(1+0{,}0041)^{12}$$

$$\mathbf{F} = 6.851.799$$

Respuesta: El valor de los ahorros de Samuel será equivalente a **6.851.799**.

.Xls **En Excel quedaría de la siguiente manera:**

Tabla 6-11 *Valor futuro de un gradiente geométrico creciente vencido*

Valor futuro	?	?
Tiempo (años)	1	**12**
Tasa de interés (EA)	5 %	**0,0041**
Gradiente	2 %	**2 %**
Capitalización	Mensual	**12**
Valor primera cuota	500.000	**500.000**

.Xls Seguidamente se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Pago y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Pago	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla. Como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el 12. Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, este será equivalente a cero (0).

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

En este caso es importante recordar que los intereses son compuestos y cada depósito debe llevarse a valor futuro en diferentes momentos, de esta manera, recordaremos cómo calcular los intereses con base en el valor futuro.

Teniendo como premisa que:

Fx ***Fórmulas:***

$\mathbf{VF} = \mathbf{VP}(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}}$ y que $\mathbf{INT} = \mathbf{VF} - \mathbf{VP}$, entonces: $\mathbf{INT} = \mathbf{VP}(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{VP}$

Factorizando se tendrá:

$$\mathbf{INT} = \mathbf{VP}[(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{1}]$$

Intereses = En esta celda aplicar la fórmula planteada, en la cual el valor presente será el depósito del periodo 1 y *n* será once (11), ya que los intereses del primer pago tendrán 11 meses de intereses.

Amortización = Depósito del periodo 1 más los intereses del periodo 1.

Depósito = Será igual al primer depósito.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 más la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2).

Intereses = En esta celda aplicar la nuevamente fórmula planteada, en la cual el valor presente será el depósito del segundo periodo y *n* será diez (10); ya que los intereses del primer pago tendrán 10 meses de intereses, para los demás periodos estos irán disminuyendo el tiempo en 1, de esa manera en el periodo 12 los intereses serán cero (0).

Amortización = Depósito del periodo 2 más los intereses del periodo 2.

Depósito = Depósito del periodo 1 más valor del gradiente y fijar el gradiente.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 más la amortización del periodo 1.

Luego seleccionar desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Depósito	Saldo
0				
1	$= D_1((1+ i\$p\$)^\wedge 11$	$= D_1 + Int_1$	C	$= SA + Amort_1$
2	$= D_2((1+ i\$p\$)^\wedge 10$	$= D_2 + Int_2$	$=D_1*(1_+G\$)$	$= SA + Amort_2$

El resultado será el siguiente:

Tabla 6-12 *Amortización cálculo valor presente gradiente geométrico creciente vencido*

Periodo	Intereses	Amortización	Depósito	Saldo
0				
1	22.870	522.870	500.000	522.870
2	21.163	531.163	510.000	1.054.033
3	19.388	539.588	520.200	1.593.621
4	17.543	548.147	530.604	2.141.768
5	15.625	556.841	541.216,1	2.698.608
6	13.633	565.673	552.040,4	3.264.282
7	11.564	574.645	563.081,2	3.838.927
8	9.417	583.760	574.342,8	4.422.687
9	7.189	593.019	585.829,7	5.015.706
10	4.879	602.425	597.546,3	5.618.131
11	2.483	611.980	609.497,2	6.230.112
12	0	621.687	621.687,2	6.851.799

6.6 GRADIENTE GEOMÉTRICO (decreciente)

EJEMPLO 9

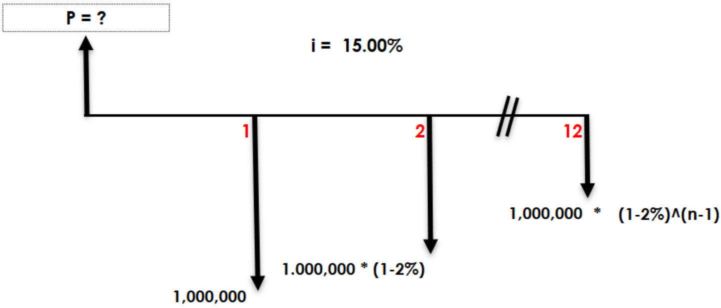
Diego, un joven emprendedor, tomó un empréstito para subsanar ciertas vicisitudes en su labor, la entidad donde financió el dinero cobraba intereses a razón del 15 % EA, el primer pago lo efectuó por valor de 1.000.000; según acuerdo con la entidad, este tendría una cuota variable decreciente, la cual disminuiría en un 2,5 % cada mes. Si el crédito lo tomó para ser pagado en un año, ¿cuál fue el valor del préstamo asignado a Diego?

Solución:

$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}15]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = \ 0.0117 \qquad\qquad n = \ 1 \text{ x } 12 = 12$

$\text{ip} = 0{,}0117 \qquad n = 12 \qquad \text{kp} = \text{mv} \qquad G = 2{,}5\ \% \qquad C = 1.000.000 \qquad P = \ ?$

Gráfica 6.10 *Valor presente de un gradiente geométrico decreciente vencido*



Fx ***Fórmula:***

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left[\frac{(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}} - (\mathbf{1}-\mathbf{G})^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{G}+\mathbf{i})(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{n}}}\right]$$

$$\mathbf{P} = 1.000.000\left[\frac{(1+0{,}0117)^{12} - (1-0{,}025)^{12}}{(0{,}025+0{,}0117)(1+0{,}0117)^{12}}\right]$$

$$\mathbf{P} = 9.757.950$$

Respuesta: El valor del préstamo asignado a Diego fue de **9.757.950**.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Luego se construye una tabla con las siguientes variables: Periodo, Intereses, Amortización, Depósito y Saldo.

Periodo	Intereses	Amortización	Depósito	Saldo
0				
1				
12				

Ahora ver cómo diligenciarla: como los pagos son vencidos, la tabla inicia desde el periodo cero (0) e irá hasta el doce (12). Los intereses, la amortización y el pago del periodo 0 no serán tenidos en cuenta; en el caso del saldo, si es desconocido se deja en cero (0).

Cómo diligenciar el periodo uno (1):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa con F4.

Amortización = Pago del periodo 1 menos los intereses del periodo 1.

Depósito = El valor de la primera cuota.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 0 menos la amortización del periodo 1.

Cómo diligenciar el periodo dos (2):

Intereses = Saldo anterior multiplicado por la tasa de interés y fijar la tasa.

Amortización = Pago del periodo 2 menos los intereses del periodo 2.

Depósito = Pago del periodo 1 más el valor del gradiente y fijar el gradiente.

Saldo = Saldo anterior, es decir, el periodo 1 menos la amortización del periodo 1.

Luego seleccionar desde los intereses del periodo 1 hasta el saldo y arrastrar hasta el periodo 12.

Lo anterior quedará así:

Periodo	Intereses	Amortización	Depósito	Saldo
0				0
1	= P_0 x i\$p\$	= $C_1 - Int_1$		= P_0 - $Amort_1$
2	= P_1 x i\$p\$	= $C_2 - Int_2$	=C + \$G	= P_1 - $Amort_2$

El resultado será el siguiente:

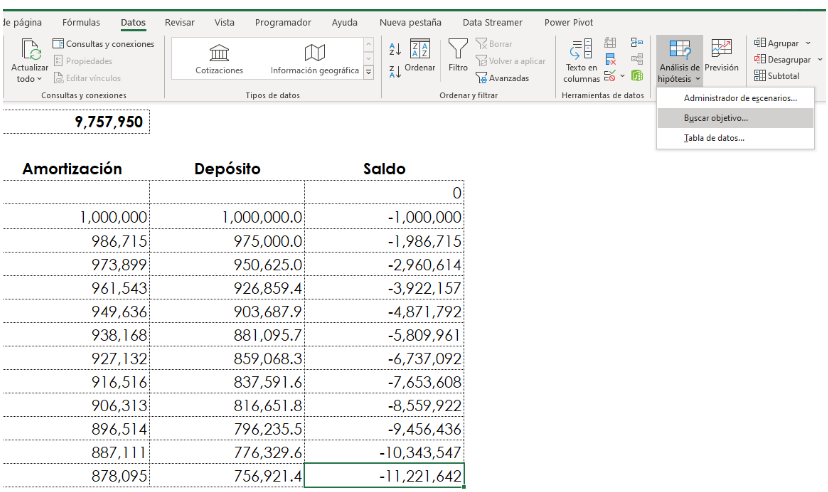
Tabla 6-13 *Amortización cálculo valor presente de un gradiente geométrico decreciente vencido*

Periodo	Intereses	Amortización	Depósito	Saldo
0				0
1	0	1.000.000	1.000.000	-1.000.000
2	-11.715	986.715	975.000	-1.986.715
3	-23.274	973.899	950.625	-2.960.614
4	-34.683	961.543	926.859,4	-3.922.157
5	-45.948	949.636	903.687,9	-4.871.792
6	-57.073	938.168	881.095,7	-5.809.961

7	-68.063	927.132	859.068,3	-6.737.092
8	-78.924	916.516	837.591,6	-7.653.608
9	-89.661	906.313	816.651,8	-8.559.922
10	-100.279	896.514	796.235,5	-9.456.436
11	-110.781	887.111	776.329,6	-10.343.547
12	-121.174	878.095	756.921,4	-11.221.642

Luego de este proceso ubicarse en la celda gris, es decir, en el saldo del periodo 12, una vez ahí ir a la pestaña *Datos*, seleccionar la pestaña *Análisis de hipótesis* y después la opción *Buscar objetivo…*, ver el resultado:

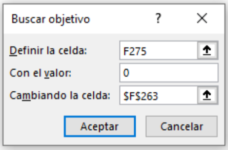
Imagen 44: Datos, Análisis de Hipótesis – Buscar Objetivo



Amortización	Depósito	Saldo
		0
1,000,000	1,000,000.0	-1,000,000
986,715	975,000.0	-1,986,715
973,899	950,625.0	-2,960,614
961,543	926,859.4	-3,922,157
949,636	903,687.9	-4,871,792
938,168	881,095.7	-5,809,961
927,132	859,068.3	-6,737,092
916,516	837,591.6	-7,653,608
906,313	816,651.8	-8,559,922
896,514	796,235.5	-9,456,436
887,111	776,329.6	-10,343,547
878,095	756,921.4	-11,221,642

Luego dar clic en *Buscar objetivo…* y aparecerá una ventana con tres (3) variables, una de ellas ya está determinada por la ubicación inicial (celda gris), en la opción con el valor digitar cero (0) y finalmente en la opción cambiando la celda seleccionar la celda del saldo del periodo 0, la cual estaba sin valores y dar clic en *Aceptar*. Excel realizará proceso y calculará el valor inicial o presente, y ajustará la tabla para que los pagos cumplan con la condición del gradiente creciente y el saldo sea cero (0), es decir, la finalización del préstamo en la tabla de amortización. Ver cómo hacerlo:

Depósito	**Saldo**
	0
1,000,000.0	-1,000,000
975,000.0	-1,986,715
950,625.0	-2,960,614
926,859.4	-3,922,157
903,687.9	-4,871,792
881,095.7	-5,809,961
859,068.3	-6,737,092
837,591.6	-7,653,608
816,651.8	-8,559,922
796,235.5	-9,456,436
776,329.6	-10,343,547
756,921.4	-11,221,642



Tras dar clic en *Aceptar* la tabla de amortización quedará de la siguiente forma:

Periodo	**Intereses**	**Amortización**	**Depósito**	**Saldo**
0				**9.757.950**
1	114.314	885.686	1.000.000	8.872.263
2	103.938	871.062	975.000	8.001.201
3	93.733	856.892	950.625	7.144.309
4	83.695	843.164	926.859,4	6.301.145

5	73.817	829.871	903.687,9	5.471.274
6	64.096	817.000	881.095,7	4.654.274
7	54.524	804.544	859.068,3	3.849.730
8	45.099	792.492	837.591,6	3.057.238
9	35.815	780.837	816.651,8	2.276.402
10	26.668	769.568	796.235,5	1.506.834
11	17.652	758.677	776.329,6	748.157
12	8.765	748.157	756.921,4	0

Respuesta: El valor del préstamo equivale a **9.757.950**.

Fórmula: *Gradientes geométricos anticipados*

$$\mathbf{P = C\left[\frac{(1+i)^n - (1-G)^n}{(G+i)(1+i)^n}\right](1+i)}$$

$$\mathbf{F = \left\{\frac{C\left[1-\left(\frac{1+G}{1+i}\right)^n\right]}{(i-G)}(1+i)\right\}(1+i)}$$

PROBLEMAS

1. Una persona tomó un crédito de 20.000.000 para ser pagado en un año, la tasa de interés que la entidad cobraba era del 12,68 % mensual y a partir de la primera cuota realizó un incremento de 70.000 hasta el último pago; si la capitalización es mes vencido, ¿cuál es valor de la primera cuota? **Respuesta: 1.400.251**.

2. Una persona posee una deuda en COP, la cual va a financiar en 12 cuotas, las cuales aumentan en un 2 % cada mes; si la tasa de interés es del 20 % y el valor de la primera cuota es de un millón de COP, ¿cuál es valor del crédito? **Respuesta: 12.124.039**.

3. Una persona posee una deuda en COP, la cual va a financiar en 12 cuotas, las cuales aumentan en 60.000 COP cada mes; si la tasa de interés es del 25 % y el valor de la primera cuota es de 500.000 COP, ¿cuál es valor del crédito? **Respuesta: 8.702.690**.

4. Una persona inicia ahorrando 200.000 COP cada mes en una entidad financiera que paga el 0,6 % mes vencido, este se propone aumentar periódicamente en 25.000 COP el valor de sus depósitos.
   Al final de tres años, ¿cuál será el valor de sus ahorros? **Respuesta: 24.886.169**.

5. Una persona inicia ahorrando 600.000 COP cada mes en una entidad financiera que paga el 0,4 % mes vencido, este se propone aumentar periódicamente en 10.000 COP el valor de sus depósitos.
   Al final del año, ¿cuál será el valor de sus ahorros? **Respuesta: 8.029.411**.

7

SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

7.1 DEFINICIÓN

La amortización es la forma mediante la cual se paga una obligación, mediante pagos vencidos o anticipados, hasta que el saldo de esta llegue a cero (0). (Vargas, 2015)

7.2 SISTEMA DE AMORTIZACIÓN

Es la descripción cuantitativa de cómo eliminar una acreencia o deuda, esta debe tener como primera instancia el valor adeudado y definir un plazo de tiempo en el cual se acuerda realizar una serie de pagos, los cuales son producto de establecer un costo de capital denominado tasa de interés; además, una periodicidad o lapso para efectuarlos, que pueden ser al inicio de los periodos o al final de ellos, lo que se conoce como vencimiento. (Vargas, 2015)

Teniendo en cuenta lo anterior, se establece que los elementos para determinar un sistema de amortización son: valor del capital o préstamos, plazo, tasa de interés, cuota y tipo, es decir, anticipada o vencida. Las anteriores variables tienden a cambiar de acuerdo con diferentes acuerdos en el contrato mutuo.

Ahora se caracterizarán algunos de los más conocidos en el sistema financiero:

7.3 ÚNICO PAGO AL FINAL DEL PLAZO

Esta forma de amortización es muy utilizada en la compra y venta de bonos o títulos de tesorería del banco central, consiste en pagar los intereses durante el plazo y en el último periodo pagar el capital o principal.

Ver caso del sistema en estudio:

EJEMPLO 1

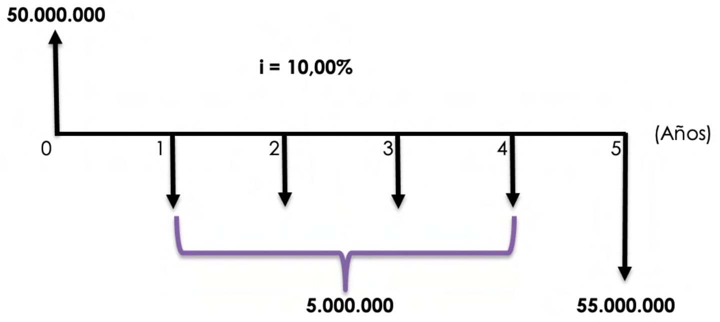
Un título es vendido por un valor de 50.000.000 que paga rendimientos anuales a razón del 10 % durante 5 años y en el quinto periodo se pagará el título. Determinar la amortización de la inversión.

Solución:

Los intereses son el producto del valor del título por la tasa. **I = P x i**

P = 50.000.000 n = 5 i = 0,10 I = 50.000.000 x 0,10

Gráfica 7.1 *Sistema de amortización pago único al final del plazo*



La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 7-1 *Amortización pago al final del periodo*

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				P
1		P x i	A + I	S - A
2		P x i	A + I	S - A
5	P	P x i	A + I	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema, la cual refleja el pago de rendimientos al final del tiempo, y en el último periodo, la cancelación del título.

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	0	0	0	50.000.000
1	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
2	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
3	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
4	0	5.000.000	5.000.000	50.000.000
5	50.000.000	5.000.000	55.000.000	0

EJEMPLO 2

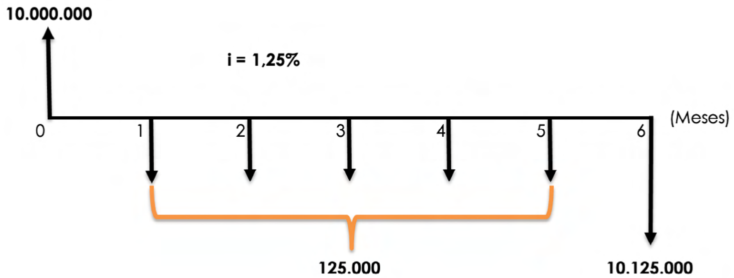
Alejandro obtiene un crédito por valor de 10.000.000, el cual se va a financiar a 6 meses a razón del 1,25 % mv, los pagos efectuados mensualmente serán únicamente de intereses y el valor del crédito será pagado al final del tiempo acordado. ¿Cómo quedaría la tabla de amortización para la deuda de Alejandro?

Solución:

Los intereses son el producto del valor del título por la tasa. ***I = P x i***

P = 10.000.000 n = 6 i = 0,0125 I = 10.000.000 x 0,0125

Gráfica 7.2 *Sistema de amortización pago único al final del plazo*



La tabla de amortización se calcula de la siguiente forma:

Tabla 7-2 *Amortización pago al final del periodo*

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				P
1		P x i	A + I	S - A
2		P x i	A + I	S - A
6	P	P x i	A + I	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema, la cual refleja el pago de rendimientos al final del tiempo, y en el último periodo, la cancelación del título.

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	0	0	0	10.000.000
1	0	125.000	125.000	10.000.000
2	0	125.000	125.000	10.000.000
3	0	125.000	125.000	10.000.000
4	0	125.000	125.000	10.000.000
5	0	125.000	125.000	10.000.000
6	10.000.000	125.000	10.125.000	0

7.4 SISTEMA DE AMORTIZACIÓN CUOTA FIJA

Este sistema es uno de los más utilizados en el sector financiero y en los establecimientos comerciales que ofrecen crédito a sus clientes a la hora de cerrar una venta.

Este sistema tiene las siguientes características:

- ❖ Durante el tiempo del contrato el valor del pago será el mismo.
- ❖ Los intereses se calculan sobre el saldo.
- ❖ Al inicio del plazo es mayor la participación de los intereses que el abono al principal o al valor del crédito.
- ❖ Los pagos pueden ser vencidos o anticipados.
- ❖ Esta cuota normalmente está acompañada por seguros.

Para tener en cuenta:

VC = Valor del crédito
CF = Cuota o pago
INT = Intereses
SA = Saldo anterior
A = Amortización
ip = Tasa de interés periódico

EJEMPLO 3

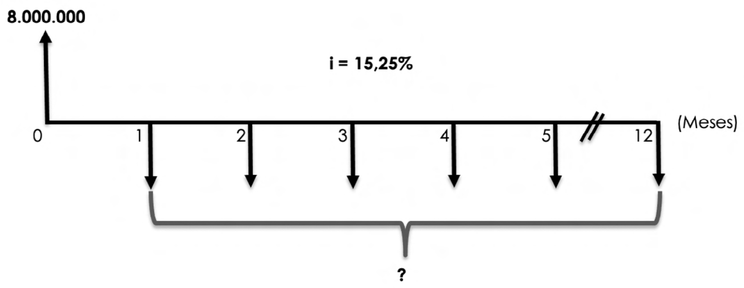
Gabriela obtiene un crédito para comprar su primera máquina industrial por valor de 8.000.000 um, el cual se va a financiar en un año a razón del 15,25 % ea, los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema de cuota fija. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Gabriela y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}1525]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = \ 0{,}011898 \qquad\qquad n = \ 1 \text{ x } 12 = 12$

VC = 8.000.000 n = 12 ip = 0,011898 kp = mv CF = ?

Gráfica 7.3 *Sistema de amortización cuota fija mes vencido*



Fórmula:

$$\mathbf{CF = VC \div \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]}$$

$$\mathbf{CF} = 8.000.000 \div \left[\frac{1-(1+0{,}011898)^{-12}}{0{,}011898} \right]$$

$$\mathbf{CF} = 719.342$$

Respuesta: El valor de cada cuota que debe pagar Gabriela corresponde a 719.342 um y la tabla de amortización quedaría de la siguiente manera:

Tabla 7-3 *Amortización pago al final del periodo*

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0				VC
1	CF - INT	SA x ip	CF	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema, la cual refleja el pago o la cuota fija; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0).

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	0	0	0	8.000.000
1	624.158	95.184	719.342	7.375.842
2	631.584	87.758	719.342	6.744.257
3	639.099	80.243	719.342	6.105.158
4	646.703	72.639	719.342	5.458.455
5	654.398	64.945	719.342	4.804.058
6	662.184	57.159	719.342	4.141.874
7	670.062	49.280	719.342	3.471.812
8	678.035	41.308	719.342	2.793.777
9	686.102	33.240	719.342	2.107.675
10	694.265	25.077	719.342	1.413.410
11	702.526	16.817	719.342	710.884
12	710.884	8.458	719.342	0

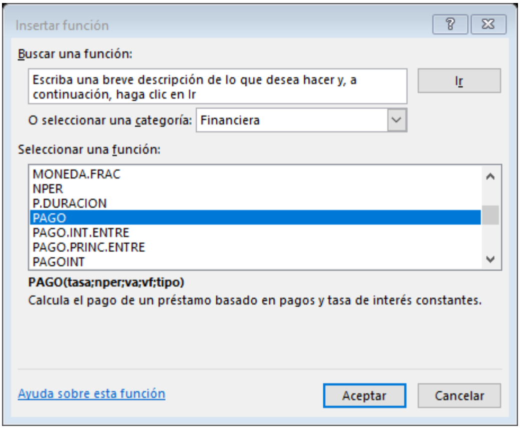
Excel contiene algunas funciones que ayudarían, y la tabla quedaría de la siguiente manera:

Tabla 7-4 *Cálculo cuota fija vencida a través de Excel*

Capital	8.000.000	8.000.000
Tasa de interés	15,25 %	0,011898
Tiempo	1	12
Capitalización	12	MV
Cuota fija	?	?

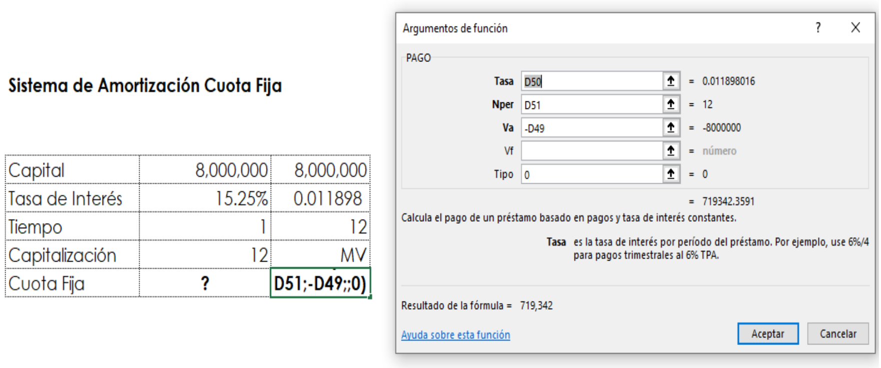
Después desde la celda gris ir a insertar función, *financiera*, opción *PAGO*, ver como quedaría:

Imagen 45: Función PAGO



Posteriormente, la ventana emergente solicitará la información que ya contiene la tabla como tasa de interés, número de periodos o tiempo, el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, valor futuro y, por último tipo, que para este caso es cero (0).

Imagen 46: Función PAGO variables



Luego de tener las variables listas, se ve que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Capital	8.000.000	8.000.000
Tasa de interés	15,25 %	0,011898
Tiempo	1	12
Capitalización	12	MV
Cuota fija	¿	**719,342**

EJEMPLO 4

Yorleny obtiene un crédito para invertir en un negocio de cría, levante y engorde de novillos en el municipio del cual es oriunda su madre, por valor de 50.000.000 um, el cual será financiado por el único banco del pueblo a tres (3) años, a razón del 12 % EA, y los pagos se efectuarán trimestre vencido una vez se reciba el dinero.

Yorleny se pregunta: ¿Cuál será la cuota fija por pagar al final de cada trimestre y cómo quedaría la tabla de amortización para pagar la deuda?

Solución:

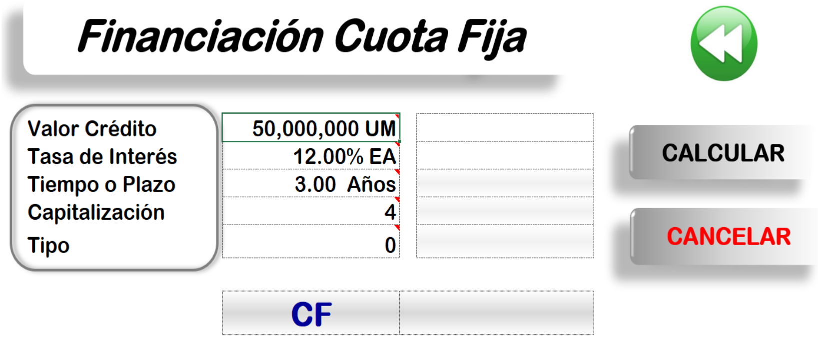
Como su hermano es docente de finanzas en una universidad de la región, ha creado un simulador en Excel y tiene la solución a la pregunta de su hermana. Ver cómo sería esta simulación:

Para dar solución es necesario considerar las siguientes variables.

Valor del crédito: 50.000.000
Tasa de interés: 12 %
Plazo: 3 años
Capitalización: 4 trimestres en el año
Tipo: Vencido

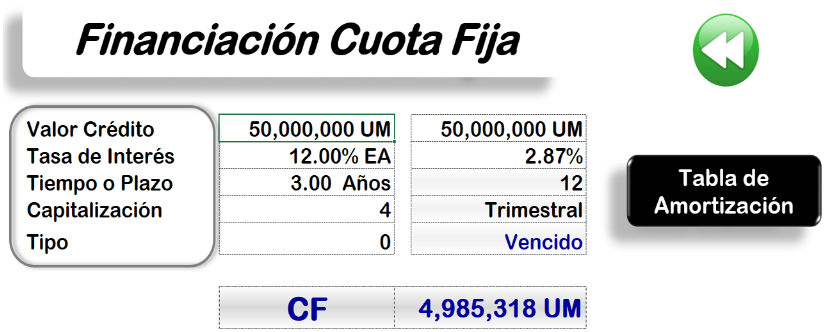
Posteriormente, solo bastó ingresar estos datos y dar clic en el botón *Calcular*.

Imagen 47: Simulación Cuota Fija



Y este fue el resultado de las variables y de la cuota fija:

Imagen 48: Simulación Cuota Fija Variables

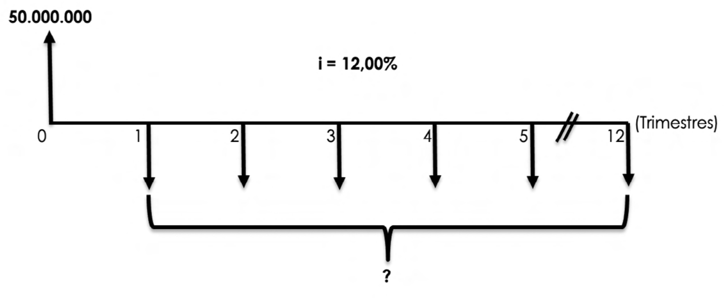


Finalmente, para ver el comportamiento del crédito solo bastó con dar clic en el botón *tabla de amortización*.

Periodo	Amortización	Interés	Cuota	Saldo
0				50,000,000
1	3,548,451	1,436,867	4,985,318	46,451,549
2	3,650,424	1,334,894	4,985,318	42,801,125
3	3,755,328	1,229,991	4,985,318	39,045,797
4	3,863,246	1,122,073	4,985,318	35,182,551
5	3,974,265	1,011,053	4,985,318	31,208,286
6	4,088,475	896,843	4,985,318	27,119,811
7	4,205,967	779,351	4,985,318	22,913,843
8	4,326,835	658,483	4,985,318	18,587,008
9	4,451,177	534,141	4,985,318	14,135,831
10	4,579,092	406,226	4,985,318	9,556,739
11	4,710,683	274,635	4,985,318	4,846,056
12	4,846,056	139,263	4,985,318	-

Para comprobar el resultado del problema, ver la aplicación para la tasa de interés y para el cálculo de la cuota fija:

Gráfica 7.4 *Sistema de amortización cuota fija trimestre vencido*



$$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}1200]^{\frac{1}{4}} - 1 \quad = \quad 0{,}028737 \qquad \mathrm{n} = 3 \times 4 = 12$$

$$\mathbf{CF} \;=\; 50.000.000 \div \left[\frac{1-(1+0{,}028737)^{-12}}{0{,}028737}\right]$$

$$\mathbf{CF} \;=\; 4.985.318$$

Respuesta: El valor por pagar cada trimestre equivale a **4.985.318 um**.

EJEMPLO 5

Un cafetero de la región tomó un crédito para invertir en renovación de café por un valor de 10.000.000 um, el cual será financiado por el único banco del pueblo a 2 años, a razón del 11,80 % EA; los pagos se efectuarán bimestre anticipado y una vez se reciba el dinero se descontará el valor de la primera cuota.

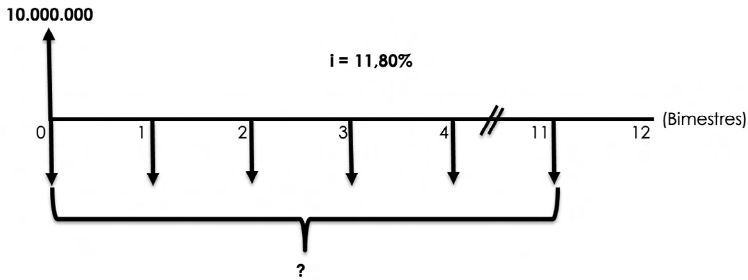
¿Cuál será el valor de la cuota fija por pagar al inicio de cada bimestre y cómo quedaría su tabla de amortización?

Solución:

$\mathbf{ip} = [1+0{,}1180]^{\frac{1}{6}} - 1 \;=\; 0{,}018764$ $\qquad$ $\mathrm{n} = 2 \text{ x } 6 = 12$

VC = 10.000.000 $\qquad$ n = 12 $\qquad$ ip = 0,018764 $\qquad$ kp = ba $\qquad$ CF = ?

Gráfica 7.5 *Sistema de amortización cuota fija bimestre anticipado*



Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{CF} = \mathbf{VC} \div \left[\frac{\mathbf{1 - (1 + i)^{-n}}}{\mathbf{i}} \right] (\mathbf{1 + i})$$

$$\mathbf{CF} \;=\; 10.000.000 \div \left[\frac{1 - (1 + 0{,}018764)^{-12}}{0{,}018764} \right] (1 + 0{,}018764)$$

$$\mathbf{CF} \;=\; 921.149$$

La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 7-5 *Amortización cuota fija con pagos anticipados*

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0	CF - INT		CF	VC - A
1	CF - INT	SA x ip	CF	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema de amortización, la cual refleja el pago o la cuota fija al final del tiempo; el saldo debe ser cero (0), que para el caso anticipado sería en mes 11.

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0	921.149	0	921.149	9.078.851
1	750.792	170.356	921.149	8.328.059
2	764.880	156.269	921.149	7.563.178
3	779.233	141.916	921.149	6.783.946
4	793.854	127.295	921.149	5.990.092
5	808.750	112.399	921.149	5.181.341
6	823.926	97.223	921.149	4.357.416
7	839.386	81.763	921.149	3.518.030
8	855.136	66.013	921.149	2.662.894
9	871.182	49.967	921.149	1.791.712
10	887.529	33.620	921.149	904.183
11	904.183	16.966	921.149	0

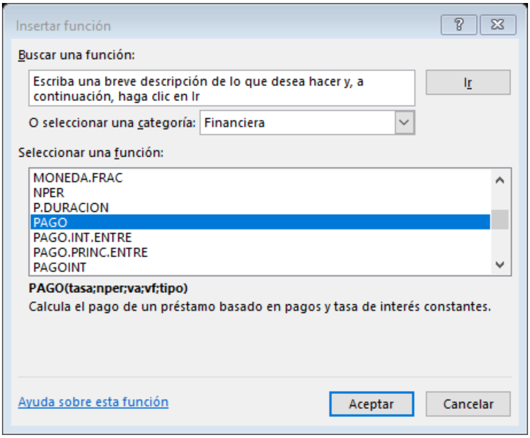
.Xls **Excel contiene algunas funciones que ayudarían al cálculo de la cuota fija anticipada, y esta quedaría de la siguiente manera:**

Tabla 7-6 *Cálculo cuota fija anticipada a través de Excel*

Capital	10.000.000	10.000.000
Tasa de interés	11,80 %	0,018764
Tiempo	2	12
Capitalización	6	ba
Cuota fija	?	?

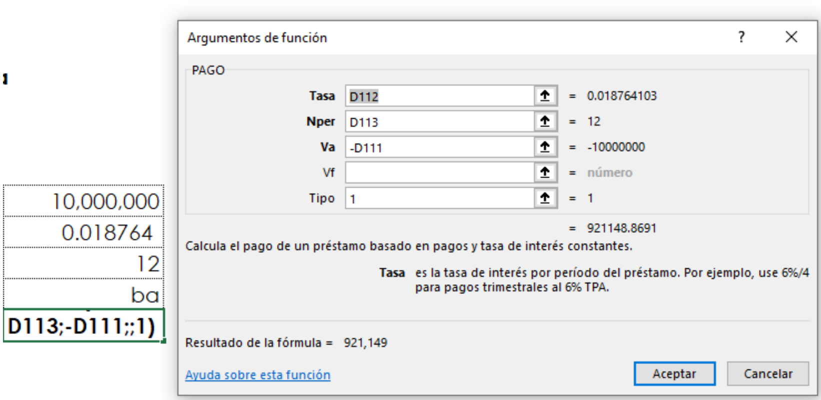
Después desde la celda gris ir a insertar la función *financiera*, opción *PAGO*, ver cómo quedaría esto:

Imagen 49: Función PAGO



Posteriormente, la venta emergente solicitará la información que ya contiene la tabla como: tasa de interés, número de periodos o tiempo, el valor actual será el valor del activo y tendrá un signo negativo, valor futuro y, por último, tipo, que para este caso es uno (1).

Imagen 50: Función PAGO variables



Luego que dispone de las variables listas, ver que el resultado ya aparece previsualizado. Finalmente, pulsar en *Aceptar*.

Capital	10.000.000	10.000.000
Tasa de interés	11,80 %	0,018764
Tiempo	2	12
Capitalización	6	ba
Cuota fija	?	**921.149**

Respuesta: El valor de la cuota fija por pagar al inicio de cada bimestre correspondería a **921.149**.

7.5 SISTEMA CUOTA VARIABLE - AMORTIZACIÓN CONSTANTE

El sistema permite que una deuda se pague mediante pagos periódicos, en la cual la cuota varía periodo tras periodo; a su vez, la composición del valor por pagar tendrá un componente fijo periodo a periodo, en el cual disminuya el saldo de la obligación.

Este sistema tiene las siguientes características:

- Durante el tiempo del contrato el valor cambiará de forma decreciente.
- Los intereses se calculan sobre el saldo.
- Al inicio del plazo es mayor la participación de los intereses que el abono al principal o al valor del crédito.
- Los pagos pueden ser vencidos o anticipados.
- Esta cuota normalmente está acompañada por seguros.

Para tener en cuenta:

VC = Valor del crédito
INT = Intereses
C = Cuota

SA = Saldo anterior
A = Amortización
ip = Tasa de interés periódico

EJEMPLO 6

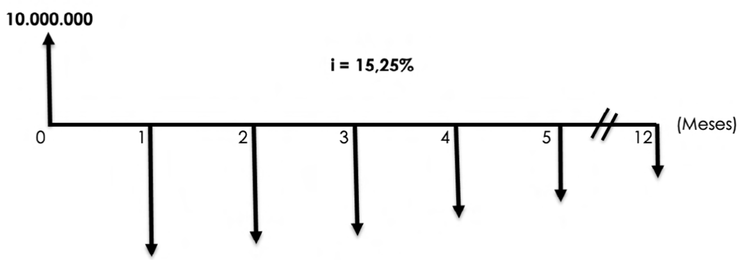
Lussiana obtiene un crédito para comprar su primer instrumento de trabajo por valor de 10.000.000 um, el cual se va a financiar en un año a razón del 15,25 % EA; los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema cuota variable con abono constante a capital. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Lussiana y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}1525]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = \quad 0{,}011898 \qquad\qquad n = \ 1 \text{ x } 12 = 12$$

VC = 10.000.000 n = 12 ip = 0,011898 kp = mv

Gráfica 7.6 *Sistema cuota variable - Amortización constante*



La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 7-7 *Amortización sistema cuota variable - Amortización constante mes vencido*

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0				VC
1	VC ÷ n	SA x ip	A + INT	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema de amortización, la cual refleja el pago o la cuota variable; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0).

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				10.000.000
1	833.333	118.980	952.313	9.166.667
2	833.333	109.065	942.398	8.333.333
3	833.333	99.150	932.483	7.500.000
4	833.333	89.235	922.568	6.666.667
5	833.333	79.320	912.653	5.833.333
6	833.333	69.405	902.738	5.000.000
7	833.333	59.490	892.823	4.166.667
8	833.333	49.575	882.908	3.333.333
9	833.333	39.660	872.993	2.500.000
10	833.333	29.745	863.078	1.666.667
11	833.333	19.830	853.163	833.333
12	833.333	9.915	843.248	0

EJEMPLO 7

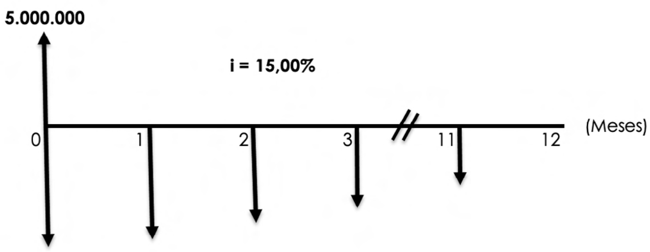
Isabella obtiene un crédito para adquirir su primer *Smartphone* por valor de 5.000.000 um, el cual se va a financiar en un año a razón del 15 % EA; los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema cuota variable con abono constante a capital de manera anticipada. ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Isabella y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}1500]^{\frac{1}{12}} - 1 \quad = \; 0{,}011715 \qquad \mathrm{n} = \; 1 \text{ x } 12 = 12$

VC = 5.000.000 n = 12 ip = 0,011715 kp = mv

Gráfica 7.7 *Sistema cuota variable - Amortización constante*



La tabla de amortización se estima de la siguiente forma:

Tabla 7-8 *Amortización sistema cuota variable - Amortización constante a capital mes anticipado*

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0	VC ÷ n		A + INT	VC - A
1	VC ÷ n	SA x ip	A + INT	S - A

Finalmente, se tendrá la tabla o esquema de amortización, la cual refleja el pago o la cuota variable; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0).

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0	416.667		416.667	4.583.333
1	416.667	53.693	470.360	4.166.667
2	416.667	48.812	465.479	3.750.000
3	416.667	43.931	460.598	3.333.333
4	416.667	39.050	455.716	2.916.667
5	416.667	34.169	450.835	2.500.000
6	416.667	29.287	445.954	2.083.333
7	416.667	24.406	441.073	1.666.667
8	416.667	19.525	436.192	1.250.000
9	416.667	14.644	431.310	833.333
10	416.667	9.762	426.429	416.667
11	416.667	4.881	421.548	0

EJEMPLO 8

Alicia obtiene un crédito para invertir en negocio de cría, levante y engorde de novillos en el municipio del cual es oriundo su padre, por valor de 40.000.000 um, el cual será financiado por el único banco del pueblo a tres (3) años a razón del 12 % EA; los pagos se efectuarán trimestre vencido una vez recibido el dinero.

Alicia se pregunta: ¿Cuál será el valor de cuota por pagar al final de cada trimestre y cómo quedaría la tabla de amortización para pagar la deuda?

Solución:

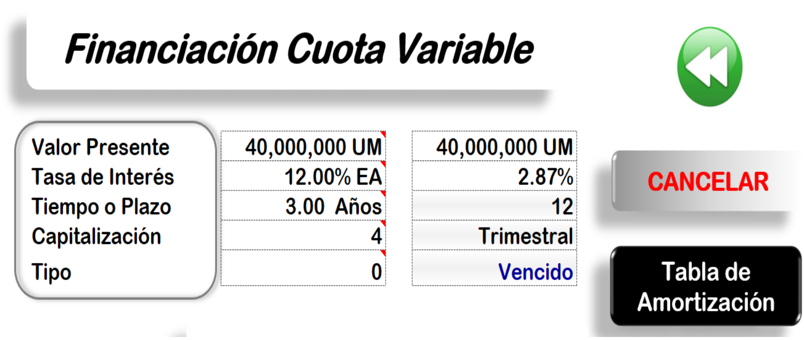
Como el esposo de una de sus hijas es docente de finanzas en una universidad de la región, este ha creado un simulador en Excel y tiene la solución a la pregunta de su suegra. Ver cómo será esta simulación.

Para dar solución fue necesario tener en cuenta las siguientes variables:

Valor del crédito: 40.000.000
Tasa de interés: 12 %
Plazo: 3 años
Capitalización: 4 trimestres en el año
Tipo: Vencido

Posteriormente, solo bastó con ingresar estos datos y dar clic en el botón *Calcular*.

Imagen 51: *Simulación Cuota Fija*



Por último, al pulsar en tabla de amortización, este fue el resultado:

Periodo	Amortización	Interés	Pago	Saldo
0				40,000,000
1	3,333,333	1,149,494	4,482,827	36,666,667
2	3,333,333	1,053,703	4,387,036	33,333,333
3	3,333,333	957,911	4,291,245	30,000,000
4	3,333,333	862,120	4,195,454	26,666,667
5	3,333,333	766,329	4,099,663	23,333,333
6	3,333,333	670,538	4,003,871	20,000,000
7	3,333,333	574,747	3,908,080	16,666,667
8	3,333,333	478,956	3,812,289	13,333,333
9	3,333,333	383,165	3,716,498	10,000,000
10	3,333,333	287,373	3,620,707	6,666,667
11	3,333,333	191,582	3,524,916	3,333,333
12	3,333,333	95,791	3,429,124	0

7.6 SISTEMA CUOTA FIJA CON PERIODO DE GRACIA EN EL PAGO

Este sistema, al igual que la cuota fija, mantiene el valor constante de sus depósitos, es solicitado y utilizado en el sector financiero en casos de crisis o cuando el dinero se invertirá en un negocio y, comúnmente, al inicio no se generan los ingresos suficientes; por ello, son necesarios unos periodos de gracia o el no pago de la obligación (cuotas).

Este sistema tiene las siguientes características:

- Durante el tiempo del contrato el valor del pago será el mismo.
- Los intereses se calculan sobre el saldo.
- Al inicio del plazo es mayor la participación de los intereses que el abono al principal o al valor del crédito.
- Los pagos pueden ser vencidos o anticipados.
- Esta cuota normalmente está acompañada por seguros.
- Existen periodos en los cuales no se efectúan pagos.

Para tener en cuenta:

VC = Valor del crédito
CF = Cuota o pago
INT = Intereses
SA = Saldo anterior
A = Amortización
K = Periodo de gracia
ip = Tasa de interés periódico

EJEMPLO 9

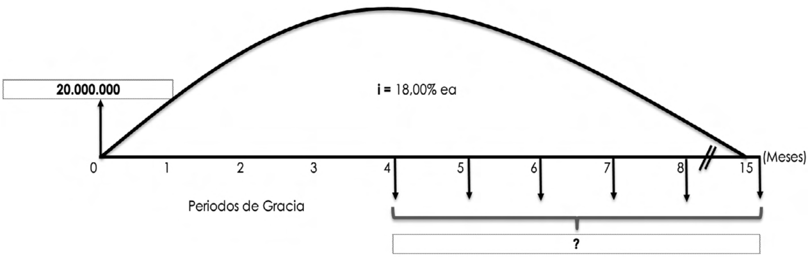
Rocío obtiene un préstamo de una entidad para financiar su negocio por un valor de 20.000.000 um, el cual será pagado con 12 cuotas iguales vencidas a razón del 18 % EA y los pagos efectuados serán realizados mensualmente 4 meses después de recibido el dinero. ¿Cuál es el valor que tendrá que efectuar cada mes Rocío y cómo quedaría la tabla de amortización?

Solución:

$\mathbf{ip} = [1 + 0{,}18]^{\frac{1}{12}} - 1 \;=\; 0{,}013888 \qquad K= 3 \quad n = 1 \text{ x } 12 = 12$

VC = 20.000.000 n = 12 ip = 0,013888 kp = mv CF = ?

Gráfica 7.8 *Amortización cuota fija con gracia en el pago*



Fórmula:

$$\mathbf{CF} = \mathbf{VC} \div \left[\frac{\mathbf{1-(1+i)^{-n}}}{\mathbf{i}}\right] \mathbf{(1+i)^{\wedge}-k}$$

$$\mathbf{CF} \;= 20.000.000 \div \left[\frac{1-(1+0{,}013888)^{-12}}{0{,}013888}\right] (1+0{,}013888)^{\wedge}-3$$

$$\mathbf{CF} \;=\; 1.897.856$$

Respuesta: El valor de cada cuota que debe pagar Rocío corresponde a 1.897.856 um y la tabla de amortización quedaría de la siguiente manera:

Tabla 7-9 *Amortización cuota fija con gracia en el pago*

Periodo	Amortización	Intereses	Cuota	Saldo
0				VC
1	CF - INT	SA x ip		S - A
4	CF - INT	SA x ip	CF	S - A

Finalmente, se tendría una tabla o esquema, la cual refleja el pago o la cuota fija; al final del tiempo, el saldo debe ser cero (0), teniendo en cuenta que hay 3 periodos de gracia, los pagos se efectúan desde el periodo 4 y se extenderán hasta el 15, de esta manera se cumplirá el mutuo o contrato del crédito de 12 pagos iguales.

Periodo	Amortización	Intereses	Pago	Saldo
0				20.000.000
1	-277.769	277.769		20.277.769
2	-281.626	281.626		20.559.395
3	-285.538	285.538		20.844.933
4	1.608.352	289.503	1.897.856	19.236.581
5	1.630.690	267.166	1.897.856	17.605.891
6	1.653.337	244.518	1.897.856	15.952.553
7	1.676.300	221.556	1.897.856	14.276.254
8	1.699.581	198.275	1.897.856	12.576.673
9	1.723.185	174.670	1.897.856	10.853.488
10	1.747.118	150.738	1.897.856	9.106.370
11	1.771.382	126.473	1.897.856	7.334.987
12	1.795.984	101.871	1.897.856	5.539.003
13	1.820.928	76.928	1.897.856	3.718.076
14	1.846.217	51.638	1.897.856	1.871.858
15	1.871.858	25.997	1.897.856	0

Como se puede observar en los primeros periodos, estos generan intereses, los cuales suman a la deuda; solo a partir del periodo 4 en el cual se inician los depósitos, este saldo empieza a menguar hasta ser cero (0) en la cuota 15.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

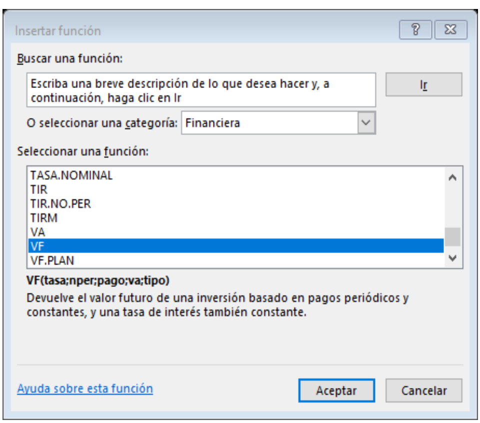
Tabla 7-10 *Cálculo cuota fija con gracia en el pago*

Valor del crédito	20.000.000	20.000.000
Tiempo (años)	1	12
Periodos de gracia	3	3
Tasa de interés (EA)	18 % EA	0,013888
Capitalización	12	mv
Valor futuro	¿	¿
Cuota	¿	¿

Como no existe una función en Excel que calcule esta cuota, sin embargo, es posible determinarla con la Fx *Pago* una vez calculado el valor futuro de los periodos de gracia con la *VF*.

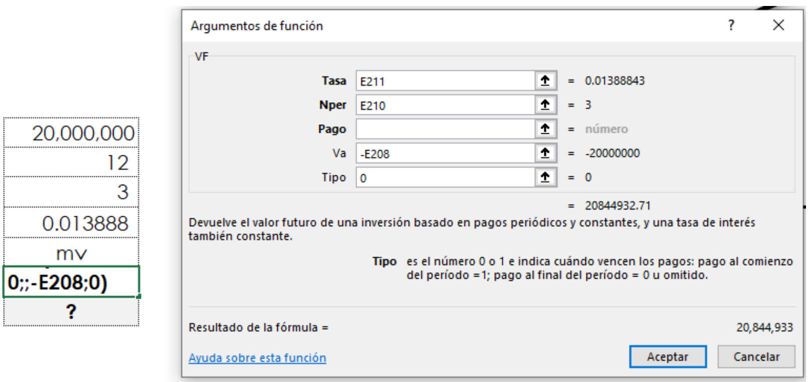
Para ello, es necesario ubicarse en la celda gris que corresponde al valor futuro y calcular este con la función:

Imagen 52: *Función VF*



Con base en la información de la tabla, seleccionar las variables solicitadas por la ventana como son: tasa de interés, número de periodos, valor del crédito o valor actual con signo negativo y tipo cero (0), y posteriormente, pulsar en *Aceptar*. Ver cómo es esto:

Imagen 53: *Función VF variables*

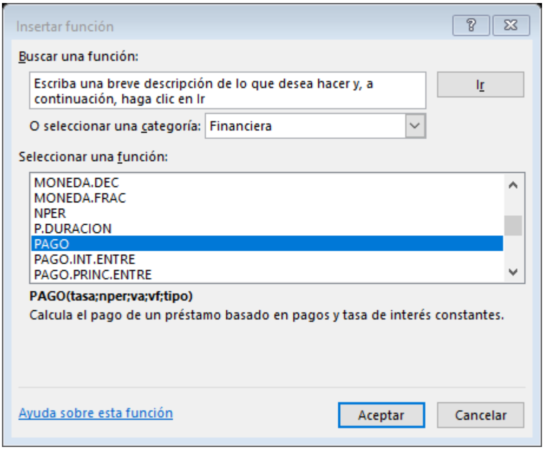


El resultado será el siguiente:

Valor del crédito	20.000.000	20.000.000
Tiempo (años)	1	12
Periodos de gracia	3	3
Tasa de interés (EA)	18 % EA	0,013888
Capitalización	12	mv
Valor futuro	¿	**20.844.933**
Cuota	¿	¿

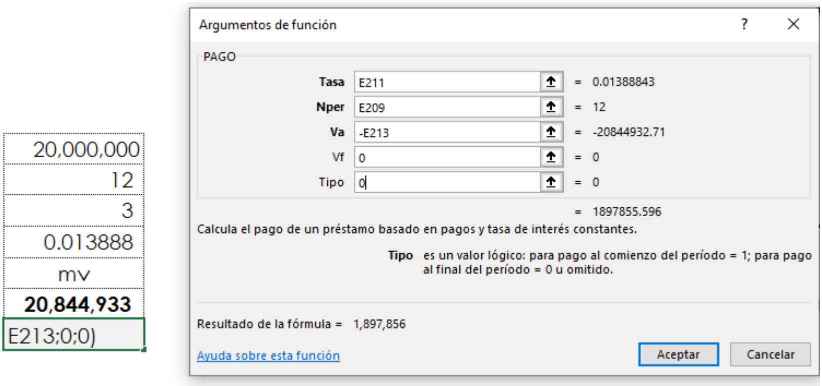
Una vez se tiene el valor futuro, se procede a calcular la cuota fija mediante la utilización de la función *PAGO*, para ello es necesario ubicarse en la celda del último interrogante:

Imagen 54: *Función PAGO*



Según la información de la tabla, se debe seleccionar las variables solicitadas por la ventana como: tasa de interés, número de periodos, valor del crédito o valor actual con signo negativo, este será el valor futuro que se calculó anteriormente, valor futuro y tipo cero (0) y luego pulsar en *Aceptar*. Ver cómo sería esto:

Imagen 55: Función PAGO variables



El resultado será el siguiente:

Valor del crédito	20.000.000	20.000.000
Tiempo (años)	1	12
Periodos de gracia	3	3
Tasa de interés (EA)	18 % EA	0,013888
Capitalización	12	mv
Valor futuro	¿	**20.844.933**
Cuota	¿	**1.897.856**

PROBLEMAS

1. Gabriel obtiene un crédito para comprar su primer apartamento por valor de 100.000.000 um, el cual se va a financiar en 10 años a razón del 10 % EA y los pagos efectuados mensualmente serán mediante el sistema de cuota fija.

   ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Gabriel y cómo quedaría la tabla de amortización? **Respuesta: 921.149**.

2. Guillermo obtiene un crédito para comprar su primer computador por valor de 10.000.000 um, el cual se va a financiar en un año a razón del 10 % EA, los pagos serán efectuados mensualmente por anticipado mediante el sistema de cuota variable con abono constante a capital.

   ¿Cuál es el valor de los pagos que tendrá que efectuar Guillermo y cómo quedaría la tabla de amortización?

3. Luz Marina obtiene un préstamo de una entidad para financiar su negocio por un valor de 30.000.000 um, el cual será pagado con 12 cuotas iguales vencidas a razón del 18,8 % EA, los pagos efectuados serán realizados mensualmente 4 meses después de recibido el dinero.

   ¿Cuál es el valor que tendrá que pagar cada mes Luz Marina y cómo quedaría la tabla de amortización? **Respuesta: 2.861.782**.

8 EVALUACIÓN DE INVERSIONES

Uno de los dilemas de invertir en un negocio, adquirir un activo o simplemente emprender una actividad es saber con antelación si desde lo financiero este será benéfico; sin embargo, es posible realizar un estudio financiero previo a la decisión de invertir o no, el cual consiste en recopilar una serie de información relacionada con costos, gastos, costos de capital, políticas de crecimiento, impuestos locales, etc., con el fin de establecer informes financieros y, con base en ellos, determinar unos indicadores que permitirán al inversor orientarse y así tomar una decisión asertiva.

Algunas de las variables para considerar en la evaluación de inversiones son Tasa de Descuento, Valor Presente Neto y Tasa Interna de Retorno, entre otras.

8.1 TASA DE DESCUENTO (TD)

La Tasa de Descuento en un valor relativo está compuesta por diferentes variables, de acuerdo con el modo o método de cálculo; en el modelo de evaluación de activos intervienen ítems como el costo del patrimonio o también denominado recursos propios, con destino a una inversión, el costo de la deuda o recursos de terceros y, finalmente, la carga impositiva por parte del Gobierno. (Baca Urbina, 2016)

La Tasa de Descuento busca actualizar los ingresos que se percibirán en el futuro para compensar los efectos macroeconómicos que sufre el dinero, como lo es la pérdida de poder adquisitivo por causa de la inflación; en el caso de las inversiones permite establecer la tasa mínima de rendimiento de una inversión, que le posibilite a los inversores o dueños del capital subsanar costes de capital, otras opciones de inversión, inflación y devaluación, entre otras. Ver cómo poder estimarla:

El Costo Promedio Ponderado de Capital (CPPC) es uno de los métodos más usuales a la hora de calcular una Tasa de Descuento para evaluar inversiones, también es conocido con la sigla en ingles WACC y para otros teóricos la Tasa Mínima de Rentabilidad Aceptada (TMAR).

Para ello es necesario contar con la siguiente información:

- Costo del patrimonio (Cp).
- Participación del patrimonio o los recursos propios en la inversión total (Pp).
- Costo de la deuda o préstamos con terceros (Cd).
- Participación de la deuda o los recursos de terceros en la inversión total (Pd).
- Impuestos o carga impositiva (Imp).
- Inversión Total (IT).

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{CPPC = (Cp \times Pp) + (Cd\,x\,Pd)(1 - Imp)}$$

EJEMPLO 1

Una persona requiere determinar cuánto debe rentar su negocio, si este cuenta con las siguientes obligaciones y variables: un crédito financiado a razón del 12 % por valor de 20.000 um, por su parte el dueño del negocio aportó 85.000 um y estima un costo por su dinero del 10 %; finalmente, el Gobierno determina como impuesto de renta el 25 % sobre utilidades. ¿Cuál es la tasa mínima de rendimiento o descuento que su negocio debe rentar?

Solución:

El caso muestra la siguiente información:

Cd = 0,12 Cp = 0,10 Imp = 0,25 D = 20.000 RP = 85.000

Por lo anterior, se debe sumar la deuda y los recursos propios para determinar el valor de la inversión.

IT = 20.000 + 85.000 = 105.000

Por otro lado, la Pp será igual a: 20.000 / 105.000 = 0,1905, Pd = 85.000 / 105.000 = 0,8095

Finalmente, las variables quedarán de la siguiente forma:

Cd = 0,12 Cp = 0,10 Imp = 0,25 Pd = 0,1905 Pp = 0,8095 TD = ?

$$\mathbf{CPPC} = (0{,}10 \times 0{,}8095) + (0{,}12 \,\mathrm{x}\, 0{,}1905)(1 - 0{,}25)$$

$$\mathbf{CPPC} = (0{,}0981)$$

Respuesta: El negocio requiere una tasa mínima o descuento del 9,81 %.

EJEMPLO 2

Determinar la Tasa de Descuento para los siguientes datos:

Cd = 20 % Cp = 12 % Imp = 34 % Deuda = 12.000.000

Recursos propios = 100.000.00 TD = ?

Solución:

Imagen 56: Costo Promedio Ponderado de Capital Variables

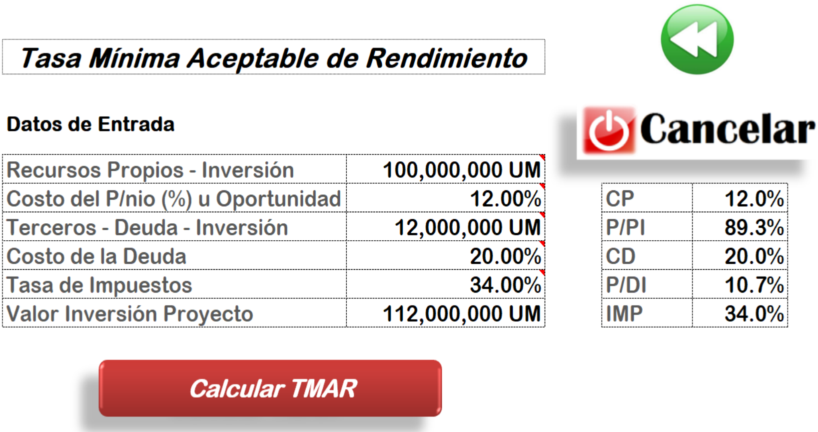
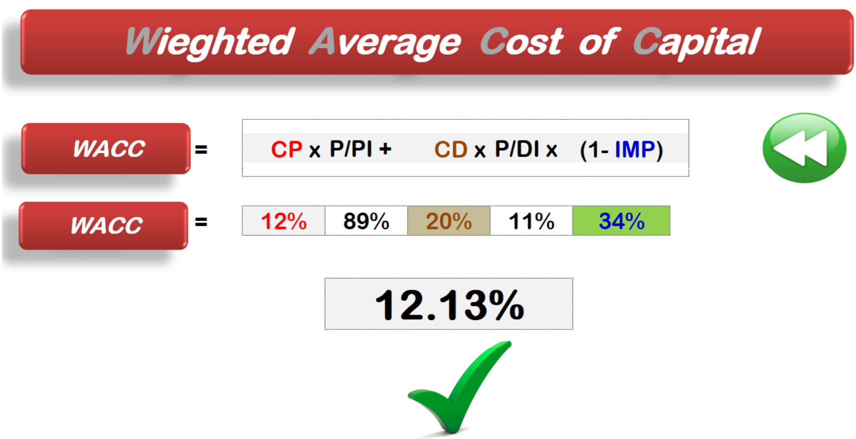


Imagen 57: Resultado Costo Promedio Ponderado de Capital



Respuesta: La Tasa de Descuento será igual al **12,13 %.**

8.2 VALOR PRESENTE NETO (VPN)

El Valor Presente Neto o VPN representa la diferencia entre los beneficios esperados actualizados o traídos a valor presente, frente al valor de la inversión; dicho en otras palabras, es determinar si invertir hoy una cantidad de dinero representa rentable, factible o simplemente a retribución compensa lo invertido (Padilla, 2016).

A la hora de evaluar proyectos de inversión de renta variable, es un indicador que determina de acuerdo con su resultado un gran porcentaje entre la decisión de invertir o no, dado que en el caso de que su valor sea negativo, de primera plana y asumiendo que la información suministrada es ajustada a la realidad, la decisión será no invertir.

Definición

Es la diferencia de la sumatoria de los flujos netos actualizados frente a la inversión inicial.

Ver cómo calcular el VPN:

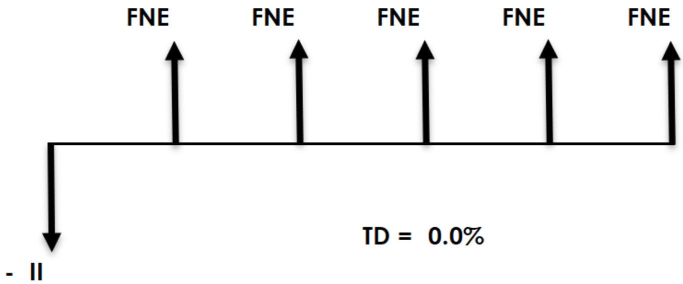
Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{VPN = -II + \sum \frac{FNE}{(1 + TD)n}}$$

En la cual,

VPN = Valor Presente Neto
II = Inversión Inicial
FNE = Flujos Netos de Efectivo o Ingresos esperados
TD = Tasa de Descuento
n = Es la vida útil del proyecto u horizonte.

Gráfica 8.1 *Flujo de caja del VPN*



Criterios para tener en cuenta a la hora de evaluar el VPN:

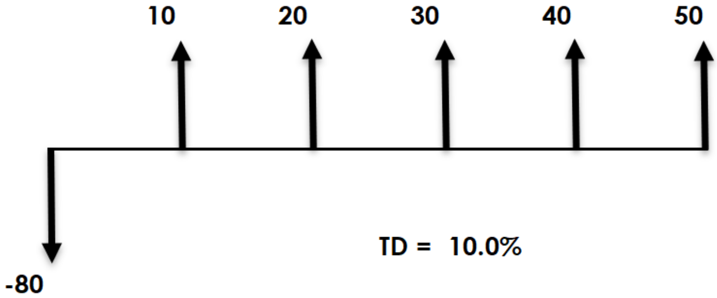
VPN < 0 = La inversión es desfavorable.
VPN = 0 = La decisión genera muchas dudas e incertidumbre.
VPN > 0 = La inversión es favorable.

Ver algunas aplicaciones:

EJEMPLO 1

Teniendo en cuenta el siguiente flujo de caja determinar mediante el VPN si el proyecto es favorable o no.

Gráfica 8.2 *Flujo de caja para el cálculo del VPN*



Solución:

Para iniciar es necesario actualizar o traer a valor presente cada ingreso desglosando la fórmula de esta forma:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
- II	fne1	fne2	fne3	fne4	fne5
	(1+i)^1	(1+i)^2	(1+i)^3	(1+i)^4	(1+i)^5

Sustituyendo:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
-80	10	20	30	40	50
-80	(1+0,1)^1	(1+0,1)^2	(1+0,1)^3	(1+0,1)^4	(1+0,1)^5

El resultado es:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
-80	10	20	30	40	50
-80	**9,09**	**16,53**	**22,54**	**27,32**	**31,05**

Finalmente, se suman los resultados y el valor obtenido es:

VPN = **26,53**

Respuesta: Teniendo en cuenta los criterios de evaluación con respecto al VPN, la inversión es favorable dado que el VPN es positivo y equivalente a 26,53.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

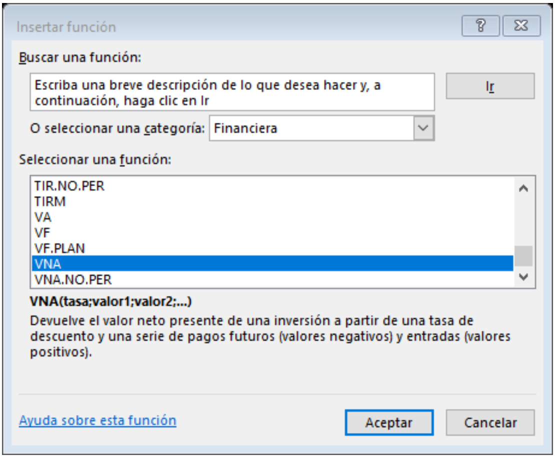
Para resolver el caso y hallar en Excel el VPN se utilizará la función VNA, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 8-1 *Cálculo del VPN en Excel*

VPN	TD	1	2	3	4	5	II
	10 %	10	20	30	40	50	-80

Para ello es necesario ubicarse en la cela de color amarillo y posteriormente ir a insertar función para elegir *financiera*, *VNA* y por último *Aceptar*:

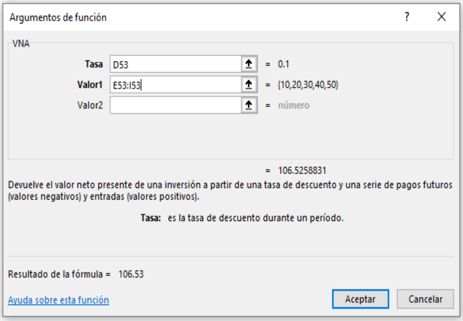
Imagen 58: *Función VNA*



Una vez se tiene la nueva ventana, esta solicitará la tasa, que para el caso será la Tasa de Descuento; en valor 1 ir a seleccionar desde el año 1 hasta el 5 y luego dar clic en *Aceptar*. Ver cómo hacerlo:

Imagen 59: Función VNA Variables

VPN	TD	1	2	3	4	5
E53:I53)	10.0%	10	20	30	40	50



De lo anterior se tendrá lo siguiente:

VPN	TD	1	2	3	4	5	II
106.53	10 %	10	20	30	40	50	-80

Por el momento se tendrá el valor presente de los 5 periodos actualizados a la Tasa de Descuento, por último, editar la celda amarilla con F2 y al final o inicio sumar la inversión inicial:

VPN	TD	1	2	3	4	5	II
=VNA(D53;E53:I53)+J53		10	20	30	40	50	-80

Finalmente obtendremos el siguiente resultado:

VPN	TD	1	2	3	4	5	II
26.53	10 %	10	20	30	40	50	-80

Respuesta: Teniendo en cuenta los criterios de evaluación con respecto al VPN, la inversión es favorable dado que el VPN es positivo y equivalente a 26,53.

EJEMPLO 2

Un inversionista desea conocer si invertir en un negocio es favorable o no, para lo cual dispone de la siguiente información:

El valor requerido para que el negocio inicie operaciones es de 60.000 USD, una vez proyectado el flujo de caja, se obtuvieron unos FNE de

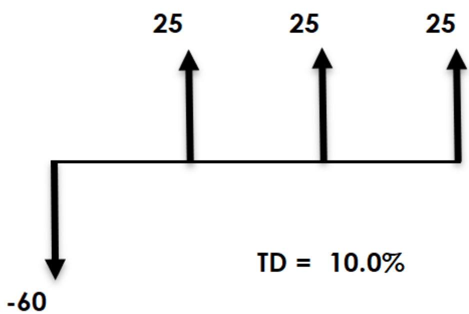
25.000 USD para cada uno de los tres periodos y se estima descontar los flujos a una tasa del 10 %.

Solución:

Según la información suministrada, se tienen los siguientes datos:

II = 60.000 TD = 10 % FNE = 25.000 VPN = ?

Gráfica 8.3 *Flujo de caja con FNE constantes*



Fórmula:

$$\mathbf{VPN = -II + \sum \frac{FNE}{(1+TD)n}}$$

0	1	2	3

-60.000	25.000	25.000	25.000
-60.000	**22.727**	**20.661**	**18.783**

Finalmente, es necesario sumar los resultados y el valor obtenido es:

VPN = **2.171,30**

Respuesta: Teniendo en cuenta que el valor VPN es positivo, con un valor equivalente a 2.171,30, desde lo técnico-financiero es preciso afirmar que es favorable invertir en el negocio.

Considerando que el caso propuesto refleja FNE constantes, es posible solucionar este caso a través del valor presente de una anualidad vencida.

Ver cómo es esto:

II = 60.000 TD = 10 % FNE = 25.000 VPN = ?

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - II}$$

Sustituyendo se tendría lo siguiente:

$$\mathbf{P} = 25.000\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-3}}{0{,}10}\right] - 60.000$$

$$\mathbf{P = 2.171}$$

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Para resolver el caso y hallar en Excel el VPN se debe utilizar la función VNA, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 8-2 *Cálculo del VPN con FNE constantes en Excel*

VPN	TD	0	I.I	2	3
	10 %	-60.000	25.000	25.000	25.000

Una vez elaborada la tabla de Excel con la Tasa de Descuento, los FNE y la Inversión Inicial, ubicarse en la celda amarilla donde se calculará el indicador. Posteriormente, digitar =VNA(, seleccionar la tasa, luego los tres FNE, cerrar paréntesis y por último se suma la II y luego dar clic en *Aceptar*:

VPN	TD	0	1	2	3
=VNA(M77;O77:Q77)+N77		-60,000	25,000	25,000	25,000

El resultado es:

VPN	TD	0	1	2	3
2.171	10 %	-60.000	25.000	25.000	25.000

Como se observa, coincide el valor obtenido de la fórmula con el resultado de la función, con un VPN equivalente a **2.171**.

EJEMPLO 3

Una máquina produce 1.800 unidades mensuales, las cuales deben venderse a $80 c/u. El estado actual de la máquina es regular y si no se repara podrá funcionar durante seis meses más y luego proceder a desecharla, pero si hoy le hacemos una reparación total, esta tiene un costo de $1.500.000, lo cual garantiza que la máquina podrá servir durante un año contado a partir de la reparación. Suponiendo una tasa del 4 %, ¿desde lo financiero será aconsejable repararla?

Solución:

Se cuenta con los siguientes datos:

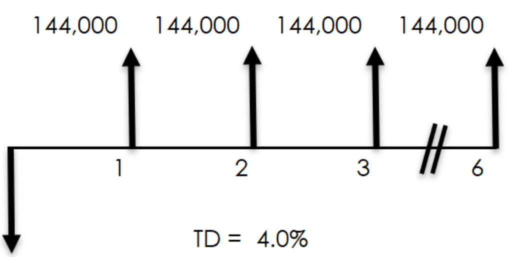
Caso 1: No reparar

Producción: Teniendo en cuenta que se producen 1.800 unidades al mes, esta cantidad se multiplica por el precio de ellas.

1.800 x 80 = 144.000 cada mes.

II = 0 TD = 4 % FNE = 144.000 n = 6 VP = ?

Gráfica 8.4 *Flujo de caja ingresos máquina con FNE constantes*



-

Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{VPN = -II + \sum \frac{FNE}{(1+TD)n}}$$

Dado que para el caso 1 no hay inversión, solo basta con actualizar los 6 ingresos de la siguiente manera:

1	2	3	4	5	6
144.000	144.000	144.000	144.000	144.000	144.000
(1+0,04)^1	(1+0,04)^2	(1+0,04)^3	(1+0,04)^4	(1+0,04)^5	(1+0,04)^6

1	2	3	4	5	6
144.000	144.000	144.000	144.000	144.000	144.000
138.462	**133.136**	**128.015**	**123.092**	**118.358**	**113.805**

Finalmente se debe sumar los resultados y el valor obtenido es:

VP = **754.868**

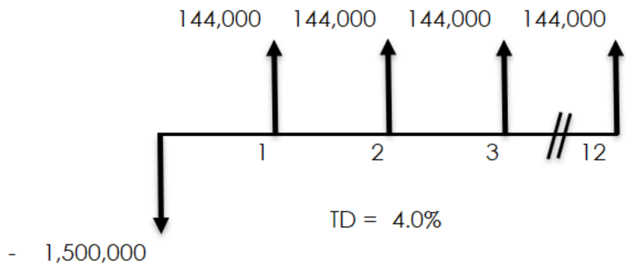
Caso 2 - Reparar, para ello se tiene lo siguiente:

Producción: Teniendo en cuenta que se producen 1.800 unidades al mes, este se multiplica por el precio de ellas.

1.800 x 80 = 144.000 cada mes.

II = 1.500.000   TD = 4 %   FNE = 144.000   n = 12   VPN = ?

Gráfica 8.5 *Flujo de caja ingresos máquina caso 2, con FNE constantes*



Fx **Fórmula:**

$$\mathbf{P = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - II}$$

$$\mathbf{P = 144.000\left[\frac{1-(1+0,04)^{-12}}{0,04}\right] - 1.500.00}$$

$$\mathbf{P} = -148.549$$

Respuesta: Considerando las dos opciones de reparar y no reparar, evaluando los flujos y la inversión con la técnica de valor presente y Valor Presente Neto, lo más aconsejable es no reparar teniendo en cuenta que sin invertir dinero se obtienen beneficios por valor de **$754.868,** mientras que al reparar es necesario invertir $1.500.000 y, en consecuencia, su valor presente es negativo, es decir, no es favorable financieramente.

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Para resolver el caso y hallar en Excel el VPN se utilizará la función VNA, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 8-3 *Cálculo del VPN con FNE constantes en Excel*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000

TD	4%	I.I	- 1,500,000	VPN	

Una vez elaborada la tabla de Excel con la Tasa de Descuento, los FNE y la Inversión Inicial se debe ubicar en la celda para determinar el VPN donde se calculará el indicador. Posteriormente, digitar =VNA(, seleccionar la tasa, luego los 12 FNE, cerrar paréntesis y por último sumar la II y luego dar clic en *Aceptar*. Ver como sería esto:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000	144,000

TD	4%	I.I	- 1,500,000	=VNA(I139;F137:Q137)+L139 VNA(tasa; valor1; [valor2]; [valor3]; ...)

El resultado es:

TD	4 %	II	- 1.500.000	VPN	- 148.549

Como se observa, coincide el valor obtenido de la fórmula y de la función, con un VPN equivalente a **–148.549**.

8.3 TASA INTERNA DE RETORNO (TIR)

Es aquel valor relativo que corresponde al promedio que un inversionista espera recibir cada año del valor invertido en la actividad económica.

Visto desde otra perspectiva, la TIR hace referencia al valor porcentual que la actividad productiva genera, es decir, beneficios que cubran sus costos y gastos y, adicional a ello, hay un excedente que permita retornar parte del dinero a la fuente de financiación.

Desde el punto de vista matemático, la TIR se refiere a igualar a cero (0) el Valor Presente Neto y permite establecer una tasa que haga o transforme los FNE en un valor igual al de la inversión.

Los criterios por considerar para la TIR a la hora de evaluar un proyecto son, como primera medida, que el VPN sea positivo, de no ser así, no se calculan más indicadores y el proyecto es rechazado; de ser positivo, esta deberá ser superior a la Tasa de Descuento para establecer que la inversión es favorable o factible. (Baca Urbina, 2016)

TIR para flujos constantes:

EJEMPLO 4

Cuál será el retorno de un inversionista si dispone de la siguiente información:

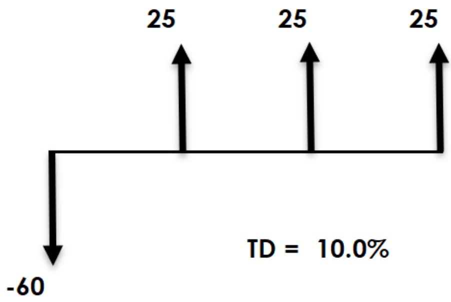
El valor requerido para que el negocio inicie operaciones es de 60.000 USD, una vez proyectado el flujo de caja se obtuvieron unos FNE de 25.000 USD para cada uno de los tres periodos; se estima descontar de los flujos una tasa del 10 % y finalmente un VPN de 2.171.

Solución:

Se Tienen los siguientes datos:

II = 60.000 TD = 10 % FNE = 25.000 VPN = 2.171 TIR = ?

Gráfica 8.6 *Flujo de caja con FNE constantes*



Fx Fórmula:

$$\mathbf{TIR} = \mathbf{FNE}\left[\frac{\mathbf{1}-(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}}\right] - \mathbf{II} = \mathbf{0}$$

Sustituyendo se tendrá,

$$\mathbf{TIR} = 25.000\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-3}}{\mathrm{i}}\right] - 60.000 = 0$$

Luego se procede a despejar.

$$\mathbf{TIR} = 25.000\left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-3}}{\mathrm{i}}\right] = 60.000$$

$$\mathbf{TIR} = \left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-3}}{\mathrm{i}}\right] = (60.000\ /\ 25.000)$$

$$\mathbf{TIR} = \left[\frac{1-(1+\mathrm{i})^{-3}}{\mathrm{i}}\right] = 2.4$$

Como la incógnita se encuentra en el numerador y denominador, el proceso por seguir es iterar, es decir, asignar valores a *i*, de tal manera que se encuentre un valor que al ser operado en la ecuación, sea igual a 2,4; cuando esto suceda, se ha encontrado el valor de la TIR:

Cuando **i** = 10 %, entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0{,}10)^{-3}}{0{,}10}\right] = 2{,}49$$

En este caso, el resultado es superior a 2,40, ahora es necesario sustituir con un valor menor para ver el resultado.

Cuando **i** = 8 %, entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0{,}08)^{-3}}{0{,}08}\right] = 2{,}58$$

Como se observa el resultado aumentó, es decir, que existe una relación inversa; por tal motivo, la línea para hallar el 2,40 es aumentar.

Cuando **i** = 11 %, entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0{,}11)^{-3}}{0{,}11}\right] = 2{,}44$$

Cuando **i** = 12 %, entonces:

$$\left[\frac{1-(1+0{,}12)^{-3}}{0{,}12}\right] = 2{,}40$$

En este caso se ha encontrado la tasa que hay que sustituir y el resultado es 2,40, eso indica que la TIR equivale al 12 %.

i	**i**	**i**	**i**
10 %	8 %	11 %	12 %
2,49	**2,58**	**2,44**	**2,40**

Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para la inversión de 60.000, con flujos fijos de 25.000 USD durante tres periodos es del **12 %**; dado que es mayor a la Tasa de Descuento, esto indica que el proyecto o la inversión es favorable.

.Xls **En Excel quedaría de la siguiente manera:**

Para resolver el caso y hallar en Excel la TIR se utilizará la función TIR, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 8-4 *Cálculo de la TIR con FNE constantes en Excel*

TIR	0	1	2	3
	-60.000	25.000	25.000	25.000

Una vez elaborada la tabla de Excel con FNE y la Inversión Inicial, e necesario ubicarse en la celda para determinar la Tasa Interna en la cual se calculará el indicador. Posteriormente digitar =TIR(, seleccionar el valor de la inversión hasta el último FNE y luego dar clic en *Aceptar*. Ver como resultaría esto:

TIR	0	1	2	3
=TIR(L147:O147)	0	25,000.00	25,000.00	25,000.00

El resultado es:

TIR	0	1	2	3
12 %	-60.000	25.000	25.000	25.000

Como se observa, coincide el valor obtenido de la fórmula y de la función, con una TIR equivalente al **12 %**.

TIR cuando solo existe un ingreso:

EJEMPLO 5

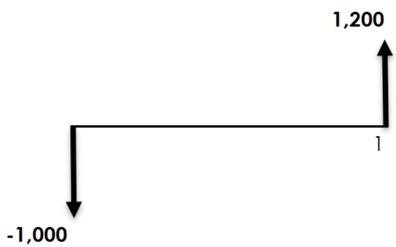
Determinar la Tasa Interna de Retorno de una inversión de 1.000 USD, que un año después recibe 1.200 USD como beneficios.

Solución:

Se tienen los siguientes datos:

II = 1.000 FNE = 1.200 TIR = ?

Gráfica 8.7 *Flujo de caja con un único FNE*



Para recordar, la TIR es la tasa que hace que el VPN sea igual a cero (0).

Fórmula:

$$\mathbf{TIR = \text{-} II + \sum \frac{FNE}{(1 + TD)n} = 0}$$

$$\mathbf{TIR} = \text{-}\,1.000 + \frac{1.200}{(1+i)1} = 0$$

$$\mathbf{TIR} = \frac{1.200}{(1+\mathrm{i})} = 1.000$$

$$\mathbf{TIR} = 1.200 = 1.000\,(1+\mathrm{i})$$

$$\mathbf{TIR} = \frac{1.200}{1.000} = (1+\mathrm{i})$$

$$\mathbf{TIR} = \frac{1.200}{1.000} - 1 = \mathrm{i}$$

$$\mathbf{TIR} = 0{,}2$$

$$\mathbf{TIR} = 0{,}2 \times 100 = \mathbf{20\,\%}$$

Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para una inversión de 1.000 USD que generó un ingreso al año de 1.200 USD equivale al **20 %.**

.Xls **En Excel quedaría así:**

Para resolver el caso y hallar en Excel la TIR se utilizará la función TIR, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 8-5 *Cálculo de la TIR con un único FNE en Excel*

0	1
-1.000	1.200

TIR =	

0	1
-1,000	1,200

=TIR(F177:G177)

0	1
-1.000	1.200

TIR = 20 %

TIR cuando existen dos FNE o ingresos constantes:

EJEMPLO 6

Una odontóloga procedente del municipio mas alegre de Colombia invierte en un kit de instrumentación el valor de 500 USD, un año después, luego de saldar costos y gastos recibe 330 USD y un año después 330 USD como utilidades.

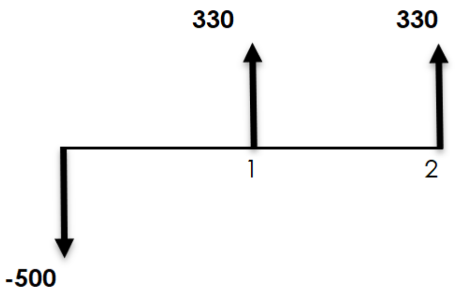
Determinar la Tasa Interna de Retorno para la odontóloga luego de haber invertido en el kit.

Solución:

Se cuenta con los siguientes datos:

II = 500 FNE_1 = 330 FNE_2 = 330 TIR = ?

Gráfica 8.8 *Flujo de caja para dos FNE constantes*



Para recordar, la TIR es la tasa que hace que el VPN sea igual a cero (0).

Fórmula:

$$\mathbf{TIR = -II + \sum \frac{FNE}{(1+TD)n} = 0}$$

En este caso como se presentan dos flujos iguales, es posible solucionarlos con la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c$, la cual se resuelve con la fórmula:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Para ello es necesario ordenar el siguiente planteamiento:

$$\mathbf{TIR} = -500 + \frac{330}{(1+i)} + \frac{330}{(1+i)^2} = 0$$

$$\mathbf{TIR} = \frac{330}{(1+\mathrm{i})} + \frac{330}{(1+\mathrm{i})^2} = 500$$

$$\mathbf{TIR} = \frac{330}{(1+\mathrm{i})} + 330 = 500\,(1+\mathrm{i})^2$$

$$\mathbf{TIR} = 330 + 330(1+\mathrm{i}) = 500\,(1+\mathrm{i})^2$$

$$\mathbf{TIR} = 0 = 500\,(1+\mathrm{i})^2 - 330(1+\mathrm{i}) - 330$$

En el cual,

X = (1 + i)   **a** = 500   **b** = −330   **c** = −330

Entonces,

$$(\mathbf{1}+\mathbf{i}) = \frac{330 \pm \sqrt{-330^2 - 4(500)(-330)}}{2(500)}$$

$$(\mathbf{1}+\mathbf{i}) = \frac{330 \pm \sqrt{768.900}}{1.000}$$

$$(\mathbf{1}+\mathbf{i}) = \frac{330 \pm 876{,}8694316}{1.000}$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{1}) = \frac{330 \pm 876{,}8694316}{1.000} - 1$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{1}) = \frac{330 + 876{,}8694316}{1.000} - 1$$

$$\mathbf{i(1)} = 0{,}20689431 \text{ x } 100 = \mathbf{20{,}69\ \%}$$

$$\mathbf{i}(2) = \frac{330 - 876{,}8694316}{1.000} - 1$$

$$\mathbf{i(1)} = -0{,}5468694 \text{ x } 100 = \mathbf{-54{,}69\ \%}$$

En Excel quedaría de la siguiente manera:

Para resolver el caso y hallar en Excel la TIR, se utilizará la función TIR, pero antes es necesario elaborar una tabla como la siguiente:

Tabla 8-6 *Cálculo de la TIR con dos FNE constantes en Excel*

0	1	2
-500	330	330

TIR =

0	1	2
-500	330	330

=TIR(F197:H197)

0	1	2
-500	330	330

TIR = 20,69 %

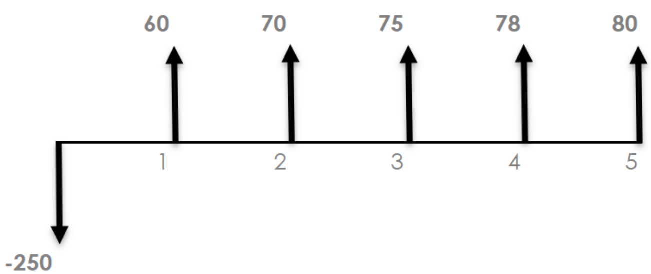
Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para una inversión de 500 USD que generó ingresos al año de 330 USD, para el segundo año equivale al **20,69 %.**

TIR cuando se tiene más de un ingreso variable:

EJEMPLO 7

Un comercializador de plátano del municipio más alegre de Colombia invierte en la compra de un pequeño camión para el transporte de su producto, el cual fue adquirido por un valor de 250 millones de COP, una vez iniciadas sus operaciones mercantiles, y luego de saldar sus costos y gastos operacionales, este le generó utilidades durante 5 años, como se pueden apreciar en la siguiente gráfica (valores en millones de COP):

Gráfica 8.9 *Flujo de caja inversión con FNE variables*



Determinar la Tasa Interna de Retorno para el comercializador por la inversión al adquirir su propio camión.

Solución:

Teniendo en cuenta la información suministrada, se observa que los flujos son variables; para dar solución a este caso es necesario la utilización de una función de Excel.

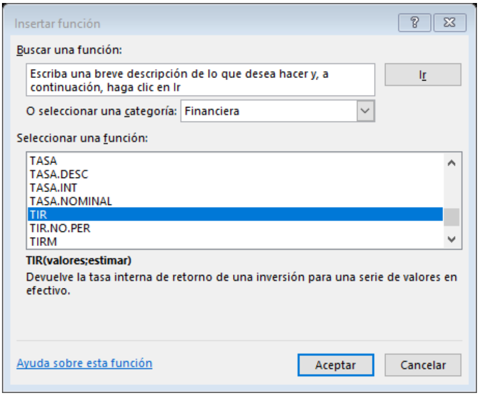
En Excel quedaría así:

Tabla 8-7 *Flujo de caja con FNE variables*

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
-250	60	70	75	78	80

Una vez se tenga en Excel una tabla como la anterior, se debe ubicar en una celda donde se desee obtener la TIR; posteriormente, ir a insertar función *financiera,* seleccionar la opción *TIR* y luego dar clic en *Aceptar*. Ver cómo hacerlo:

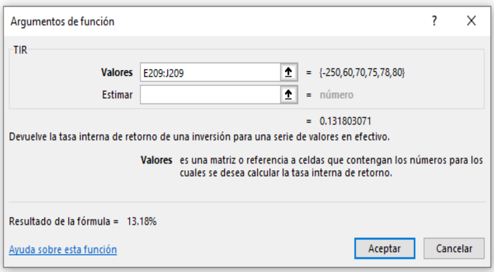
Imagen 60: *Función TIR*



Luego se despliega una nueva ventana, la cual solicita los valores; se debe seleccionar de la tabla de Excel desde la celda de la inversión (negativa) hasta el último periodo, sin soltar, y dar clic en *Aceptar*.

Imagen 61: Función TIR Variables

0	1	2	3	4	5
-250	60	70	75	78	80



Se obtendrá el siguiente resultado:

TIR	**13,18 %**

Respuesta: La Tasa Interna de Retorno para la inversión de 250 COP en la compra de un camión, le permitirá recuperar al comercializador de plátano un promedio anual del **13,18 %** del valor de su adquisición.

PROBLEMAS

1. Calcule el VPN y la TIR, y determinar el mejor proyecto.

DATOS INVERSIÓN	N° 1	N° 2
Recursos propios - Inversión		110.000.000 um
Terceros - Deuda - Inversión	10.000.000 um	10.000.000 um
Valor inversión proyecto	125.000.000 um	

DATOS FNE	N° 1	N° 2
(FNE) año 0	um	um
Tasa de Descuento	10,50 %	11,90 %
Periodos por evaluar	5	5
Ingresos (FNE) año 1	15.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 2	25.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 3	32.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 4	46.000.000 um	30.500.000 um
Ingresos (FNE) año 5	50.000.000 um	30.500.000 um

1. Determinar WACC, VPN y TIR y defina el mejor proyecto.

DATOS WACC	N° 1	N° 2
Recursos propios - Inversión	um	um
Costo del P/nio (%) u oportunidad	12 %	12,5 %
Terceros - Deuda - Inversión	20.000.000 um	15.000.000 um
Costo de la deuda	23,5 %	28,5 %
Tasa de impuestos	34 %	34 %
Valor inversión proyecto	120.000.000 um	85.000.000 um

DATOS FNE	N° 1	N° 2
(FNE) año 0	um	um
Tasa de Descuento	%	%
Periodos por evaluar	5	5
Ingresos (FNE) año 1	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 2	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 3	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 4	34.500.000 um	22.500.000 um
Ingresos (FNE) año 5	34.500.000 um	22.500.000 um

BIBLIOGRAFÍA

Agudelo, D. (2019). MATEMATICAS FINANCIERAS conceptos y aplicaciones (E. Pearson (ed.); Primera ed).

Álvarez, A. (2005). Matemátic as financieras. (3.a edición). McGraw-Hill Interamericana.

Baca Urbina, G. (2016). Evaluación de PROYECTOS (Octava edi). McGraw Hill.

Baca, G. (2000). Ingeniería económica. (8.a edición). F. E. Panamericano.

Baca, G. (2003). Fundamentos de ingeniería económica. (3.a edición). McGraw-Hill.

Banco de la República. (2020). ¿Qué es la inflación? https://www.banrep.gov.co/es/contenidos/page/qu-inflaci-n

Bodie, Z. y Merton, R. (2003). Finanzas. Prentice Hall.

Buenaventura, G. (2018). TEORÍA DE LA INVERSIÓN EN EVALUACIÓN DE PROYECTOS (Primera ed). Ecoe Ediciones.

Díaz, A. (2013). Matemática Financiera (Quinta edi). McGraw Hill Interamericana.

Díaz Mata, A. y Aguilera Gómez, V. (2008). Matemáticas financieras. (4.a edición). McGraw-Hill.

Durbán, S. (2017). Finanzas corporativas (Primera ed). EDICIONES PIRÁMIDE.

Imbernón, F. (2007). La investigación educativa y la formación del profesorado. (3.a edición). Graó.

Jaguán, A. (2009). Matemáticas financieras. Ediciones Valle.

Jara Vargas, S. (2015). Matemática financiera para no financieros. Ediciones UTMACH.

Kozikowski, Z. (2007). Matemáticas financieras. El valor del dinero en el tiempo. McGraw-Hill.

Meza, Jhonny de Jesús. (2017). Matemáticas Financieras Aplicadas (6th ed.). Ecoe Ediciones.

Meza, Jhonny de Jesús. (2017). Evaluación Financiera de Proyectos (Cuarta edi). Ecoe Ediciones.

Moya, C. (2013). Gestión financiera.

López, A. (2017). Administración de Proyectos (Primera ed). Pearson Educación.

Padilla, M. C. (2016). Formulación y evaluación de proyectos. (2.a edición).

Marcial, C. P. (2012). Gestión financiera. In Gestión Financiera (Primera ed). Ecoe Ediciones.

Samuelson, P. A. (2010). Economía con aplicaciones a Latinoamérica. (19.a edición). Pearson.

Sapag Chaín, N. (2007). Proyectos de inversión. Formulación y evaluación. Pearson.

Serna, R. (2012). Manual didáctico de matemáticas financieras. Facultad de Posgrados, Universidad EAN, Bogotá.

Villalobos, J. L. (2017). Matemáticas Financieras (Quinta edi). Pearson Educación.

EX UMBRA IN SOLEM

Dirección de Investigación
2021

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

EX UMBRA IN SOLEM

UDEC
UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

www.ucundinamarca.edu.co

Universidad de cundinamarca

ucundinamarcaoficial

@ucundinamarca

UCUNDINAMARCATV

CO-SC-CER355037

ISO 9001

SC-CER355037

Vigilada MinEducación