

Diferencias Finitas

Introducción
y modelamiento
matemático aplicado
a problemas de física
y geociencias

Alejandro Duitama Leal
Héctor Javier Hortúa
José J. Fredy González V.
Leonardo Daniel Donado E.



UDEC
UNIVERSIDAD DE
CUNDINAMARCA

Duitama Leal, A., Hortúa, H. J., González V., J. J. F., Donado, L.

Diferencias finitas: Introducción y modelamiento matemático aplicado a problemas de física y geociencias.

Fusagasugá: Editorial de la Universidad de Cundinamarca. 2020.

120 p.

ISBN: 978-958-52730-1-6



UDEC
UNIVERSIDAD DE
CUNDINAMARCA

Dr. Adriano Muñoz Barrera
Rector

Dra. María Eulalia Buenahora Ochoa
Vicerrector Académico

Dr. José Zacarías Mayorga Sánchez
Director de Investigación Universitaria

Mtra. Aura Esther Álvarez Lara
Decano de la Facultad de Educación



© Universidad de Cundinamarca, 2020
Primera Edición, 2020

Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en Matemáticas

Autores:

Alejandro Duitama Leal.
Héctor Javier Hortúa.
José J. Fredy González V.
Leonardo Daniel Donado Escobar

Editorial

Dirección editorial: José Zacarías Mayorga Sánchez
Editor: Rosemberg del Carpio
Corrección de estilo: Yesid Castiblanco Barreto
Diseño editorial: Zulma Milena Useche Vargas
Registro digital: Ana Milena Bejarano Torres

Dirección de Investigación

Universidad de Cundinamarca
www.ucundinamarca.edu.co
editorial@ucundinamarca.edu.co
Diagonal 18 No. 20 - 29
Fusagasugá - Cundinamarca

ISBN: 978-958-52730-1-6

DERECHOS RESERVADOS:

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro, sin permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

Los conceptos aquí expresados son responsabilidad exclusiva de sus autores y no necesariamente representan la posición oficial de la Universidad de Cundinamarca.

No comercial: no puede utilizar esta obra con fines comerciales de ningún tipo. Tampoco puede vender esta obra bajo ningún concepto ni publicar estos contenidos en sitios web que incluyan publicidad de cualquier tipo.

El presente libro ha sido fruto del grupo de investigación GIIMMYC y del semillero de investigación "Grupo de Investigación Matemática Aplicada"

En cuanto a la información consignada en el presente documento, fue revisada y evaluada por pares evaluadores externos doble ciego con el fin de garantizar una valoración crítica e imparcial sobre la calidad de los manuscritos; por lo cual los autores fueron informados sobre las recomendaciones dadas por los pares para realizar los respectivos cambios y/o ajustes del caso, para finalmente ser aprobados por el Comité Editorial de la Universidad de Cundinamarca.

A nuestras familias, amigos, profesores y colegas, quienes nos apoyaron todo este tiempo y compartieron su gusto e interés por comprender y modelar el mundo.

Prefacio

Este libro surge de la necesidad de tratar la teoría de Diferencias Finitas desde un punto de vista más aplicativo a distintos campos en ciencias naturales e ingeniería. De allí que gran parte de su contenido esté enfocado en abordar y mostrar cómo es la aplicación del método en diferentes tópicos como lo es la teoría de ondas, tanto electromagnéticas como mecánicas, con un punto de vista hacia la física, las geociencias y las matemáticas aplicadas.

Los autores
Agosto de 2018

Contenido

Prefacio	5
1. Introducción a Diferencias Finitas	9
1.1. Series de Taylor	9
1.2. Diferencias Finitas de orden superior.....	12
1.3. Diferencias Finitas cruzadas.....	15
Referencias	19
2. Simulación de los campos de onda P y S acoplados	21
2.1. Ecuaciones de Biot	21
2.2. Esfuerzos	22
2.3. Deformaciones.....	24

2.4. Relaciones dinámicas	29
2.4.1. Energía cinética	29
2.4.2. Función de disipación.....	30
2.4.3. Ecuaciones de Lagrange.....	32
2.4.4. Discretizaciones Referencias.....	41
Referencias	53
3. Simulación numérica en electrostática usando Diferencias Finitas	55
3.1. Ecuaciones de Poisson y de Laplace.....	55
3.2. Ecuación de Laplace	58
3.2.1. Coordenadas rectangulares.....	58
3.3. Discretización del espacio	62
3.3.1. Coordenadas polares	66
Referencias	74
4. Tomografía de la Cuenca de Urabá usando el método GLI (Generalized Linear Inversion)	75
4.1. Introducción	76
4.2. Dinámica del subsuelo.....	78
4.2.1. Ecuación de movimiento	79
4.2.2. Solución de ecuación de onda por Diferencias Finitas	82
4.2.3. Condiciones de frontera no reflectiva	84

4.2.4. Solución completa	88
4.3. Inversión simultánea	91
4.3.1. Metodología de inversión simultánea.....	91
4.4. Caso de uso: Cuenca de Urabá	96
4.4.1. Información	96
4.4.2. Modelos	97
4.4.3. Límites espaciales.....	99
4.4.4. Cantidad máxima de elementos del modelo	99
4.4.5. Incertidumbre de la velocidad con la profundidad	100
4.4.6. Validación del algoritmo.....	100
4.5. Resultados de los modelos	109
4.5.1. Modelo con velocidad homogénea	110
4.5.2. Modelo de velocidad con variación en profundidad	113
4.5.3. Modelo de velocidad con variación 3D.....	115
4.5.4. Interpretación	120
4.5.5. Discusión	121
Referencias	126

Capítulo 1

Introducción a Diferencias Finitas

Alejandro Duitama Leal, José J. Fredy González V. y Héctor Javier Hortúa

Resumen. Se presenta una descripción e introducción al método de Diferencias Finitas como alternativa de solución numérica aproximada a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Para ello, de manera formal se deducen las ecuaciones en diferencias para distintas derivadas de órdenes superiores.

1.1. Series de Taylor

La serie de Taylor permite conocer los valores de la función $f(x)$ en un punto $f(x + \Delta x)$ a partir de las derivadas de orden n evaluadas en x . Ver ecuación 1.1.

$$f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (1.1)$$

Donde $\Delta x = x_f - x$ y x_f es el punto final con respecto al cual se calcula el valor de x que sería el punto *inicial*. Se realizan expansiones progresivas y regresivas

en el punto $x + \Delta x$ y $x - \Delta x$, respectivamente, obteniendo el siguiente par de ecuaciones:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \quad (1.2)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \dots \quad (1.3)$$

La ecuación 1.2 permite aproximar la función $f(x + \Delta x)$ a partir de las derivadas de la función f en el punto x . La segunda ecuación (ecuación 1.3) permite calcular la función $f(x - \Delta x)$ a partir de los valores de la función f y sus derivadas evaluadas en x . Se observa igualmente que en la ecuación 1.3 los términos n impares son negativos y se alternan en signo con los términos donde n es par. Al sumar las ecuaciones 1.2 y 1.3 se cancelan los términos impares, por lo tanto, se reduce a la siguiente expresión con únicamente los términos pares. Ecuación 1.4.

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) & \quad (1.4) \\ &= 2f(x) + \Delta x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ &+ 2 \sum_{\substack{n=4 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \end{aligned}$$

Dividiendo por Δx^2 y despejando el término de la segunda derivada se obtiene finalmente la ecuación.

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} - 2 \sum_{\substack{n=4 \\ n \text{ par}}}^{\infty} \frac{\Delta x^{n-2}}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} & \quad (1.5) \\ &= \frac{d^2f(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

Se puede realizar un truncamiento en el cual los términos de orden $n \geq 4$ se desprecian. Esto implicaría que el orden para esta aproximación es de $O(\Delta x^2)$. Esto se puede asumir como válido para aquellos sistemas en los cuales el valor de $\Delta x \rightarrow 0$. De allí la importancia del valor en los parámetros que se utilicen en el modelamiento, ya que definir pasos Δx que se alejen de cero implicaría la divergencia del método numérico y, por lo tanto, la solución se aleja de la solución analítica del sistema.

Al despreciar dichos términos y despejar $\frac{d^2}{dx^2}$ se llega a la siguiente ecuación 1.6.

$$\frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \approx \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (1.6)$$

Esta expresión representa en Diferencias Finitas una aproximación del operador segunda derivada de la función $f(x)$. El orden del truncamiento es 4, ya que se tuvieron que trincar todos los términos mayores e iguales a $n \geq 4$.

Al realizar el mismo proceso, pero restando las ecuaciones 1.2 y 1.3, y dividiendo por $2\Delta x$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - 2 \sum_{\substack{n=3 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{\Delta x^{n-1}}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{df(x)}{dx} \quad (1.7)$$

Se hace un truncamiento de orden $n \geq 3$ para un error de orden $O(\Delta x^2)$ y al despejar $\frac{df(x)}{dx}$ se obtiene la ecuación 1.8.

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \approx \frac{df(x)}{dx} \quad (1.8)$$

Esta ecuación representa el operador de la primera derivada de la función $f(x)$ en Diferencias Finitas. Es preciso mencionar que no es la única forma en que se establece la aproximación en diferencias del operador primera derivada. Otra forma de obtener dicho operador consiste en tomar la ecuación 1.2, se realiza un truncamiento para $n \geq 2$ con un error de $O(\Delta x)$ y se despeja en término $\frac{df(x)}{dx}$, para llegar a la siguiente ecuación en diferencias:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \approx \frac{df(x)}{dx} \quad (1.9)$$

La diferencia entre las ecuaciones 1.9 y 1.8 radica en que la primera está centrada, mientras que la segunda no, es decir, para conocer el valor de la derivada de la función $f(x)$ se necesita conocer sus vecinos por delante $f(x + \Delta x)$ y por detrás $f(x - \Delta x)$, en tanto que en la ecuación 1.9 para saber la derivada de la función $f(x)$ se necesita conocer el valor de la función $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$.

Hasta ahora se han determinado las ecuaciones en Diferencias Finitas para la primera y segunda derivada con un error de orden $O(\Delta x^2)$. A continuación, se

presenta una forma general de obtener las ecuaciones en Diferencias Finitas para cualquier derivada de orden superior.

1.2. Diferencias Finitas de orden superior

Para deducir las ecuaciones en Diferencias Finitas de orden superior, se reescribe la ecuación de la Serie de Taylor, expresándola de la siguiente forma:

$$f(x + k\Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n \Delta x^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \quad (1.10)$$

en la cual se cambió Δx por $k\Delta x$, y $k \in Z$ con $k \neq 0$. Para comprender un poco mejor esta expresión, el valor de k define la cantidad de veces que hay entre x y x_f , es decir que modifica directamente el valor Δx . Esto es útil para calcular las diferencias de orden mayor, debido a que mientras mayor sea el orden de la derivada, se hace necesario incorporar una mayor cantidad de términos “vecinos” para poder calcular una buena aproximación del valor de $f(x)$. Para establecer un número de ecuaciones igual al número de incógnitas “derivadas” que deseamos hallar y que tenga única solución, se establece que $k = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$, donde k es el número de ecuaciones en las cuales se hace el truncamiento de orden m de la serie de Taylor dada en la ecuación 1.10.

Por ejemplo, para el caso que se abordó anteriormente el truncamiento se hizo hasta el término de la segunda derivada, es decir que $m = 2$, lo que implica que $k = \{+1, -1\}$. Según lo anterior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Este sistema se expresa de forma matricial y se obtiene la siguiente matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} f(x + \Delta x) - f(x) \\ f(x - \Delta x) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} \\ -\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x)}{dx} \\ \Delta x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \end{pmatrix}$$

Simplificando un poco las expresiones,

$$\begin{pmatrix} f(x + \Delta x) - f(x) \\ f(x - \Delta x) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x)}{dx} \\ \Delta x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones lineales mostrado en 1.12, y simplificando se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x + \Delta x) - f(x) \\ f(x - \Delta x) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x)}{dx} \\ \Delta x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2} \\ f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x)}{dx} \\ \Delta x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Lo cual corresponde a las ecuaciones discretizadas en Diferencias Finitas trabajadas en las ecuaciones 1.6 y 1.8.

Para deducir las aproximaciones en Diferencias Finitas para la derivada de orden $m = 4$, k toma los valores de $k = \{\pm 1, \pm 2\}$. Por lo tanto, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} f(x + 2\Delta x) &= f(x) + 2\Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ &\quad + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4f(x)}{dx^4} \\ f(x + \Delta x) &= f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4f(x)}{dx^4} \\ f(x - \Delta x) &= f(x) - \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ &\quad - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3f(x)}{dx^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4f(x)}{dx^4} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$f(x - 2\Delta x) = f(x) - 2\Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

El sistema se reescribe a partir de la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} f(x + 2\Delta x) - f(x) \\ f(x + \Delta x) - f(x) \\ f(x - \Delta x) - f(x) \\ f(x - 2\Delta x) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/1! & 4/2! & 8/3! & 16/4! \\ 1/1! & 1/2! & 1/3! & 1/4! \\ -1/1! & 1/2! & -1/3! & 1/4! \\ -2/1! & 4/2! & -8/3! & 16/4! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x)}{dx} \\ \Delta x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \Delta x^3 \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \\ \Delta x^4 \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(x + 2\Delta x) - f(x) \\ f(x + \Delta x) - f(x) \\ f(x - \Delta x) - f(x) \\ f(x - 2\Delta x) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1.3 & 0.6 \\ 1 & 0.5 & 0.3 & 0.25 \\ -10.5 & -0.3 & 0.25 \\ -2 & 2 & -1.3 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x)}{dx} \\ \Delta x^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \Delta x^3 \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \\ \Delta x^4 \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Se calcula la matriz inversa a la matriz de coeficientes y se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -1/12 & 2/3 & -2/3 & 1/12 \\ -1/12 & 4/3 & 4/3 & -1/12 \\ -1/2 & -1/1 & 1/1 & -1/2 \\ 1 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x + 2\Delta x) - f(x) \\ f(x + \Delta x) - f(x) \\ f(x - \Delta x) - f(x) \\ f(x - 2\Delta x) - f(x) \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x)}{dx} \\ \Delta x^2 \frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ \Delta x^3 \frac{d^3f(x)}{dx^3} \\ \Delta x^4 \frac{d^4f(x)}{dx^4} \end{pmatrix}$$

Donde se obtienen finalmente las derivadas de orden superior.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{-f(x + 2\Delta x) + 8f(x + \Delta x) - 8f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{12\Delta x} \quad (1.17)$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} \quad (1.18)$$

$$= \frac{-f(x + 2\Delta x) + 16f(x + \Delta x) - 30f(x) + 16f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{12\Delta x^2}$$

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + 2f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)}{2\Delta x^3} \quad (1.19)$$

$$\frac{d^4f(x)}{dx^4} \quad (1.20)$$

$$= \frac{f(x + 2\Delta x) - 4f(x + \Delta x) + 6f(x) - 4f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^4}$$

Estas derivadas incorporan más términos en la discretización, lo que ayuda a disminuir el error numérico en el truncamiento que se realiza a la serie de Taylor. Mientras más términos se incorporen, mejor es la aproximación de la solución numérica.

1.3. Diferencias Finitas cruzadas

Para realizar una Diferencia Finita de orden superior cruzada, se hace necesario partir de la serie de Taylor en dos variables:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \left(\begin{aligned} & f(x, y) + \\ & + \frac{1}{1!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy} \right) f(x, y) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy} \right)^2 f(x, y) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} + \Delta y \frac{d}{dy} \right)^3 f(x, y) + \dots \end{aligned} \right) \quad (1.21)$$

Donde $\left(\frac{df(x,y)}{dx} \right)^n = \frac{d^n f(x,y)}{dx^n}$, por lo tanto se pueden realizar expansiones en series de Taylor progresivas y regresivas en x y y , según la metodología mostrada anteriormente. Las expansiones son:

$$f(x + \Delta x, y + 2\Delta y) = \left(\begin{aligned} & f(x, y) + \\ & + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df(x, y)}{dx} + \frac{2\Delta y}{1!} \frac{df(x, y)}{dy} + \\ & + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} + \frac{4\Delta y \Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dxdy} + \frac{4\Delta y^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} + \dots \end{aligned} \right) \quad (1.22)$$

$$f(x + \Delta x, y - \Delta y) = \left(\begin{aligned} & f(x, y) + \\ & + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df(x, y)}{dx} - \frac{\Delta y}{1!} \frac{df(x, y)}{dy} + \\ & + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} - \frac{2\Delta y \Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dxdy} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} + \dots \end{aligned} \right) \quad (1.23)$$

$$f(x + 2\Delta x, y + \Delta y) = \left(\begin{aligned} & f(x, y) + \\ & + \frac{2\Delta x}{1!} \frac{df(x, y)}{dx} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{df(x, y)}{dy} + \\ & + \frac{4\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} + \frac{4\Delta y \Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dxdy} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} + \dots \end{aligned} \right) \quad (1.24)$$

$$f(x - \Delta x, y + \Delta y) = \left(\begin{array}{l} f(x, y) + \\ -\frac{\Delta x}{1!} \frac{df(x, y)}{dx} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{df(x, y)}{dy} + \\ + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} - \frac{2\Delta y \Delta x}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dxdy} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} + \dots \end{array} \right) \quad (1.25)$$

En las ecuaciones 1.22, 1.23, 1.24 y 1.25 se realiza un truncamiento de orden $O(\Delta x^2)$ y $O(\Delta y^2)$ en "x" y "y", respectivamente. Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para encontrar la discretización de cada una de las derivadas:

$$\begin{pmatrix} f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + \Delta x, y - \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + 2\Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + \Delta x, y + 2\Delta y) - f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1!} & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & -\frac{2}{2!} & \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{1!} & -\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & -\frac{2}{2!} & \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{2}{2!} & \frac{1}{2!} \\ \frac{2}{1!} & \frac{1}{1!} & \frac{4}{2!} & \frac{4}{2!} & \frac{1}{2!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{2}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{4}{2!} & \frac{4}{2!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x, y)}{dx} \\ \Delta y \frac{df(x, y)}{dy} \\ \Delta x^2 \frac{d^2 f(x, y)}{dx^2} \\ \Delta y \Delta x \frac{d^2 f(x, y)}{dxdy} \\ \Delta y^2 \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

El sistema de ecuaciones 1.26 se resuelve hallando la inversa de la matriz de coeficientes y al realizar el producto matricial en ambos lados de la igualdad. Conforme a esto, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 3/2 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/6 & 3/2 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 0/1 & -1/1 & 2/3 & 0/1 \\ -1/3 & -1/3 & -1/1 & 1/3 & 1/3 \\ 0/1 & 1/3 & -1/1 & 0/1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + \Delta x, y - \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + 2\Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ f(x + \Delta x, y + 2\Delta y) - f(x, y) \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta x \frac{df(x, y)}{dx} \\ \Delta y \frac{df(x, y)}{dy} \\ \Delta x^2 \frac{d^2f(x, y)}{dx^2} \\ \Delta y \Delta x \frac{d^2f(x, y)}{dxdy} \\ \Delta y^2 \frac{d^2f(x, y)}{dy^2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las discretizaciones de cada una de las derivadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} & \frac{df(x, y)}{dx} \\ & = \frac{-f(x - \Delta x, y + \Delta y) + 2f(x + \Delta x, y - \Delta y) + 9f(x + \Delta x, y + \Delta y) + 6f(x, y) - 2f(x + 2\Delta x, y + \Delta y) - 2f(x + \Delta x, y + 2\Delta y)}{6\Delta x} \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{df(x, y)}{dy} \\ & = \frac{2f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y - \Delta y) + 9f(x + \Delta x, y + \Delta y) - 6f(x, y) - 2f(x + 2\Delta x, y + \Delta y) - 2f(x + \Delta x, y + 2\Delta y)}{6\Delta y} \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2f(x, y)}{dx^2} \\ & = \frac{2f(x - \Delta x, y + \Delta y) - 6f(x + \Delta x, y + \Delta y) + 4f(x + 2\Delta x, y + \Delta y)}{6\Delta x^2} \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\frac{d^2 f(x, y)}{dx dy} = \frac{-f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y - \Delta y) - 3f(x + \Delta x, y + \Delta y) + f(x + 2\Delta x, y + \Delta y) + 3f(x, y) + f(x + \Delta x, y + 2\Delta y)}{3\Delta x \Delta y} \quad (1.31)$$

$$\frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} = \frac{f(x + \Delta x, y - \Delta y) - 3f(x + \Delta x, y + \Delta y) + f(x, y) + f(x + \Delta x, y + 2\Delta y)}{3\Delta y^2} \quad (1.32)$$

Estas Diferencias Finitas cruzadas también se pueden deducir de otra forma, el problema radica en que el orden del error aumenta, lo que implica que podría producir errores de convergencia considerables.

Referencias

- Burden, R. L., Faires, J. D. y Burden, A. M. (2015). *Numerical analysis*. Ninth edition. Cengage Learning.
https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/numerical_analysis_9th.pdf
- González, O. (2008). *Extensión del método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo para el estudio de estructuras híbridas de microondas incluyendo circuitos concentrados activos y pasivos*. Tesis de doctorado, Universidad de Cantabria, España.
<https://www.tdx.cat/handle/10803/10669>
- Quarteroni, A. y Valli, A. (1994). *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer.
- Smith, B. F., Bjorstad, P. E. y Gropp, W. (1996). *Domain decomposition: Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations*. Cambridge University Press.

Capítulo 2

Simulación de los campos de onda P y S acoplados

Alejandro Duitama Leal, José J. Fredy González V., Héctor Javier Hortúa y Leonardo D. Donado E.

Resumen. Desde hace algunas décadas el estudio de la propagación de ondas acústicas en medios porosos ha tomado un papel importante, no solo desde lo académico sino en especial desde la industria. Todo esto ocurre en un mundo que constantemente se encuentra buscando y desarrollando nuevas tecnologías que aprovechen las diversas formas de energía que provengan ya sea de elementos fósiles, químicos, eléctricos y mecánicos, entre otros. Por ello se realizó la simulación de los campos de onda P y S acoplados, por medio del método de Diferencias Finitas, utilizando la Teoría de Biot para medios porosos saturados.

2.1. Ecuaciones de Biot

Para abordar los problemas de propagación de ondas acústicas en medios porosos, se hace necesario recurrir a la Teoría de Suspensiones Diluidas la cual permite describir la propagación de ondas acústicas en medios que poseen una porosidad relativamente alta. Cuando esta porosidad es pequeña la Teoría de Suspensiones no describe correctamente la propagación de las ondas acústicas, lo que obligaba a utilizar lo que se conoce con el nombre de Teoría de Sólidos Porosos. Debido a lo anterior, en 1955 surgió una teoría propuesta por Biot y se llamó la Teoría de Consolidación del Suelo, con la cual se puede trabajar este tipo de sistemas. Esta fue modificada en 1955 para tener en cuenta los diferentes niveles de saturación de fluido en el medio poroso (Camarasa, 2020) y es a partir de allí que surge la

Teoría de Biot que actualmente es la base de investigaciones relacionadas con esfuerzos y deformaciones en medios porosos saturados.

2.2. Esfuerzos

La Teoría de Biot se basa principalmente en las relaciones de tensión deformación (Biot, 1956a, 1956a), para un elemento del medio poroso. Figura 2.1.

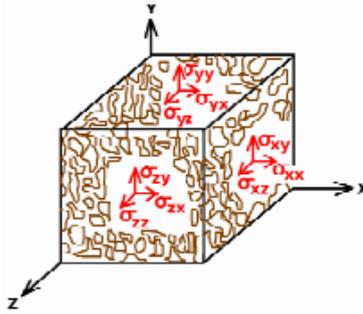


Figura 2.1. Diagrama de esfuerzos tangenciales y normales que actúan sobre el elemento de medio poroso

El primer subíndice de los esfuerzos $\sigma_{i,j}$ corresponde a la cara sobre el elemento poroso, y toma los valores de $i = \{x, y, z\}$. El segundo subíndice corresponde a la dirección sobre la cual actúa el esfuerzo, y toma los valores de $j = \{x, y, z\}$.

Según lo anterior, los esfuerzos que actúan sobre cada una de las caras del elemento poroso, vendrían dados por el siguiente tensor. Ecuación 2.1.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Debido a que el medio poroso se encuentra saturado de fluidos, los esfuerzos que actúan sobre cada uno de los fluidos se muestra a continuación:

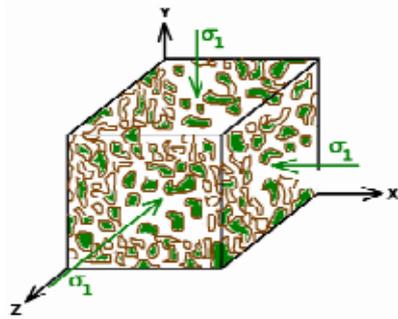


Figura 2.2. Esfuerzos normales en el fluido 1

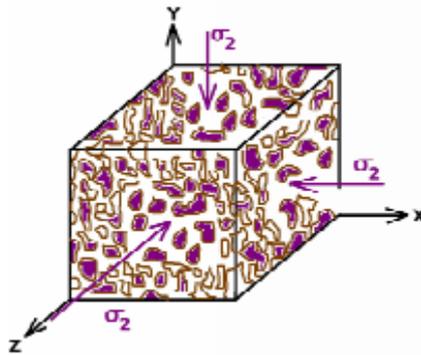


Figura 2.3. Esfuerzos normales en el fluido 2

Como se observa en cada uno de los dos fluidos, únicamente se tienen en cuenta los esfuerzos normales, es decir, aquellos que generan compresión en el fluido. Esto debido a que los esfuerzos tangenciales no existen en los fluidos, ya sean en estado líquido o gas.

El tensor de esfuerzo para el fluido 1 vendría dado por la siguiente ecuación 2.2.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

y para el fluido 2, el tensor de esfuerzos está dado por la ecuación 2.3.

$$\begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Los valores de σ_1 y σ_2 son proporcionales a la presión del fluido p . Según lo anterior, debido a que se están considerando dos fluidos en el medio poroso, el valor de los esfuerzos normales en cada fluido vendría dado por las ecuaciones 2.4 y 2.5, que corresponden al fluido 1 y 2, respectivamente.

$$\sigma_1 = -\beta S p, \quad (2.4)$$

$$\sigma_2 = -\beta(1 - S)p. \quad (2.5)$$

El valor de β corresponde a la porosidad total. El valor de S corresponde a la saturación de fluido 1 presente en los poros, y el valor de $1 - S$ corresponde a la cantidad de saturación del fluido 2 presente en los poros.

2.3. Deformaciones

Cuando una onda se propaga se produce una deformación en cada uno de los elementos que conforman el medio y según sea la dirección de esta deformación se pueden establecer dos tipos de ondas básicas: las compresionales y las transversales. Las compresionales, también denominadas ondas primarias P , se caracterizan por que la perturbación del medio ocurre en la misma dirección de su propagación. A las ondas transversales se les denomina ondas secundarias S y la dirección de perturbación del medio ocurre de forma transversal a la dirección de propagación de la onda. Estas deformaciones suceden debido a que los esfuerzos que actúan sobre un elemento de volumen que conforma el medio, pueden actuar en direcciones normales o tangenciales a la superficie del elemento. Cuando los esfuerzos son normales, se puede producir un cambio en el volumen lo cual representaría la deformación del medio cuando la onda se propaga. Si el esfuerzo es tangencial se produce una deformación del elemento de volumen al analizar un elemento de volumen dV . Para analizar un poco más en detalle este fenómeno se toma un elemento del medio, el cual sufre una deformación en cualquier dirección, tal como se ve en la figura 2.4.

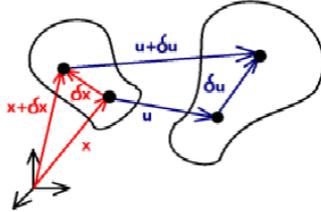


Figura 2.4. Deformación de un elemento del medio

Al realizar una expansión en series de Taylor, se encuentra que el desplazamiento y después de la deformación en la dirección i -ésima con $i = \{x, y, z\}$ de un punto cualquiera que se encuentra en la posición x antes de la deformación es:

$$u_i(x + \delta x) = u_i(x) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (2.6)$$

De la ecuación 2.6 tomamos el término de la derivada parcial y se renombra como δu_j , es decir:

$$\delta u_j = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

ahora al reescribir este término como $\delta u_j = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sumamos y restamos la cantidad $\frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ para llegar finalmente a la siguiente ecuación:

$$\delta u_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

Esta ecuación 2.8 se puede reescribir como:

$$\delta u_j = e_{ij} + w_{ij}, \quad (2.9)$$

con $i = \{x, y, z\}$ y $j = \{x, y, z\}$ donde:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.10)$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.11)$$

En la ecuación 2.10, el término e_{ij} corresponde a la deformación del medio poroso, mientras que el término w_{ij} de la ecuación 2.11 hace referencia a la rotación del cuerpo rígido. La representación matricial del término de rotación de cuerpo es:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La representación matricial del término de deformación es:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

De la ecuación 2.13, si tomamos la traza de la matriz de deformación, esta corresponde a la dilatación del sólido.

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.14)$$

De esta forma ahora se definen las convenciones para diferenciar cada uno de los fluidos. El vector $u = u(r, t) = (u_x, u_y, u_z)$ representa las componentes del vector desplazamiento del medio poroso. El vector $U = U(r, t) = (U_x, U_y, U_z)$ simboliza el vector desplazamiento del fluido 1, que en nuestro caso puede ser

agua, y el vector $V = V(r, t) = (V_x, V_y, V_z)$ representa el desplazamiento del fluido 2, que puede ser gas.

Por lo tanto, para los fluidos las deformaciones estarían representadas por las dilataciones. Ver ecuaciones 2.15 y 2.16.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (2.16)$$

Para establecer las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones, la estructura es tratada como un sistema conservativo que está en equilibrio, es decir, en un punto de mínima energía potencial y cualquier perturbación será tratada como una alteración a ese estado de equilibrio (Camarasa, 2002). Se tiene el siguiente tensor de deformación para el elemento de volumen.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.17)$$

El subíndice $i = \{x, y, z\}$ y el subíndice $j = \{x, y, z\}$ representan cada una de las componentes i, j del tensor de deformación. Según lo anterior, si se toma la traza de este tensor se obtiene:

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.18)$$

Que representa la dilatación volumétrica del elemento dV cuando hay esfuerzos normales aplicados al elemento de volumen. Si se realiza el mismo procedimiento analizando los fluidos 1 y 2, se llega a las respectivas dilataciones de los fluidos.

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (2.20)$$

Los fluidos inmiscibles 1 y 2 (líquido y gas) que saturan el medio poroso no se encuentran en estado sólido en comparación con la matriz de la roca, además de que se van a considerar inmiscibles. Para establecer las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones, la estructura es tratada como un sistema conservativo

que está en equilibrio, en otras palabras, en un punto de mínima energía potencial y cualquier perturbación será tratada como una alteración a ese estado de equilibrio (Camarasa, 2002).

Debido a que las tensiones producidas son relativamente pequeñas, las deformaciones que aparecen serán proporcionales según la Ley de Hooke. Por ello se pueden escribir de forma lineal con las componentes de la deformación. Por lo tanto, la energía potencial por unidad de volumen E_{pot} (Biot, 1956a, 1956a) de la estructura viene dada por:

$$2E_{pot} = (\alpha_{xx}e_{xx} + \alpha_{yy}e_{yy} + \alpha_{zz}e_{zz} + \alpha_{xy}e_{xy} + \alpha_{xz}e_{xz} + \alpha_{yz}e_{yz} + \sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2). \quad (2.21)$$

Los primeros tres términos de la ecuación 2.21 representan la energía que se produce por la dilatación en cada una de las tres direcciones producidas por los esfuerzos normales a cada una de las superficies (o caras) del elemento de volumen dV . Los siguientes tres corresponden a la energía que se produce cuando el elemento de volumen se deforma debido a los esfuerzos tangenciales. Los últimos dos términos hacen referencia a la energía producida por las compresiones que experimentan los fluidos que saturan el poro.

Las relaciones de esfuerzo deformación pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xx}}, \sigma_{yy} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{yy}}, \sigma_{zz} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{zz}}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xy}}, \sigma_{xz} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{xz}}, \sigma_{yz} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial e_{yz}}, \\ \sigma_1 &= \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varepsilon_1}, \sigma_2 = \frac{\partial E_{pot}}{\partial \varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Por lo tanto, se formaría un sistema matricial de orden 8×8 simétrico de 35 coeficientes constantes diferentes. Se puede simplificar asumiendo que el sistema sólido fluido es estadísticamente isotrópico (Biot, 1956a, 1956a). En estas condiciones, los esfuerzos y deformaciones principales coinciden y el sistema se simplifica al siguiente conjunto de ecuaciones (Biot, 1956a, 1956a).

$$\sigma_{xx} = 2\mu e_{xx} + \lambda e + Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \quad (2.23)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu e_{yy} + \lambda e + Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \quad (2.24)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu e_{zz} + \lambda e + Q_1\varepsilon_1 + Q_2\varepsilon_2, \quad (2.25)$$

$$\sigma_{xy} = \mu e_{xy}, \quad (2.26)$$

$$\sigma_{xz} = \mu e_{xz}, \quad (2.27)$$

$$\sigma_{yz} = \mu e_{yz}, \quad (2.28)$$

$$\sigma_1 = Q_{1e} + R_1 \varepsilon_1, \quad (2.29)$$

$$\sigma_2 = Q_{2e} + R_2 \varepsilon_2. \quad (2.30)$$

Las ecuaciones 2.23, 2.24 y 2.25 representan las relaciones entre los esfuerzos normales con las dilataciones que sufre el volumen dV en cada una de las tres direcciones. Los términos Q_1 y Q_2 son constantes físicas de la estructura y están asociadas al nivel de acoplamiento entre el cambio de volumen en el sólido y cada uno de los fluidos y λ corresponden a los parámetros elastomecánicos de Lamé.

Las ecuaciones 2.26, 2.27 y 2.28 hacen referencia a los esfuerzos tangenciales. Sobre cada una de las tres caras del elemento dV . μ es el *Módulo de cizalla* de la estructura.

Las ecuaciones 2.29 y 2.30 relacionan los esfuerzos normales que comprimen el fluido 1 y 2 dentro del poro, respectivamente. Los valores de R_1 y R_2 son dos constantes físicas de la estructura que representan la presión necesaria para que penetre en el agregado cierta cantidad de fluido manteniendo el volumen constante.

2.4. Relaciones dinámicas

Las ecuaciones de movimiento del medio poroso y de los fluidos se obtienen construyendo un lagrangiano que tenga en cuenta la energía cinética del sistema y la función de disipación de Rayleigh —la cual no es un potencial— y que está asociado a la fuerza de rozamiento debido al movimiento relativo de los fluidos. Además, hay que considerar las fuerzas que no se pueden expresar como un potencial ordinario y por lo tanto hay que incluirlas en las ecuaciones de Lagrange. A continuación, se plantea la función energía cinética, la función de disipación y las ecuaciones de Lagrange para poder hallar las ecuaciones de movimiento del sistema que básicamente corresponden a la segunda ley de Newton de un elemento de volumen del sistema poroso saturado.

2.4.1. Energía cinética

Para construir la función energía cinética del sistema, independiente de si hay o no fricción producida por el movimiento relativo del medio sólido y los fluidos, se debe tener en cuenta el movimiento de los tres sistemas como si estuvieran desacoplados (Biot, 1956a, 1956a), junto con la variación de la energía cinética

de los sistemas acoplados, es decir, que la función energía cinética toma los sistemas aislados y adiciona dos términos que son básicamente el acoplamiento entre el sólido-fluido 1 y sólido-fluido 2. La función energía cinética está determinada por:

$$\begin{aligned}
 2E_{cin} = & \rho_{11} \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \right) \\
 & + \rho_{22} \left(\left(\frac{\partial U_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} \right)^2 \right) \\
 & + \rho_{33} \left(\left(\frac{\partial V_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} \right)^2 \right) \\
 & + 2\rho_{12} \left(\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial U_z}{\partial t} \right) \right) \\
 & + 2\rho_{13} \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \frac{\partial V_y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial V_z}{\partial t} \right).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

ρ_{11} , ρ_{22} y ρ_{33} corresponden a las densidades del medio poroso del fluido 1 y del fluido 2, respectivamente. ρ_{12} , ρ_{13} son densidades aparentes, que representan el acoplamiento entre el sólido-fluido 1 y el sólido-fluido 2. El primer término de la ecuación 2.31 corresponde a la energía cinética por unidad de volumen de la estructura porosa. El segundo y tercer término corresponde a la energía cinética por unidad de volumen de los fluidos 1 y 2, respectivamente. Los dos últimos términos hacen referencia a la energía cinética por unidad de volumen aparentes que surgen del acople entre la estructura y cada uno de los dos fluidos.

2.4.2. Función de disipación

Debido a que se tomará en cuenta la fricción que aparece debido al movimiento relativo entre el sólido y cada uno de los fluidos, se hace necesario establecer una función llamada disipación (Biot, 1956a, 1956a), que tenga en cuenta estos efectos. Para ello desde la mecánica clásica se han trabajado con funciones de rozamiento, las cuales dependen básicamente de la velocidad. Como cada uno de los agregados a la estructura (sólido, fluido 1 y fluido 2) se mueve, se puede establecer que la velocidad relativa entre sólido-fluido 1 está dada por $V_{rel1} = (\dot{u}_i - U_i)$ con $i = \{x, y, z\}$, y la velocidad relativa entre sólido-fluido 2 es $v_{rel2} = (\dot{u}_i - U_i)$ con $i = \{x, y, z\}$. Según lo anterior, la función de disipación es:

$$D = \frac{b}{2} \left(\sum_{i=x,y,z} (\dot{u}_i - \dot{U}_i)^2 + \sum_{i=x,y,z} (\dot{u}_i - \dot{V}_i)^2 \right), \quad (2.32)$$

donde al resolver la sumatoria llegamos a:

$$D = \frac{b}{2} (\dot{u}_x - \dot{U}_x)^2 + \frac{b}{2} (\dot{u}_y - \dot{U}_y)^2 + \frac{b}{2} (\dot{u}_z - \dot{U}_z)^2 + \frac{b}{2} (\dot{u}_x - \dot{V}_x)^2 + \frac{b}{2} (\dot{u}_y - \dot{V}_y)^2 + \frac{b}{2} (\dot{u}_z - \dot{V}_z)^2. \quad (2.33)$$

El coeficiente b se conoce con el nombre de coeficiente de Darcy del fluido que está en el agregado. El coeficiente de Darcy representa la relación entre la fuerza total y la velocidad del fluido (Camarasa, 2002). Este coeficiente viene dado por la ecuación:

$$b = \frac{\gamma \beta^2}{\kappa},$$

en la cual γ representa la viscosidad dinámica del fluido, κ la permeabilidad física del medio poroso y β es la porosidad del medio.

Como el agregado está compuesto por dos fluidos, se hace necesario establecer el coeficiente de Darcy para todo el sistema. Para ello se plantea el coeficiente de Darcy para el fluido 1 y el fluido 2.

$$b = \frac{\gamma_1 (\beta S)^2}{\kappa}, \quad (2.35)$$

$$b = \frac{\gamma_2 (\beta (1 - S))^2}{\kappa}. \quad (2.36)$$

El subíndice 1 hace referencia al fluido 1, y el 2 al fluido 2. Por lo tanto, el comportamiento del rozamiento total de los dos fluidos se puede expresar como una combinación de la contribución de ambos fluidos presentes:

$$b = b_1 + b_2 = \frac{\gamma_1 (\beta S)^2}{\kappa} + \frac{\gamma_2 (\beta (1 - S))^2}{\kappa}, \quad (2.37)$$

2.4.3. Ecuaciones de Lagrange

Para obtener las ecuaciones dinámicas del medio poroso saturado, se hace necesario establecer inicialmente el lagrangiano del sistema. Para ello se debe tener en cuenta que el lagrangiano está dado por (Campos y Isaza, 2002):

$$L(r, \dot{r}, t) = T(\dot{r}) - V(r, t), \quad (2.38)$$

donde $T(\dot{r})$ es la energía cinética del sistema y $V(r, t)$ es la energía asociada a fuerzas que se pueden escribir como un potencial ordinario.

El lagrangiano lleva toda la información del sistema, aunque cuando se tienen fuerzas que no se pueden escribir como un potencial ordinario, se hace necesario introducir estas fuerzas en las ecuaciones de Lagrange, ya que afectan directamente el comportamiento del sistema. Para ello, se recurre a las ecuaciones de Lagrange generalizadas, las cuales vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - Q_k - \sum_{j=1}^J \lambda_j \frac{\partial B_j(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (2.39)$$

En la cual $k = \{x, y, z\}$, y $B_j(q, \dot{q}, t)$ hace referencia a la fuerzas j -ésima con $j = 1, 2, \dots, J$ que se pueden escribir como un potencial generalizado y no como un potencial ordinario, es decir, que para nuestro caso es la función de disipación, que es conocida con el nombre de función de Rayleigh. Es válido aclarar que un potencial ordinario es aquel que al calcular su gradiente se obtiene el campo vectorial de la fuerza, mientras que en el potencial generalizado no se calcula el gradiente, sino que hay que derivar con respecto a la velocidad para obtener el campo vectorial de la fuerza. Es preciso mencionar que el potencial generalizado no es un potencial ordinario, ya que son completamente diferentes. Los términos q_i y Q_i hacen referencia a las fuerzas que no se pueden expresar como potenciales ordinarios o potenciales generalizados (Campos y Isaza, 2002). Según lo anterior y teniendo en cuenta que $T = E_{cin}$ y que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, se obtienen las ecuaciones de Lagrange para cada una de las direcciones.

En x:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{u}_x} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_x} = q_x, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{U}_x} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_x} &= Q_{1x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{V}_x} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{V}_x} &= Q_{2x}.\end{aligned}$$

En y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{u}_y} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_y} &= q_y, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{U}_y} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_y} &= Q_{1y}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{V}_y} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{V}_y} &= Q_{2y}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

En Z:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{u}_z} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_z} &= q_z, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{U}_z} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{U}_z} &= Q_{1z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{V}_z} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{V}_z} &= Q_{2z}.\end{aligned}\tag{2.42}$$

Al sustituir la función energía cinética (ecuación 2.31) y la función de disipación de Rayleigh (ecuación 2.33), en el sistema de las ecuaciones 2.40, 2.41 y 2.42 se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales.

En x:

$$\begin{aligned}q_x &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{11}u_x + p_{12}U_x + p_{13}V_x) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) \\ &\quad + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x), \\ Q_{1x} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{22}U_x + p_{12}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x), \\ Q_{2x} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{33}V_x + p_{13}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x).\end{aligned}\tag{2.43}$$

En y :

$$\begin{aligned}
 q_y &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{11}u_y + p_{12}U_y + p_{13}V_y) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y) \\
 &\quad + b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y), \\
 Q_{1y} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{22}U_y + p_{12}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y), \\
 Q_{2y} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{33}V_y + p_{13}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y).
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

En z :

$$\begin{aligned}
 q_z &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{11}u_z + p_{12}U_z + p_{13}V_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z), \\
 Q_{1z} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{22}U_z + p_{12}u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z), \\
 Q_{2z} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p_{33}V_z + p_{13}u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z).
 \end{aligned}$$

Debido a que el flujo en los poros no es uniforme, se tiene que trabajar con las nueve ecuaciones. Las fuerzas por unidad de volumen definidas en el sólido y en los fluidos, por cada una de las direcciones x, y, z son: $q_x, q_y, q_z, Q_{1x}, Q_{1y}, Q_{1z}$ y Q_{2x}, Q_{2y}, Q_{2z} , que se pueden definir en función de las tensiones que aparecen en el medio poroso.

En x :

$$\begin{aligned}
 q_x &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\
 Q_{1x} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \\
 Q_{2x} &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

En y :

$$\begin{aligned}
 q_y &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\
 Q_{1y} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial y},
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$Q_{2y} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}.$$

En z:

$$\begin{aligned} q_z &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ Q_{1z} &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}, \\ Q_{2z} &= \frac{\partial \sigma_2}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Al reemplazar este conjunto de ecuaciones 2.46, 2.47 y 2.48 en el sistema de ecuaciones 2.43, 2.44 y 2.45, respectivamente, se obtiene lo siguiente:

En x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_x + \rho_{12}U_x + \rho_{13}V_x) + \\ &+ b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x), \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_x + \rho_{12}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x), \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_x + \rho_{13}u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x), \tag{2.51}$$

En y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_y + \rho_{12}U_y + \rho_{13}V_y) + \\ &+ b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y), \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_y + \rho_{12}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y), \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_y + \rho_{13}u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y), \tag{2.54}$$

En z:

$$\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_z + \rho_{12}U_z + \rho_{13}V_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z), \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22}U_z + \rho_{12}u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z), \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33}V_z + \rho_{13}u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z), \quad (2.57)$$

Para resolver este sistema, se utilizan las ecuaciones 2.23 a 2.30.

Se toman las ecuaciones 2.23, 2.26, 2.27 y se reemplazan en la ecuación 2.49, teniendo en cuenta que el valor de e_{xx} se obtiene a partir de la ecuación 2.10, cuyos valores están representados en la matriz de la ecuación 2.13. El valor de e está dado en la ecuación 2.14.

$$\left(\begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ Q_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \\ Q_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{array} \right) \quad (2.58)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11}u_x + \rho_{12}U_x + \rho_{13}V_x) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x) \right).$$

Se realiza el mismo proceso, reemplazando la ecuación 2.29 en la ecuación 2.50, considerando que ϵ_1 está dado por la ecuación 2.15.

$$\begin{aligned} & \left(Q_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. R_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right) \\ & = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((\rho_{22} U_x + \rho_{12} u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - U_x) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Para finalizar con las ecuaciones en la dirección x , se reemplaza la ecuación 2.30 en la ecuación 2.51, considerando que ε_2 está dado por la ecuación 2.16. Con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left(Q_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \right. \\ & \left. R_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right) \\ & = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((\rho_{33} V_x + \rho_{13} u_x) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_x - V_x) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Al realizar el mismo procedimiento para las otras direcciones se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

En y:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \\ + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ Q_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \\ Q_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{array} \right) \\
 & = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_y + \rho_{12} U_y + \rho_{13} V_y) + \right. \\
 & \quad \left. b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y) \right),
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} Q_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \end{array} \right) \\
 & = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} ((\rho_{11} U_y + \rho_{12} u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - U_y)) \right).
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} Q_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{array} \right) \\
 & = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} ((\rho_{33} V_y + \rho_{13} u_y) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_y - V_y)) \right).
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

En z:

$$\left(\begin{array}{c} 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ Q_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \\ Q_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \\ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{array} \right) \quad (2.64)$$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} u_z + \rho_{12} U_z + \rho_{13} V_z) + \\ b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) + b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z) \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{c} Q_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \end{array} \right) \quad (2.65)$$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{22} U_z + \rho_{12} u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - U_z) \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{c} Q_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ R_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \end{array} \right) \quad (2.66)$$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{33} V_z + \rho_{13} u_z) - b \frac{\partial}{\partial t} (u_z - V_z) \end{array} \right).$$

Este conjunto de nueve ecuaciones diferenciales acopladas permite el modelamiento de ondas transversales y longitudinales, es decir, que se tienen los campos de la P y S acoplados.

Ahora se hallará una expresión que represente el conjunto de ecuaciones diferenciales que permiten modelar el sistema. Para ello, se multiplica la ecuación 2.58 por el vector unitario \hat{i} , la ecuación 2.61 por \hat{j} , y la ecuación 2.64 por \hat{k} . Agrupando los términos según el vector se llega finalmente a:

$$\begin{aligned} & \left(\mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + \right. \\ & \left. Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + Q_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) \\ & = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U} + \rho_{13} \vec{V}) + \right) \right. \\ & \left. b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \right). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Luego se multiplica la ecuación 2.59 por el vector unitario \hat{i} , la ecuación 2.62 por \hat{j} y la ecuación 2.65 por \hat{k} . Agrupando términos según el vector se obtiene:

$$\left(Q_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_1 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((\rho_{22} \vec{U} + \rho_{12} \vec{u}) - \right) \right. \\ \left. b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}) \right). \quad (2.68)$$

Se finaliza multiplicando la ecuación 2.60 por el vector unitario \hat{i} , la ecuación 2.63 por \hat{j} y la ecuación 2.66 por \hat{k} . Al agrupar términos según el vector se obtiene:

$$\left(Q_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + R_2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left((\rho_{33} \vec{V} + \rho_{13} \vec{u}) - \right) \right. \\ \left. b \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{V}) \right). \quad (2.69)$$

Las ecuaciones 2.67, 2.68 y 2.69 representan en forma más simplificada el conjunto de ecuaciones que gobiernan los desplazamientos del medio poroso, fluido 1 y fluido 2 en el sistema. Es preciso aclarar que en estas ecuaciones los desplazamientos \vec{u} , \vec{U} y \vec{V} son de carácter vectorial, por lo tanto hay que calcular el laplaciano vectorial del vector \vec{u} en la ecuación 2.67. En las ecuaciones 2.68 y 2.69 hay que calcular el gradiente de la divergencia de los tres campos de desplazamiento (\vec{u} , \vec{U} , \vec{V}), los cuales representan el sólido y los dos fluidos.

A partir del campo de onda general para ondas compresionales P y transversales S, se realizarán algunos cálculos para desacoplar el sistema y tener las ecuaciones generales del campo de onda P y S.

2.4.4. Discretización

El sistema es discretizado a partir de las ecuaciones 1.17, 1.18 y 1.19. La discretización espacial y temporal se realiza con diferencias centradas. Según lo anterior, la discretización de las ecuaciones 2.67, 2.68 y 2.69 se puede apreciar a continuación. Se discretizó por componentes, empezando por las componentes (x, y) de la ecuación 2.67.

$$auxx_1 = \beta\beta_1 \left(\frac{k_s}{k_w} - 1 \right)$$

$$auxx_2 = \beta(1 - \beta_1) \left(\frac{k_s}{k_G} - 1 \right)$$

$$auxx_D = k_S(1 + auxx_0 + auxx_2)$$

$$auxx_H = \frac{(k_S - k_B)^2}{D - k_B}$$

$$auxx_C = \frac{(k_S(k_S - k_B))}{D - k_B}$$

$$auxx_M = \frac{k_S^2}{D - k_B}$$

$$auxx_{R_1} = auxx_M \beta^2 \beta_1$$

$$auxx_{R_2} = auxx_M \beta^2 (1 - \beta_1)$$

$$auxx_{Q_1} = \beta\beta_1 (auxx_C - (auxx_M \beta))$$

$$auxx_{Q_2} = \beta(1 - \beta_1) (auxx_C - (auxx_M \beta))$$

$$auxx_L = auxx_H - (\beta(2auxx_C - auxx_M \beta))$$

$$m_1 = c \frac{\rho_w}{\beta\beta_1}$$

$$m_2 = c \frac{\rho_G}{\beta(1 - \beta_1)}$$

$$\rho = (1 - \beta_1)\rho_S + \beta(\beta_1\rho_w + (1 - \beta_1)\rho_G)$$

$$\rho_{11} = \rho - (m_1\beta^2\beta_1^2) - (m_2\beta^2(1 - \beta_1)^2) - (2p_w\beta\beta_1) - 2p_c\beta(1 - \beta_1)$$

$$p_{22} = m_1\beta^2\beta_1^2$$

$$\rho_{33} = m_2\beta^2\beta_1^2$$

$$\rho_{12} = p_w\beta\beta_1 - m_1\beta^2\beta_1^2$$

$$\rho_{13} = p_c\beta(1 - \beta_1) - m_2\beta^2(1 - \beta_1)^2$$

2.4.4.1. Discretización ecuación 2.67 en x

$$aux_0 = \frac{1}{\frac{\rho_{11}}{\Delta t^2} + \frac{b}{\Delta t}}$$

$$aux_1 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y) - 2u_x(t, x, y) + u_x(t, x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$aux_2 = \frac{u_x(t, x, y + \Delta y) - 2u_x(t, x, y) + u_x(t, x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_3 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y) - 2u_y(t, x, y) + u_y(t, x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$aux_4 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - u_y(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_5 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - u_y(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_6 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y) - 2U_x(t, x, y) + U_x(t, x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$aux_7 = \frac{U_y(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - U_y(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_8 = \frac{U_y(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - U_y(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_9 = \frac{v_x(t, x + \Delta x, y) - 2v_x(t, x, y) + v_x(t, x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$aux_{10} = \frac{v_y(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - v_y(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_{11} = \frac{v_y(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - v_y(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_{12} = \frac{2u_x(t, x, y) - u_x(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{13} = \frac{-U_x(t + \Delta t, x, y) + 2U_x(t, x, y) - u_x(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{14} = \frac{-v_x(t + \Delta t, x, y) + 2v_x(t, x, y) - v_x(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{15} = \frac{u_x(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t}$$

$$aux_{16} = \frac{U_x(t + \Delta t, x, y) - U_x(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$aux_{17} = \frac{v_x(t + \Delta t, x, y) - v_x(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$u_x(t + \Delta t, x, y) = aux_0((\mu_b(aux_1 + aux_2)) + (((aux_L) - \mu_b)(aux_3 + aux_4 - aux_5) + (Q_1(aux_6 + aux_7 - aux_8)) + (Q_2(aux_9 + aux_{10} - aux_{11})) + (P_{11}(aux_{12})) + (P_{12}(aux_{13})) + (P_{13}(aux_{14})) + (b(aux_{15} + aux_{16} + aux_{17}))))$$

2.4.4.2. Discretización ecuación 2.67 en y

$$aux_0 = \frac{1}{\frac{\rho_{11}}{\Delta t^2} + \frac{b}{\Delta t}}$$

$$aux_1 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y) - 2u_y(t, x, y) + u_y(t, x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$aux_2 = \frac{u_y(t, x, y + \Delta y) - 2u_y(t, x, y) + u_y(t, x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_3 = \frac{u_y(t, x, y + \Delta y) - 2u_y(t, x, y) + u_y(t, x - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_4 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_5 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_6 = \frac{U_y(t, x, y + \Delta y) - 2U_y(t, x, y) + U_y(t, x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_7 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - U_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_8 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - U_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_9 = \frac{v_y(t, x, y + \Delta y) - 2v_y(t, x, y) + v_y(t, x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_{10} = \frac{v_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - v_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_{11} = \frac{v_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - v_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_{12} = \frac{2u_y(t, x, y) - u_y(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{13} = \frac{-U_y(t + \Delta t, x, y) + 2U_y(t, x, y) - U_y(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{14} = \frac{-v_y(t + \Delta t, x, y) + 2v_y(t, x, y) - v_y(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{15} = \frac{u_y(t - \Delta t, x, y)}{\Delta t}$$

$$aux_{16} = \frac{U_y(t + \Delta t, x, y) - U_y(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$aux_{17} = \frac{v_y(t + \Delta t, x, y) - v_y(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$u_y(t + \Delta t, x, y) = aux_0((\mu_b(aux_1 + aux_2)) + (((aux_{x_L}) - \mu_b)(aux_3 + aux_4 - aux_5) + (Q_1(aux_6 + aux_7 - aux_8)) + (Q_2(aux_9 + aux_{10} - aux_{11})) + (P_{11}(aux_{12})) + (P_{12}(aux_{13})) + (P_{13}(aux_{14})) + (b(aux_{15} + aux_{16} + aux_{17})))$$

2.4.4.3. Discretización ecuación 2.68 en x

$$aux_0 = \frac{1}{\frac{\rho_{22}}{\Delta t^2} + \frac{b}{2\Delta t}}$$

$$aux_1 = \frac{u_x(t, x, y) - 2u_x(t - \Delta t, x, y) + u_x(t - 2\Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_2 = \frac{u_x(t, x, y) - u_x(t - 2\Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$aux_3 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y) - 2u_x(t, x, y) + u_x(t, x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$aux_4 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - u_y(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_5 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - u_y(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_6 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y) - 2U_x(t, x, y) + U_x(t, x - \Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

$$aux_7 = \frac{U_y(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - U_y(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_8 = \frac{U_y(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - U_y(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_9 = \frac{2U_x(t, x, y) - U_x(t, x - \Delta x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{10} = \frac{U_x(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$U_x(t + \Delta t, x, y) = (aux_0)(-(P_{12}aux_1) + (\beta aux_2) + (Q_1(aux_3 + aux_4 - aux_5)) + (R_1(aux_6 + aux_7 - aux_8)) + (P_{22}(aux_9)) + (\beta (aux_{10})))$$

2.4.4.4. Discretización ecuación 2.68 en y

$$aux_0 = \frac{1}{\frac{\rho_{22}}{\Delta t^2} + \frac{b}{2\Delta t}}$$

$$aux_1 = \frac{u_y(t, x, y) - 2u_y(t - \Delta t, x, y) + u_y(t - 2\Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_2 = \frac{u_y(t, x, y) - u_y(t - 2\Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$aux_3 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y) - 2u_y(t, x, y) + u_y(t, x - \Delta x, y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_4 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_5 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_6 = \frac{U_y(t, x, y + \Delta y) - 2U_y(t, x, y) + U_y(t, x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_7 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - U_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_8 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - U_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_9 = \frac{2U_y(t, x, y) - U_y(t, x - \Delta x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{10} = \frac{U_y(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$U_y(t + \Delta t, x, y) = (aux_0)(-P_{12}aux_1) + (\beta aux_2) + (Q_1(aux_3 + aux_4 - aux_5)) + (R_1(aux_6 + aux_7 - aux_8)) + (P_{22}(aux_9)) + (\beta (aux_{10}))$$

2.4.4.5. Discretización ecuación 2.69 en x

$$aux_0 = \frac{1}{\frac{\rho_{33}}{\Delta t^2} + \frac{b}{2\Delta t}}$$

$$aux_1 = \frac{u_y(t, x, y) - 2u_y(t - \Delta t, x, y) + u_y(t - 2\Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_2 = \frac{u_y(t, x, y) - u_y(t - 2\Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$aux_3 = \frac{u_y(t, x, u + \Delta y) - 2u_y(t, x, y) + u_y(t, x, y - \Delta x, y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_4 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_5 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_6 = \frac{v_y(t, x, y + \Delta y) - 2v_y(t, x, y) + v_y(t, x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_7 = \frac{v_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - v_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_8 = \frac{v_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - v_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_9 = \frac{2V_y(t, x, y) - v_y(t, x - \Delta x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{10} = \frac{v_y(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$v_y(t + \Delta t, x, y) = (aux_0)(-P_{13}aux_1) + (\beta aux_2) + (Q_2(aux_3 + aux_4 - aux_5)) + \\ + (R_2(aux_6 + aux_7 - aux_8)) + (P_{33}(aux_9)) + (\beta (aux_{10}))$$

2.4.4.6. Discretización ecuación 2.69 en y

$$aux_0 = \frac{1}{\frac{\rho_{33}}{\Delta t^2} + \frac{b}{2\Delta t}}$$

$$aux_1 = \frac{u_y(t, x, y) - 2u_y(t - \Delta t, x, y) + u_y(t - 2\Delta t, x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_2 = \frac{u_y(t, x, y) - u_y(t - 2\Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$aux_3 = \frac{u_y(t, x + \Delta x, y) - 2u_y(t, x, y) + u_y(t, x - \Delta x, y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_4 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_5 = \frac{u_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - u_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_6 = \frac{U_y(t, x, y + \Delta y) - 2U_y(t, x, y) + U_y(t, x, y - \Delta y)}{\Delta y^2}$$

$$aux_7 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y + \Delta y) - U_x(t, x - \Delta x, y + \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_8 = \frac{U_x(t, x + \Delta x, y - \Delta y) - U_x(t, x - \Delta x, y - \Delta y)}{4\Delta x\Delta y}$$

$$aux_9 = \frac{2U_y(t, x, y) - U_y(t, x - \Delta x, y)}{\Delta t^2}$$

$$aux_{10} = \frac{U_y(t - \Delta t, x, y)}{2\Delta t}$$

$$v_y(t + \Delta t, x, y) = (aux_0)(-P_{12}aux_1) + (\beta aux_2) + (Q_1(aux_3 + aux_4 - aux_5)) + (R_1(aux_6 + aux_7 - aux_8)) + (P_{22}(aux_9)) + (\beta (aux_{10}))$$

Se elaboró un modelo inicial con las propiedades que se pueden ver en la siguiente tabla: Se creó como modelo inicial conformado por arena, la cual tiene cierto grado de porosidad y permeabilidad. Los valores que caracterizan cada uno de los fluidos y la roca están dados en la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Parámetros elastomecánicos del medio

Magnitud física y unidades	Agua	Arena	Aire
Densidad $\frac{Kg}{m^3}$	$\rho_w = 1 \times 10^3$	$\rho_s = 2,65 \times 10^3$	$\rho_g = 1,21$
Módulo de compresibilidad de cada medio $\frac{N}{m^2}$	$k_w = 2 \times 10^9$	$k_s = 2 \times 10^{10}$	$k_g = 1,42 \times 10^5$
Viscosidad dinámica $\frac{N \cdot s}{m^2}$	$\gamma_1 = 1 \times 10^{-3}$		$\gamma_2 = 1,81 \times 10^{-5}$
Porosidad		$0\% < \beta < 100\%$	
Saturación		$S = 99\%$	
Diámetro de los granos (m)		$d = 5 \times 10^{-4}$	
Módulo de compresibilidad de la estructura $\left(\frac{N}{m^2}\right)$		$k_b = 4,36 \times 10^7$	
Módulo de la cizalladura de la estructura $\left(\frac{N}{m^2}\right)$		$\mu = 2,61 \times 10^7$	

Magnitud física y unidades	Agua	Arena	Aire
Permeabilidad dinámica (m^2)		$10^{-8} \leq X$ $\leq 10^{-12}$	
Tortuosidad de los poros c		$c = 1,25$	

Conforme a esto, se desarrolló un código en $c++$ y los resultados se pueden ver a continuación. Se pueden observar en la figura 2.5 dos frentes de onda: el primero corresponde a la onda primaria que es una onda compresional y se mueve con mayor velocidad, mientras que el segundo frente se propaga con una menor velocidad y corresponde al campo de onda secundario.

Para la simulación se usó una ondícula Ricker de 60Hz (ver figura 2.6). Para esta ondícula también se puede ver el espectro de frecuencias.

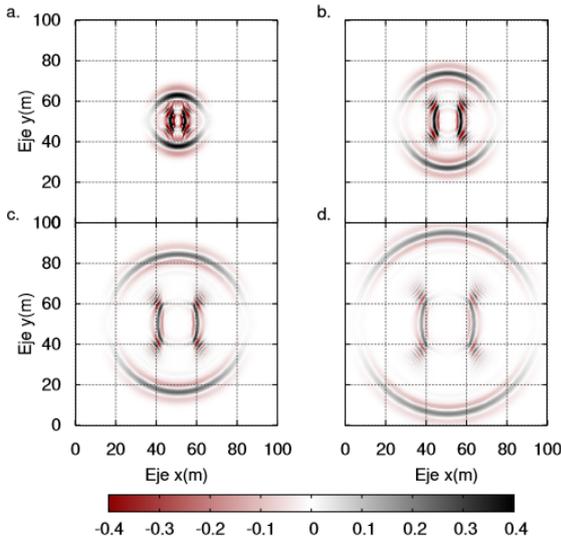


Figura 2.5. Simulación numérica del campo de onda P y S para diferentes tiempos. a. $t = 0,25\text{ s}$, b. $t = 0,35\text{ s}$, c. $t = 0,45\text{ s}$, d. $t = 0,55\text{ s}$

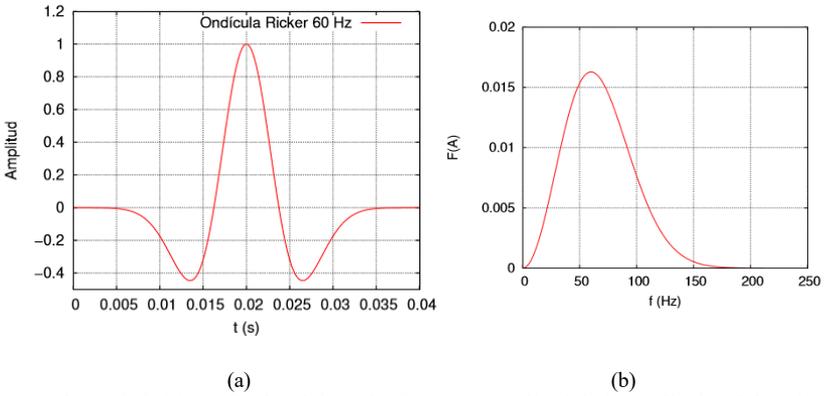


Figura 2.6. (a) Ondícula Ricker. (b) Espectro amplitud de la Ondícula Ricker de 60 Hz

En el espectro se puede observar un pico máximo en la frecuencia de 60 Hz. Se tomó el campo de onda P y se varió el valor de la saturación del medio a diferentes porosidades, ver figura 2.7.

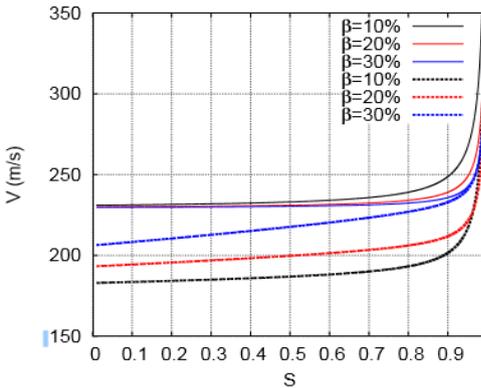


Figura 2.7. Variación de la velocidad en función de la porosidad y la saturación

Variación de la velocidad en función de la saturación para diferentes porosidades. Allí se puede observar la variación de la velocidad del campo de onda primario para distintos niveles de saturación. A medida que aumenta el valor de la saturación de la matriz rocosa, el valor de la velocidad aumenta y esta variación es mayor para valores de saturación mayores al 90 %.

Esto ocurre debido a que predomina el valor de incompresibilidad del fluido en comparación con el gas que permea la roca. También se evidencia que a mayor porosidad la velocidad aumenta, y es porque aumenta la proporción de agua dentro de la roca y su valor en cuanto a incompresibilidad es mayor.

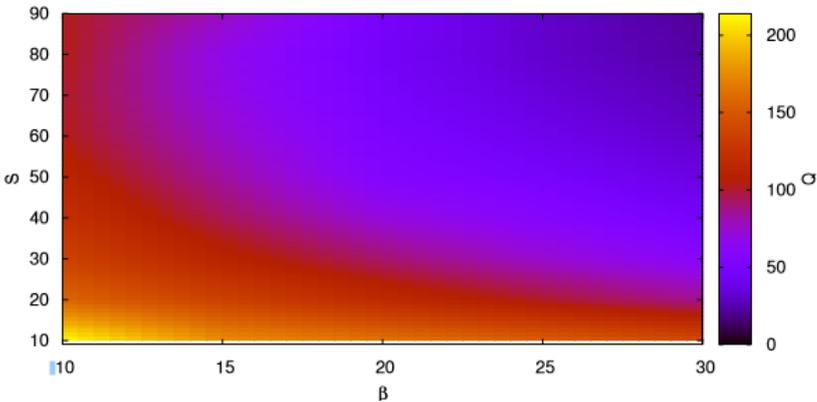


Figura 2.8. Variación del factor de calidad Q en función de la porosidad y saturación

Se realizó el programa que permite la simulación de la propagación de una onda en un medio poroso basado en la Teoría de Biot modificada para tener en cuenta dos fluidos dentro del poro y así calcular el factor de calidad Q de la amplitud de la ondulada en función de la porosidad β , la saturación S y la viscosidad γ , además de determinar la variación de la máxima amplitud en el espectro de frecuencias de la señal en función del corrimiento en el valor de la frecuencia principal de la señal.

Referencias

- Biot, M. A. (1956a). Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 28(2), 168-178. <https://doi.org/10.1121/1.1908239>
- _____. (1956b). Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher-Frequency Range. *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 28(2), 179-191. <https://doi.org/10.1121/1.1908241>
- _____. (1962a). Generalized Theory of Acoustic Propagation in Porous Media. *The Journal Of The Acoustical Society Of America*, 34(9A), 1254-1264. <https://doi.org/10.1121/1.1918315>
- _____. (1962b). Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media. *Journal Of Applied Physics*, 33(4), 1482-1498. <https://doi.org/10.1063/1.1728759>
- Camarasa, R. M. (2002). *Contribución a la teoría de Biot sobre propagación de ondas acústicas en sedimentos saturados en una mezcla de fluidos: teoría generalizada de Biot*. Tesis de doctorado, Universidad Complutense de Madrid, España. <https://eprints.ucm.es/1885/1/T19920.pdf>
- Campos, D. y Isaza, J. F. (2002). *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. <https://bit.ly/2VfD1oA>

Capítulo 3

Simulación numérica en electrostática usando Diferencias Finitas

Héctor Javier Hortúa, Alejandro Duitama Leal y José J. Fredy González V.

Resumen. El campo eléctrico E en diferentes sistemas físicos en general se obtiene al resolver la ley de Coulomb o la ley de Gauss cuando se conoce la distribución de carga, o usando $E = -\nabla V$ cuando el potencial V es conocido en la región de interés. Sin embargo, en la mayoría de los casos, no se conoce ni la distribución de carga ni el potencial (Sadiku, 2003). En este capítulo, se considerarán casos en los que se conocen propiedades del potencial en la frontera y se desea encontrar E y V en toda la región del espacio de interés. Estos problemas generalmente se abordan resolviendo la ecuación de Poisson cuando existe distribución de carga en la región o la ecuación Laplace en la ausencia de esta. Finalmente, se muestra una aplicación al análisis de Diferencias Finitas en electrostática, usando diferentes geometrías y condiciones de frontera ya sea en la función o en su derivada. La metodología que se muestra en este capítulo está basada en Sadiku (2003) y Jackson (2012).

3.1. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Existe una relación entre el campo eléctrico en un sistema E y la densidad de carga que lo genera ρ_v , esta relación es llamada la ley de Gauss

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_v, \quad (3.1)$$

En la cual ε es la permitividad eléctrica del medio. Debido a que el campo eléctrico y el potencial $V(x)$ se relacionan a través de $\mathbf{E} = -\nabla V$, al sustituir esta relación en la ley de Gauss, se obtiene

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}, \quad (3.2)$$

asumiendo un medio homogéneo (Sadiku, 2003). Esta última ecuación se conoce como la ecuación de Poisson, la cual se debe al matemático y físico francés Siméon-Denis Poisson, que la publicó en 1812. Cuando no hay distribución volumétrica de carga $\rho_v = 0$, se obtiene la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V = 0. \quad (3.3)$$

Para diferentes sistemas de coordenadas, el operador laplaciano ∇^2 toma la forma

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \rightarrow \text{Rectangulares} \quad (3.4)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \rightarrow \text{Polares} \quad (3.5)$$

en la que $V = V(x, y)$ o $V = V(r, \theta)$ dependiendo del sistema de coordenadas, de igual forma para la densidad de carga.

En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales lineales, un problema bien planteado consiste en una ecuación diferencial parcial lineal sujeta a ciertas condiciones de frontera que tenga solución única. En el caso de la ecuación de Poisson (o Laplace), se puede demostrar dicha unicidad de las soluciones, sin embargo antes de entrar en el problema de unicidad, definamos las condiciones que se pueden aplicar a las ecuaciones (3.2) y (3.3) en la frontera J de la región de interés Ω (Jackson, 2012):

- Condiciones de Dirichlet: los valores del potencial V son especificados para todos los puntos $\mathbf{x} \in J$.
- Condiciones de Neumann: los valores de la derivada del potencial V

$$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla V(\mathbf{x})$$

son especificados para todos los puntos $x \in \mathcal{J}$. El vector normal n (que depende de x) es el vector unitario que es perpendicular a la superficie \mathcal{J} y apunta hacia afuera de la región Ω .

Así, la demostración de la unicidad en las soluciones de las ecuaciones (3.2) y (3.3) es descrita de la siguiente forma. Consideremos una superficie \mathcal{J} que encierra un volumen Ω en el cual se cumple la ecuación (3.2). Asumiendo dos soluciones de la ecuación de Poisson $V_1(x)$, $V_2(x)$, que satisfacen las mismas condiciones de Dirichlet en \mathcal{J} , si definimos una variable dada por $\phi \equiv V_1(x) - V_2(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \nabla^2(V_1 - V_2) = -\frac{\rho v}{\varepsilon} + \frac{\rho v}{\varepsilon} = 0; \\ \phi|_{\mathcal{J}=(V_1-V_2)|_{\mathcal{J}}} &= 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde se observa que ϕ satisface la ecuación de Laplace. De la misma forma podemos empezar usando la ecuación de Laplace y llegar al mismo resultado mostrado en la ecuación (3.6). Ahora se considera la siguiente integral

$$Q = \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega \geq 0 \tag{3.7}$$

la cual es mayor que cero debido a las propiedades del integrado. Además asumamos por ahora que $\phi \neq cte$, el cual produciría $Q = 0$. Usando la propiedad vectorial (Jackson, 2012)

$$(\nabla \phi)^2 = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - \phi (\nabla^2 \phi)$$

y reemplazando la relación encontrada en la ecuación (3.6), se encuentra que

$$(\nabla \phi)^2 = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi). \tag{3.8}$$

De esta forma se llega a que la integral definida en la ecuación (3.7) es

$$Q = \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) d\Omega = \oint_{\mathcal{J}} \phi n \cdot \nabla \phi d\mathcal{J} \tag{3.9}$$

en la cual se ha usado el teorema de la divergencia para transformar la integral de volumen Ω , en una integral de superficie sobre \mathcal{J} , por lo tanto

$$Q = \oint_{\mathcal{J}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} nd\mathcal{J} \quad (3.10)$$

De esta última ecuación se observa que si reemplazamos el valor de ϕ escrito en la ecuación (3.6), el valor de la integral es cero $Q = 0$ ya que ϕ es nulo en la frontera. Como consecuencia, se llega a que $\phi = \text{Cte}$ debido a la ecuación (3.7) y por consistencia con la segunda relación mostrada en la ecuación (3.6), esta constante es cero, lo cual implica que $V_1 = V_2$. Por lo tanto, se ha demostrado que si V_1 y V_2 son dos soluciones de la ecuación de Poisson o Laplace, y que ambas satisfacen las condiciones de Dirichlet, entonces $V_1 = V_2$ para todos los puntos en Ω . Si se tiene especificada la derivada del potencial en la frontera $(\frac{\partial V_1}{\partial n})_{\mathcal{J}} = (\frac{\partial V_2}{\partial n})_{\mathcal{J}}$ (condición de Neumann), usando el mismo argumento y observando la ecuación (3.10) se llega a que $\phi = \text{Cte}$, sin embargo la condición de la derivada del potencial en la frontera no determina el valor de la constante. Esto implica que para la condición de Neumann, el potencial es único salvo una constante no determinada.

3.2. Ecuación de Laplace

Las ecuaciones diferenciales parciales a menudo se resuelven convenientemente por un método llamado separación de variables. En particular, se trabaja con conjuntos ortogonales de funciones debido a sus importantes propiedades. En esta sección discutiremos solo dos geometrías en detalle: rectangular y esférica, comenzando con las coordenadas rectangulares que son las más simples.

3.2.1. Coordenadas rectangulares

La ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares está dada por

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (3.11)$$

donde se usó la expresión para el laplaciano en este sistema (ver ecuación (3.4)). Como un primer ejercicio, se pretende encontrar el potencial en una región descrita por $0 < x < b$ y $0 < y < a$ con las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} V(x=0, y) = 0; \quad V(x=b, y) = 0; \quad V(x, y=0) = 0; \\ V(x, y=a) = V_0(x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Una solución de esta ecuación diferencial se puede encontrar en términos de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de la misma forma, suponiendo que el

potencial puede ser representado por un producto de dos funciones, una para cada coordenada

$$V(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.13)$$

Al sustituir la solución propuesta (3.13) en la ecuación de Laplace y dividir por $V(x, y)$ escrita en (3.13), se tiene

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}. \quad (3.15)$$

donde omitimos las variables que dependen de cada una de las funciones. Si esta última ecuación se mantiene para valores arbitrarios de las coordenadas (x, y) , cada uno de los términos debe ser constante por separado

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta. \quad (3.15)$$

El rango de β se encuentra al verificar que realmente satisface las condiciones de frontera (3.12). Si se asume que $\beta = 0$, se tiene que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \rightarrow X = Ax + B, \quad (3.16)$$

Al usar las condiciones de frontera (3.12) se tiene que

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = 0 + B \quad \text{o} \quad B = 0, \quad (3.17)$$

y, además

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = Ab \quad \text{o} \quad A = 0, \quad (3.18)$$

debido a que $b \neq 0$, lo cual conduce a la solución trivial $X(x) = 0$. Por otro lado, si asumimos $\beta = \beta^2 < 0$, se tiene que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = |\beta_1| \rightarrow X = A \cosh(|\beta_1|x) + B \sinh(|\beta_1|x), \quad (3.19)$$

al usar las condiciones de frontera (3.12) se tiene que

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = A + 0 \quad \text{o} \quad A = 0, \quad (3.20)$$

y, además

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = B \sinh(|\beta_1|b) \quad \text{o} \quad B = 0, \quad (3.21)$$

debido a que $B \sinh(|\beta_1|b) = 0$, nuevamente obteniendo la solución trivial. De esta forma se llega a que $\beta > 0$. Con el rango de β (aquí podemos reemplazar β con β^2 ya que son variables positivas que permiten expresar las soluciones en términos de β y no de su raíz) podemos llegar a determinar el valor de las constantes que surgen al resolver las ecuaciones diferenciales

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\beta^2 \rightarrow X = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x), \quad (3.22)$$

al usar (3.12) se llega a

$$X(x = 0) = 0 \rightarrow 0 = A + 0 \quad \text{o} \quad A = 0, \quad (3.23)$$

también se tiene que

$$X(x = b) = 0 \rightarrow 0 = B \sinh(\beta b) \quad \text{o} \quad B\beta = n\pi, \quad (3.24)$$

con $n > 0$ entero. Con este procedimiento se encuentra que la solución para X es

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (3.25)$$

Para la función Y se tiene

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2 \rightarrow Y = C \cosh(\beta y) + D \sinh(\beta y), \quad (3.26)$$

al usar (3.12) se llega a

$$Y(y = 0) = 0 \rightarrow 0 = C + 0 \quad \text{o} \quad C = 0, \quad (3.27)$$

y se encuentra para Y lo siguiente

$$Y_n(y) = C_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.28)$$

De esta forma, la solución propuesta para el potencial en (3.13) está descrita por

$$V(x, y) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (3.29)$$

donde las constantes se reescribieron en una nueva variable B_n . Se observa que tenemos varias soluciones dependiendo del valor de n , así que usando el teorema

de superposición que asegura que la superposición de soluciones es también una solución (Jackson, 2012), se tiene que

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \quad (3.30)$$

Finalmente los coeficientes B_n son determinados usando la última condición de frontera

$$V(x, y = a) = V_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right). \quad (3.31)$$

Multiplicando ambos lados de la última ecuación por $\sin(m\pi x/b)$ e integrando sobre $0 < x < b$ se llega a

$$\begin{aligned} & \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) V_0(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.32)$$

ahora si usamos la propiedad de ortogonalidad de las funciones seno o coseno escritas como (Jackson, 2012)

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{b}{2} & \text{si } n = m \end{cases}. \quad (3.33)$$

se tiene que la ecuación (3.34) queda escrita como

$$\int_0^b \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right) V_0(x) dx = B_m \sinh\left(\frac{m\pi a}{b}\right) \frac{b}{2}, \quad (3.34)$$

por lo tanto, al sustituir esta última expresión en la solución general (3.30), se llega a

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) V_0(x) dx}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) b}, \quad (3.35)$$

Consideremos dos casos particulares de la ecuación anterior, $V_0(x) = V_0 = Cte$ y $V_0(x) = x$.

3.2.1.1. $V_0(x) = Cte$

En este caso, se tiene que

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) V_0(x) dx = V_0 \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx \quad (3.36)$$

$$= \frac{V_0 b}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)),$$

lo cual implica que para n par la solución es nula, mientras que para n impar el resultado anterior es igual a $\frac{2b}{n\pi} V_0$. De esta forma se tiene que

$$V(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) b}, \quad (3.37)$$

3.2.1.2. $V_0(x) = x$

En este caso, se tiene que

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) V_0(x) dx = V_0 \int_0^b x \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx = \frac{(-1)^{n+1} b^2}{n\pi}, \quad (3.38)$$

por lo tanto, se obtiene

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2b(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}, \quad (3.39)$$

3.3. Discretización del espacio

En esta sección se mostrará el procedimiento empleado para la solución numérica de la ecuación de Laplace en dos dimensiones y con condiciones de Dirichlet en la frontera. El método de Diferencias Finitas que usaremos para la solución

numérica de las ecuaciones diferenciales descritas en este libro, consiste en básicamente tres pasos:

1. Dividir la región de la solución en una matriz rectangular (o polar, de acuerdo con la simetría del problema) de nodos.
2. Aproximar la ecuación diferencial junto con sus condiciones de frontera mediante un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales en los nodos en la región de interés.
3. Resolver este conjunto de ecuaciones algebraicas lineales a través de métodos iterativos.

Para el primer paso, se crea la región de interés discretizada de la siguiente forma:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5 M = N = 50 #Numero de p a s o s
6
7 """ Rango del espacio
8     Parámetros
9     x_0<x<x_f
10    y_0<y<y_f
11    """
12 x_0=0.0
13 x_f=1
14 y_0=0.0
15 y_f=1
16
17
18 h=(x_f-x_0)/M # g r i l l a  e n  x
19 k=(y_f-y_0)/N # g r i l l a  e n  y
20
21 """ Creación de la grilla
22     X,Y corresponde a la grilla mientras que n
23     T, T nuevo corresponden a puntos internos a la n
24     región. T nuevo son valores actualizados durante
25     el proceso de iteración.
26 """
27
28 x= np.linspace(x_0,x_f,M+1)
29 y= np.linspace(y_0,y_f,N+1)
30 X,Y=np.meshgrid(x,y)
31
32 T = np.zeros((len(X),len(Y)))
33 T_new=np.zeros((len(X),len(Y)))

```

Listado 3.1. Discretización de la región

En el caso en el cual estamos trabajando con la ecuación de Poisson, el término fuente debe ser discretizado de la misma forma, para ello simplemente adicionamos la siguiente línea de código a la lista (3.1)

```
1 #Término fuente de la ec.de Poisson
2 source=np.zeros((len(X),len(Y) ) )
```

Listado 3.2. Término fuente de la ecuación de Poisson

Como segundo paso se establecen las condiciones de frontera. Usando el ejemplo mencionado con $V_0(x) = x$ en $y = a$, el proceso viene descrito como se observa a continuación

```
1 #Término fuente de la ec.de Poisson
2 T[-1, :] = 0
3 T[ 0, :] = 0
4 T[:, -1] = np.power(x,1)
5 T[:, 0] = 0
```

Listado 3.3. Condiciones de frontera tipo Dirichlet

Además, se establece la forma funcional de la fuente en el caso de la ecuación de Poisson

```
1
2 def poisson_fuente(X,Y):
3     """
4     Función que define la forma de la fuente.\
5     En este caso se asume que está distribuida\
6     de forma Gaussiana.
7
8     mu, sigma = 10, 0.1 ##media mu=10 y varianza sigma =0.1
9     """
10    G=np.exp (-(X-mu)**2 + (Y-mu)**2) / 2.0*sigma**2) / (np.sqrt(2*np.pi*sigma))
11    return G
12
13 fuente=poissonfuente(X,Y)
14 fuente[-1, :] = 0
15 fuente[ 0, :] = 0
16 fuente[:, -1] = 0
17 fuente[:, 0] = 0
```

Listado 3.4. Forma de la fuente en la ecuación de Poisson

Finalmente, se escribe la ecuación de Laplace (o Poisson cuando la fuente es diferente de cero) usando la aproximación de la ecuación diferencial propuesta por el método de Diferencias Finitas

```

1  """
2  Aproximación de la ecuación diferencial usando n
3  e l método de Diferencias Finitas
4
5  """
6
7  e=8.8 5 e-12 # Permitividad eléctrica
8  constante=1 / e
9  Tolerancia0=1e-6 # Tolerancia
10 delta=1.0 #Valor inicial
11
12 # Solución de la ecuación vía proceso de iteración
13
14 while delta>Tolerancia0:
15     S1 = []
16     for i in range(M+1):
17         for j in range(N+1):
18             if i==0 or i==M or j==0 or j==N:
19                 T nuevo [ i , j ] = T [ i , j ]
20             else:
21                 T_nuevo[ i , j ] = ((T[ i +1 ] [ j ] + T[ i -1 ] [ j ] ) * k**2 + (T[ i ] [ j +1 ] + T[ i ] [ j
- 1 ] ) * h ** 2 \
22                     -constante * fuente [ i ] [ j ] *h**2 * k**2) / ( 2 * ( h**2 + k**2) )
23                 S1.append ( T_nuevo [ i , j ] - T[ i , j ] ) # Verificar tolerancia
24     delta = max ( np.absolute(S1) )
25
26 # Actualizar valores de T
27 T,T nuevo = T_nuevo , T

```

Listado 3.5. Proceso de iteración

Recordemos que para $f_{fuente} = 0$ se reduce a la ecuación de Laplace. En las líneas ilustradas en (3.5) se muestra el proceso de iteración para la solución de la ecuación diferencial. El sistema entra en un proceso de iteración en el cual los valores se van actualizando de acuerdo con la aproximación obtenida por el método de Diferencias Finitas y culmina cuando la diferencia entre la solución previa y la solución actual es menor en cierta tolerancia (en las líneas se muestra que esta tolerancia es igual a 10^{-6}). Con el código anterior podemos comparar la solución numérica obtenida con el método de Diferencias Finitas y la solución analítica lograda en la sección anterior. Para el caso mostrado en la sección 3.2.1.1 los resultados se muestran en la figura 3.1, y para la sección 3.2.1.2, en la figura 3.2. Finalmente, en la tabla 3.1 se dan algunos ejemplos de las ecuaciones

de Laplace y Poisson sujetas a diferentes condiciones de frontera, además de sus soluciones analíticas.

Ejemplo	Ecuación diferencial	Condiciones de frontera	Solución analítica
1	$\nabla^2 V = (x^2 + y^2)e^{xy}$,	$V(0, y) = 1$ $V(2, y) = e^{2y}$ $V(x, 0) = 1$ $V(x, 1) = e^x$	e^{xy}
2	$\nabla^2 V = 0$,	$V(1, y) = \ln(y^2 + 1)$ $V(2, y) = \ln(y^2 + 4)$ $V(x, 0) = 2\ln(x)$ $V(x, 1) = \ln x^2 + 4$	$\ln(y^2 + x^2)$
3	$\nabla^2 V = 4$,	$V(1, y) = y^2$ $V(2, y) = (y - 1)^2$ $V(x, 0) = x^2$ $V(x, 2) = (x - 2)^2$	$(x - y)^2$
4	$\nabla^2 V = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$,	$V(1, y) = y \ln(y)$ $V(2, y) = 2y \ln(2y)$ $V(x, 1) = x \ln(x)$ $V(x, 1) = x \ln(4x^2)$	$xy \ln(xy)$

Tabla 3.1. Algunos ejemplos de las ecuaciones de Laplace y Poisson sujetas a diferentes condiciones de frontera. Estos ejercicios están propuestos en la sección 12.1 del libro de Burden, Faires y Burden (2015)

3.3.1. Coordenadas polares

La ecuación de Laplace en coordenadas polares está dada por

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}, \quad (3.40)$$

Usando la misma metodología empleada para el caso rectangular, consideremos una solución de la forma $V(r, \theta) = R(r)\theta(\theta)$, de esta manera se tiene que

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta^2}, \quad (3.41)$$

debido a que el lado izquierdo de la ecuación anterior depende solo de r , mientras que la del lado derecho solo depende de θ , se tiene que ambos lados deben ser iguales a una constante λ^2 .

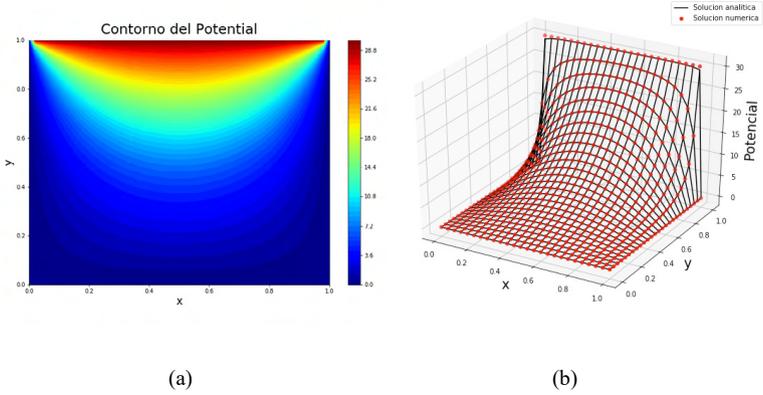


Figura 3.1. Solución numérica del ejercicio mostrado en 3.2.1.1. (a) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para el ejercicio mostrado en 3.2.1.1. (b) Comparación entre la solución analítica de la ecuación (3.37) y la solución generada por el método de Diferencias Finitas

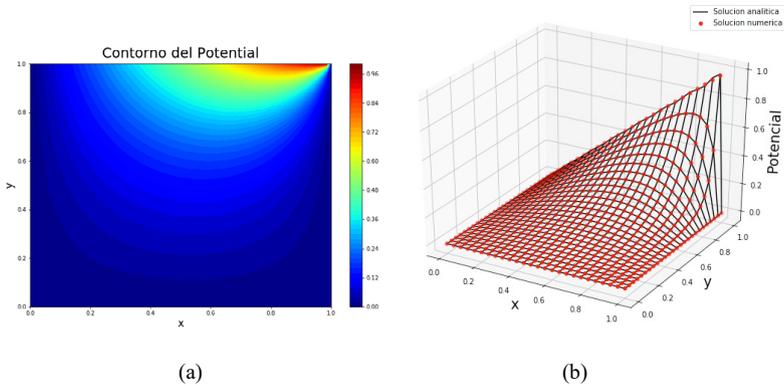


Figura 3.2. Solución numérica del ejercicio mostrado en 3.2.1.2. (a) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para el ejercicio mostrado en 3.2.1.2. (b) Comparación entre la solución analítica de la ecuación (3.39) y la solución generada por el método de Diferencias Finitas

Para θ se tiene que

Alejandro Duitama Leal, José J. Fredy González V.,
Héctor Javier Hortúa y Leonardo D. Donado E.

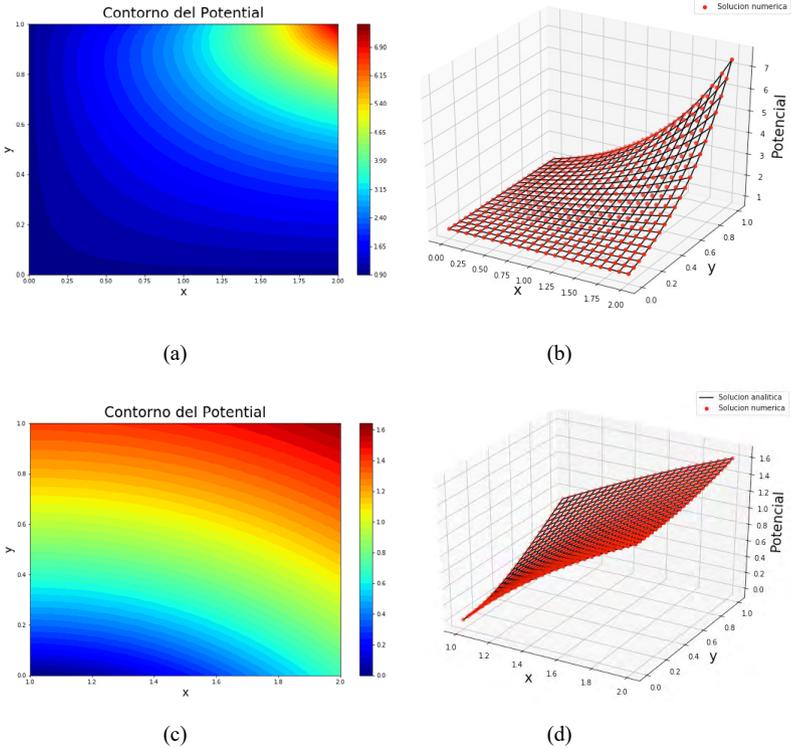
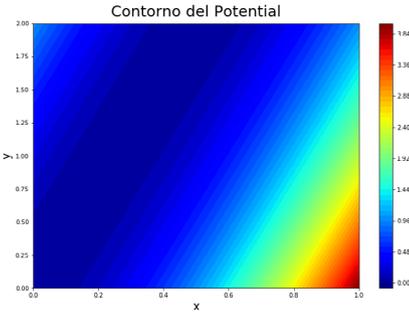


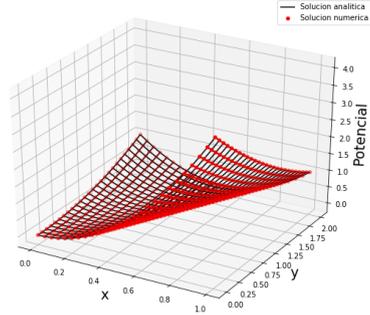
Figura 3.3. Soluciones de los ejercicios mostrados en la tabla 3.1. (a) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 1. (b) Comparación entre la solución analítica y la solución generada por el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 1. (c) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 2. (d) Comparación entre la solución analítica y la solución generada por el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 2

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta^2} = -\lambda^2, \quad (3.42)$$

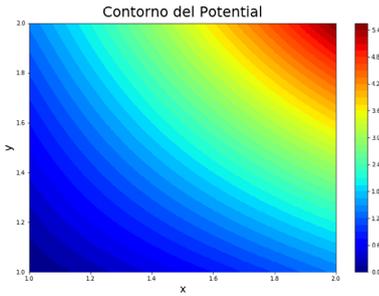
cuya solución viene dada como



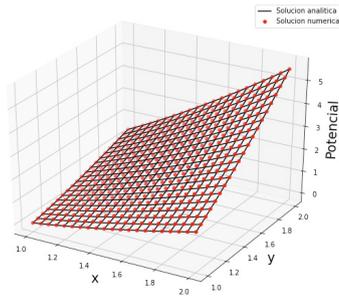
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.4. Soluciones de los ejercicios mostrados en la tabla 3.1. (a) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 3.

(b) Comparación entre la solución analítica y la solución generada por el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 3. (c) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 4. (d) Comparación entre la solución analítica y la solución generada por el método de Diferencias Finitas para el ejercicio 4

$$\theta = A + B\theta, \quad \text{para } \lambda = 0 \quad (3.43)$$

$$\theta = A\cos(\lambda \theta) + B\sin(\lambda \theta), \quad \text{para } \lambda \neq 0 \quad (3.44)$$

En el caso en el que $\lambda < 0$ no cumple las condiciones de periodicidad en θ , es decir $V(r, \theta = 0) = V(r, \theta = 2\pi)$. De esta forma, dada la periodicidad de θ , se tiene que $\lambda \in \mathbb{Z}^+$. Ahora para la parte correspondiente a r en la ecuación (3.44) se tiene que

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} = \lambda^2, \quad (3.45)$$

Si ahora se realiza el cambio de variable $r=e^\mu$, se tiene por regla de la cadena

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{d\mu}; \quad \frac{d^2R}{dr^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{d\mu} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2R}{d\mu^2}, \quad (3.45)$$

y al reemplazar estas últimas expresiones en (3.45) se llega a

$$\frac{d^2R}{d\mu^2} = R\lambda^2, \quad (3.47)$$

cuya solución es

$$R(\mu) = Ce^{\lambda\mu} + De^{-\lambda\mu} \rightarrow R(r) = Cr^\lambda + Dr^{-\lambda}, \quad (3.48)$$

Mientras que para $\lambda = 0$, la solución de (3.45) viene dada por

$$R(r) = E + F \ln(r), \quad (3.49)$$

Finalmente, la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares se escribe como la superposición de las soluciones encontradas en las ecuaciones (3.43), (3.48) y (3.50), obteniendo así

$$\begin{aligned} V(r, \theta) = & E + F \theta + G \ln(r) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) ((C_n \cos(n\theta) \\ & + D_n \sin(n\theta)), \end{aligned} \quad (3.50)$$

Veamos dos ejercicios relacionados con esta última ecuación. El primer ejercicio consiste en determinar el potencial en un disco sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$V(1, 0 < \theta < \pi) = \cos(\theta), \quad V(1, \pi < \theta < 2\pi) = \sin(\theta). \quad (3.51)$$

Para ello, usamos las propiedades de ortonormalidad de las funciones seno y coseno. Debido a que la región contiene el origen, las constantes G y B_n de (3.50)

son cero para evitar términos divergentes, también F es nulo ya que este término no representa la periodicidad de las condiciones de frontera. De esta forma se tiene que

$$E = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi \cos(\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin(\theta) d\theta \right) = -\frac{1}{\pi}, \quad (3.52)$$

$$C_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos(\theta) \sin(n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right), \quad (3.53)$$

$$= -\frac{2n}{n^2 - 1}, \text{ con } n = 2, 4, 6, \dots \quad (3.54)$$

donde el valor de A_n ha sido absorbido en las constantes C_n y D_n . Para la otra constante se tiene

$$D_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \cos(\theta) \cos(n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin(\theta) \cos(n\theta) d\theta \right), \quad (3.55)$$

$$= -\frac{2}{n^2 - 1}, \text{ con } n = 2, 4, 6, \dots \quad (3.56)$$

Debido a que en el término $n = 1$ existe una divergencia, esta se calcula aparte, encontrando un valor igual a $\pi/2$ para ambos términos. De esta forma se tiene que la solución es

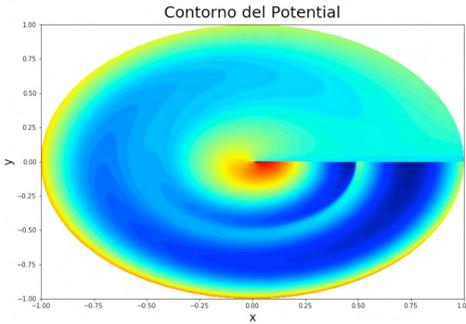
$$V(r, \theta) = -\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(-\frac{2nr^n}{n^2 - 1} (\cos(n\theta) + \sin(n\theta)) + \frac{r}{2} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \right) \right), \quad (3.57)$$

En la figura 3.5 se observa la solución teórica y numérica del ejercicio. Otro ejemplo consiste en determinar el potencial sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$V(3, 0 < \theta < \pi) = \cos(\theta), \quad V(3, \pi < \theta < 2\pi) = \sin^2(\theta). \quad (3.58)$$

Nuevamente las constantes por definir son E , C_n y D_n mientras que A_n es absorbida en las últimas dos. De esta forma se tiene que

$$E = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right) = \frac{3}{4}, \quad (3.59)$$



(a)

(b)

Figura 3.5. Solución numérica del primer el ejercicio en coordenadas polares. (a) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para primer el ejercicio en coordenadas polares. (b) Comparación entre la solución analítica de la ecuación (3.57) y la solución generada por el método de Diferencias Finitas

$$C_n = \frac{1}{3^n \pi} \left(\int_0^\pi \sin(n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin^2(\theta) \sin(n\theta) d\theta \right), \quad (3.60)$$

$$= -\frac{1}{36} \quad \text{para } n = 2, \quad (3.61)$$

mientras que para el resto de términos es cero. Para la otra constante se tiene

$$D_n = \frac{1}{3^n \pi} \left(\int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos(n\theta) d\theta \right), \quad (3.62)$$

$$= -\frac{1}{3^n \pi} \left(\frac{2}{n} + \frac{4}{n(n^2 - 4)} \right) \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.63)$$

Debido a que en el término $n = 2$ existe una divergencia, esta se calcula aparte, encontrando un valor igual a cero. De esta forma se tiene que la solución es

$$\begin{aligned}
 V(r, \theta) &= \frac{3}{4} - \frac{r^2}{36} \cos(2\theta) \\
 &+ \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} r^n \frac{2n}{3^n \pi} \left(\frac{2((n-2)n + 2n - 2)}{(n+1)(n-2)n} \right) \sin(n\theta) \right),
 \end{aligned}
 \tag{3.64}$$

En la figura 3.6 se observa la solución teórica y numérica del ejercicio.

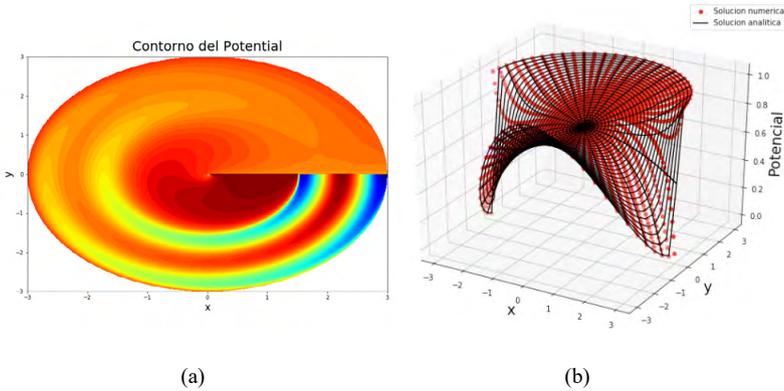


Figura 3.6. Solución numérica del segundo ejercicio en coordenadas polares. (a) Contorno del potencial resuelto con el método de Diferencias Finitas para segundo el ejercicio en coordenadas polares. (b) Comparación entre la solución analítica de la ecuación (3.64) y la solución generada por el método de Diferencias Finitas

Para la resolución numérica de las ecuaciones se tienen en cuenta las condiciones de frontera en la coordenada radial y la periodicidad en la parte angular, como se observa en 3.6. Mientras que la aproximación de Diferencias Finitas viene descrita en 3.7

```

1 # Condiciones de frontera en coordenadas polares
2 T[-1, 0 : N // 2] = np.cos(p[0 : N // 2])
3 T[-1, N // 2 : ] = np.sin(p[N // 2 : ])
4 T[0, :] = np.power(p, 0) * (-1. / np.pi)
5 T[:, 0] = T[:, -1]

```

Listado 3.6. Condiciones de frontera y periodicidad en coordenadas polares

Alejandro Duitama Leal, José J. Fredy González V.,
Héctor Javier Hortúa y Leonardo D. Donado E.

```

1 """
2 Aproximación de la ecuación diferencia l usando \
3 el método de Diferencias Finitas para coordenadas polares
4
5 """
6
7 def ri ( a ) :
8     ria = r0+a * hr
9     return ria
10
11 while delta > target :
12     S1 = []
13     for i inrange (M+1) :
14         for j inrange (N) :
15
16             if j == 0 :
17                 T new [ i , -1] = T[ i , 0 ]
18             if i ==M or i ==0:
19                 T new [ i , j] = T[ i , j ]
20
21             else :
22
23                 T_new [ i , j] = (( T[ i +1 ] [ j] * ri ( i + 1 . / 2 ) + T[ i
24                     -1] [ j] * ri ( i - 1 . / 2 ) ) + ( T[ i ] [ j +1] + T[ i ] [ j -
25                     1] ) * hr ** 2 / ( ri ( i )
26                     * h t ** 2 ) ) / ( ri ( i - 1 . / 2 ) + ri ( i + 1 . / 2 ) + 2 *
27                     hr ** 2 / ( ri ( i ) * h t ** 2 ) )
28
29                 S1 . append ( T_new [ i , j ] □ T[ i , j ] )

```

Listado 3.7. Proceso de iteración en coordenadas polares

Referencias

- Burden, R. L., Faires, J. D. y Burden, A. M. (2015). *Numerical Analysis*. Cengage Learning. https://fac.ksu.edu.sa/sites/default/files/numerical_analysis_9th.pdf
- Jackson, J. D. (2012). *Classical Electrodynamics*. Wiley.
- Sadiku, M. N. O. (2003). *Elementos de electromagnetismo*. Oxford University Press. <https://bit.ly/2VfZbHa>

Capítulo 4

Tomografía de la Cuenca de Urabá usando el método GLI (Generalized Linear Inversion)

José J. Fredy González V., Alejandro Duitama Leal y Héctor Javier Hortúa

Resumen. El método Diferencias Finitas se aplica en el campo de las ciencias de la Tierra. En este capítulo se observa cómo utilizar la metodología para calcular las velocidades del subsuelo en una zona conocida como Cuenca de Urabá a partir de los sismos de la región. El resultado de este problema se conoce como tomografía sísmica de velocidades. Estas velocidades forman una imagen del subsuelo y ofrecen una descripción importante para interpretar su composición física. El método tomográfico que se estudiará en esta sección se fundamenta en un principio físico muy intuitivo: si la velocidad es muy baja en un segmento, tardará mucho tiempo atravesarlo. Piense por un instante en una avenida congestionada por autos, allí la velocidad de conducción será muy baja, lo que ocasiona que usted tarde más tiempo para llegar a su destino. De manera similar, si se produce un evento sísmico en el subsuelo, el tiempo que tarda en llegar la onda sísmica a superficie depende de la velocidad del medio.

4.1. Introducción

Los seres humanos hemos ingeniado dispositivos que registran el movimiento del suelo en la superficie, llamados sismómetros. Cuando ocurre un evento sísmico se generan principalmente dos ondas sísmicas llamadas onda P y onda S que viajan a través del subsuelo y llegan finalmente a la superficie donde un sismómetro las detecta. Básicamente se requieren solo tres de estos instrumentos ubicados en diferentes lugares para conocer dónde ocurrió el evento y uno adicional para saber cuándo. Sin embargo, se instalan redes de sismógrafos, los cuales, en algunos casos, pueden ser cientos. Pero, si solo se requieren cuatro instrumentos ¿para qué sirven los demás? Los investigadores utilizan toda la red con dos propósitos claves: para mejorar la precisión de la ubicación espacial y temporal del evento y para caracterizar el subsuelo. En el caso que se presenta en este capítulo se utiliza la segunda opción: se caracteriza el subsuelo mediante una tomografía.

Entonces cada sismómetro registra el tiempo en el cual las ondas llegan a superficie, mientras más cerca se encuentre del punto de origen, menor será el tiempo de llegada de la onda sísmica; sin embargo, también depende de la velocidad del medio. Si la velocidad del medio es baja, aunque el origen del evento sísmico sea muy cercano al lugar donde se encuentra el sismógrafo, las ondas tardarán bastante tiempo para ser detectadas por este instrumento.

En resumen, una red completa de sismógrafos consiste en estaciones sismográficas, cada una registra el tiempo de llegada de las ondas y en conjunto ofrecen información no solo del origen sino también de las propiedades del subsuelo.

El método aquí presentado es sencillo, funciona a prueba y error. Se propone un modelo, el cual consiste en una malla de velocidades y un origen espacial y temporal del evento sísmico. Se simula y se calcula el tiempo de llegada de la onda en cada una de las estaciones sismográficas. Si coincide con los tiempos observados estaremos con suerte y solucionamos el problema. Si no, se mide el error y se propone un nuevo modelo. Pero el nuevo intento no se hace al azar (sería poco eficiente), en su lugar, el error calculado indica la dirección del próximo modelo. Después de varias iteraciones se obtiene un error mínimo y el modelo conseguido con la última iteración es considerado la solución. En la figura 4.1 se observa el esquema de la inversión topográfica propuesta en el documento.

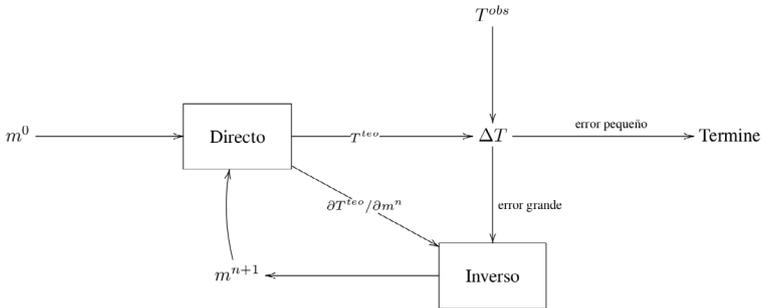


Figura 4.1. Diagrama del método de inversión tomográfica

Pero, ¿dónde interviene la metodología de Diferencias Finitas en este proceso? Se encarga de simular la propagación de la onda sísmica del modelo propuesto mediante la solución de la ecuación de onda. Los tiempos de llegada simulados obtenidos serán comparados con los tiempos de llegada observados y las diferencias permitirán calcular el error y actualizar el modelo.

Asimismo, sería poco práctico utilizar la información de un solo sismo. Se agrega la mayor cantidad de eventos sísmicos en un periodo en la zona. Por cada evento se realiza la metodología explicada anteriormente, de tal manera que el modelo es refinado tanto como sea posible.

El problema consiste en resolver un modelo estructurado principalmente en dos elementos:

- hipocentros - tiempos de origen de N sismos y
- distribución de velocidad de un espacio conformado por L bloques,

a partir de tiempos de llegada de onda P y S adquiridos por M estaciones, los cuales se llamarán tiempos observados.

En resumen, la metodología consiste en:

1. Ingresar un modelo inicial propuesto m^0 y tiempos de llegada de eventos sísmicos observados T_{obs} .
2. Con el algoritmo directo se calculan tiempos simulados o teóricos para obtener posteriormente la sensibilidad del modelo (conocida como matriz de sensibilidad) y los tiempos de llegada teóricos T_{teo} .

3. Se comparan los tiempos teóricos y observados, mediante la medida que indica el error entre ambos. Con esta medida se toma alguna de las siguientes posibilidades:
 - a. Si el error es suficientemente pequeño, el programa termina.
 - b. Si no, se calcula un nuevo modelo m^1 con el algoritmo inverso y se repiten los pasos 2 y 3.

En las siguientes secciones se explica en detalle en qué consiste el algoritmo teórico e inverso. Para esto se comienza con los fundamentos teóricos de la dinámica del subsuelo (sección 2.2), lo cual permite deducir las ecuaciones de movimiento y la solución de la ecuación de onda, con un agregado: fronteras no reflectivas. Enseguida se observa en qué consiste el método de inversión simultánea 4.3. En la sección 4.4.6.2 se valida la metodología y finalmente se aplica mediante un caso de uso: la Cuenca de Urabá (sección 4.4) y se muestran los resultados (sección 4.5).

4.2. Dinámica del subsuelo

Como se explicó anteriormente, es necesario calcular los *tiempos de llegada simulados*. Este tiempo de llegada es calculado mediante la solución de la ecuación de onda por medio de Diferencias Finitas. Enseguida se explicará la base teórica en la cual se sustenta la dinámica del subsuelo. Fundamentalmente, se aplica la segunda ley de Newton a un elemento de volumen, entonces se analizan las fuerzas que actúan sobre este y se aplica la igualdad $F = ma$.

Para empezar, se analizan las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen V , el cual se supone deformable. Sobre este actúan dos tipos de fuerzas: fuerzas de cuerpo y fuerzas superficiales. La *fuerza de cuerpo* es proporcional al volumen del objeto, el ejemplo más conocido es la fuerza de gravedad g , la cual causa que el elemento se desplace. Para eliminar la dependencia de la fuerza con el tamaño del objeto, comúnmente la fuerza de cuerpo se define como la fuerza por unidad de volumen.

El otro tipo de fuerza es la *fuerza superficial o esfuerzo*, esta actúa sobre la superficie del objeto. Del mismo modo, para evitar la dependencia con las dimensiones superficiales del objeto se define como fuerza por unidad de área. El ejemplo más conocido es la fuerza causada por la presión, cuando un objeto está sumergido actúa una fuerza neta proporcional a la superficie en contacto con el fluido. La presión actúa en dirección normal a toda la superficie del objeto y causa que se comprima. Sin embargo, otro tipo de fuerza tiene como resultado cambiar la forma del objeto transversalmente, este esfuerzo no actúa en dirección normal a la superficie, sino en dirección tangencial a esta.

En resumen existen dos tipos de fuerza que actúan en un elemento de volumen: fuerza de cuerpo que causa traslación y fuerza de superficie o esfuerzo que causa deformación. Este último a su vez se divide en dos tipos: esfuerzo en dirección normal y tangencial a la superficie; el esfuerzo normal causa que el elemento se comprima o dilate, mientras el esfuerzo tangencial causa deformación de cizalla.

La notación es la siguiente: la fuerza de cuerpo se denota f_i , donde el subíndice indica la dirección en la cual actúa. Los esfuerzos se denotan σ_{ji} , similarmente, el subíndice i indica la dirección y j la superficie en la cual actúa. Si $i = j$ el esfuerzo es normal y en cualquier otro caso son tangenciales.

Enseguida se observa la deducción de la ecuación de movimiento.

4.2.1. Ecuación de movimiento

En este capítulo no se consideran fuerzas de volumen, en otras palabras, se tienen en cuenta elementos de volumen que solo pueden deformarse.

Considere el elemento con volumen $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ y densidad ρ sometido a esfuerzos en todas sus caras (ver figura 4.2). Aplicando la serie de Taylor, la fuerza que actúa en la dirección x_2 en la cara $dx_1 dx_3$ es:

$$[\sigma_{22}(x + dx_2) - \sigma_{22}(x)] dx_2 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{22}(x)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.1)$$

Similarmente, se obtienen expresiones de las fuerzas que actúan en las caras $dx_2 dx_3$ y $dx_1 dx_2$. La suma de estas expresiones es la fuerza neta en la dirección x_2 . Aplicando la segunda ley de Newton se obtiene:

$$\left[\frac{\partial \sigma_{12}(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}(x)}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial t^2} dx_1 dx_2 dx_3. \quad (4.2)$$

Donde u_2 es la deformación en la dirección x_2 .

Eliminando el factor $dx_1 dx_2 dx_3$ y renombrando cada dirección como x, y, z , se obtiene

$$\frac{\partial \sigma_{xy}(x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(x)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}(x)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_y(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

De manera similar se obtienen las ecuaciones en direcciones x, z .

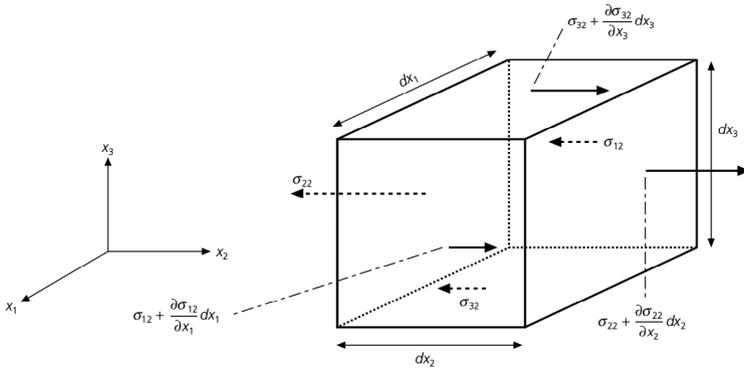


Figura 4.2. Elemento de volumen sometido a esfuerzos
Fuente: Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC (2009a).

Los elementos de volumen tienen comportamiento elástico, entonces de la misma manera que la relación de fuerza y elongación para un resorte, conocida como ley de Hooke ($F = kx$), existen relaciones para esfuerzo y desplazamiento en un medio, llamadas ecuaciones constitutivas. La analogía es sencilla, la fuerza del resorte se sustituye por los esfuerzos, la elongación por las deformaciones y la constante elástica por módulos de elasticidad. Teniendo en cuenta un material isotrópico, se tiene,

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \tag{4.4}$$

donde λ es la *constante de Lamé*, μ es la *rigidez o módulo de cizalla*, δ_{ij} es la función *delta de Kronecker*,

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{4.5}$$

es la dilatación y

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

es el *tensor de deformación*.

Reemplazando la ecuación constitutiva 4.4 en la ecuación de movimiento 4.3, esta última depende explícitamente de u_i . Además u_i se puede expresar en términos de un potencial escalar φ y un potencial vectorial Γ ,

$$u(r, t) = \nabla\varphi(r, t) + \nabla \times \Gamma(r, t). \quad (4.7)$$

Por identidades vectoriales,

$$\nabla \times (\nabla\varphi(r, t)) = 0, \quad (4.8a)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \Gamma(r, t)) = 0. \quad (4.8b)$$

Si además se satisface,

$$\nabla \cdot \Gamma(r, t) = 0, \quad (4.9)$$

la ecuación de movimiento (4.3) tiene las siguientes soluciones:

$$\nabla^2\varphi(r, t) = \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2\varphi(r, t)}{\partial t^2}, \quad (4.10a)$$

$$\nabla^2\Gamma(r, t) = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2\Gamma(r, t)}{\partial t^2}, \quad (4.10b)$$

conocidas como ecuación de onda P (4.10a) y ecuación de onda S (4.10b), con velocidades

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (4.11a)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad (4.11b)$$

respectivamente. Como se puede observar, la velocidad de la onda P es mayor que la velocidad de onda S. Además el desplazamiento del medio producido por la onda P es en dirección longitudinal a la dirección de la onda, mientras que el desplazamiento de la onda S es perpendicular (figura 4.3).

Si para un medio $\lambda = \mu$, aquel es conocido como sólido de Poisson, el cual es una buena aproximación para la Tierra. En tal caso

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{3} \quad (4.12)$$

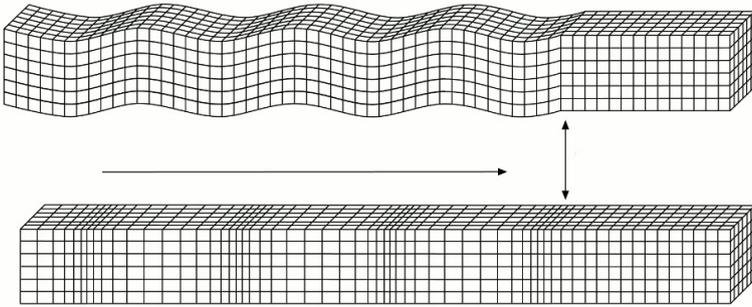


Figura 4.3. Desplazamiento del suelo respecto a la dirección de propagación de onda S y P

Fuente: Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC (2009a).

Enseguida, se detalla la solución de la ecuación de onda por medio del método Diferencias Finitas.

4.2.2. Solución de ecuación de onda por Diferencias Finitas

La ecuación de onda se clasifica como una ecuación diferencial hiperbólica (Franco, Sánchez, Dionicio y Castillo, 2006). En tres dimensiones está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t}(x, y, z, t) - V^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (4.13)$$

en la cual V es la velocidad, la cual depende de coordenadas espaciales y φ es la función de onda sujeta a condiciones de frontera y valor inicial:

$$\varphi(\partial E, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.14a)$$

$$\varphi(E, 0) = f(E), \quad (4.14b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(E, 0) = g(E), \quad (4.14c)$$

donde E es el espacio dominio, ∂E es la frontera de E , además $f(E)$, $g(E)$ son funciones conocidas en todo el dominio.

En coordenadas cartesianas (x, y, z) se seleccionan enteros (i, j, k, n) , de tal manera que

$$(x_i, y_j, z_k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z), \quad (4.15a)$$

$$t_n = n\Delta t. \quad (4.15b)$$

Entonces el espacio y el tiempo están discretizados. Utilizando series de Taylor con aproximación de cuarto orden se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x_i, y_j, z_k, t_n) = \frac{\varphi(x_i, y_j, z_k, t_{n+1}) - 2\varphi(x_i, y_j, z_k, t_n) + \varphi(x_i, y_j, z_k, t_{n-1}))}{\Delta t^2} \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x_i, y_j, z_k, t_n) = \frac{\varphi(x_{i+1}, y_j, z_k, t_n) - 2\varphi(x_i, y_j, z_k, t_n) + \varphi(x_{i-1}, y_j, z_k, t_n))}{\Delta t^2} \quad (4.16b)$$

De manera análoga a (4.16b), se obtiene aproximación de cuarto orden para las coordenadas y y z .

Al reemplazar (4.16) en (4.13), despejar $\varphi(x_i, y_j, z_k, t_{n+1})$ y seguir la nomenclatura propuesta por Cortés y Angelier (2005) se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j,k}^{n+1} = & 2(1 - \Lambda)\varphi_{i,j,k}^n + \Lambda_x^2(\varphi_{i+1,j,k}^n - \varphi_{i-1,j,k}^n) \\ & + \Lambda_y^2(\varphi_{i,j+1,k}^n - \varphi_{i,j-1,k}^n) \\ & + \Lambda_z^2(\varphi_{i,j,k+1}^n - \varphi_{i,j,k-1}^n) - \varphi_{i,j,k}^{n-1}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde

$$\Lambda_s = V\Delta t/\Delta s, \quad (4.18a)$$

$$\Lambda^2 = \Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 + \Lambda_z^2 \quad (4.18b)$$

con $s = \{x, y, z\}$.

La ecuación (4.17) soluciona la ecuación de onda si se conocen los valores en la frontera y las condiciones iniciales. Los elementos de la función de onda en el tiempo $n + 1$ dependen de sus cuatro vecinos más próximos en un tiempo anterior n y del mismo elemento un tiempo posterior $n - 1$.

4.2.3. Condiciones de frontera no reflectiva

Las condiciones de frontera más usadas en la solución de ecuaciones diferenciales parciales son las conocidas como *Dirichlet* o *Neumann*. Estas condiciones de frontera tienen la propiedad de reflejar toda la energía en la frontera. Sin embargo, algunas veces es necesario que la energía no se refleje.

4.2.3.1. Ecuación de onda desacoplada

Hernández (2009) propone un método basado en la Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC (2011), el cual consiste en definir un potencial y descomponer la ecuación de onda, de acuerdo con la formulación de Cortés y Angelier (2005) para los campos electromagnéticos.

La ecuación de onda 4.13 se puede separar en ecuaciones acopladas suponiendo la velocidad V constante. Se define el potencial $H = (H_x, H_y, H_z)$, de manera que

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = V \frac{\partial(\varphi_x + \varphi_y + \varphi_z)}{\partial x} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = V \frac{\partial(\varphi_x + \varphi_y + \varphi_z)}{\partial y} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = V \frac{\partial(\varphi_x + \varphi_y + \varphi_z)}{\partial z} \quad (4.21)$$

Además,

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} = V \frac{\partial H_x}{\partial x} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} = V \frac{\partial H_y}{\partial y} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial t} = V \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (4.24)$$

donde $\varphi = \varphi_x + \varphi_y + \varphi_z$.

Siguiendo el esquema de Cortés y Angelier (2005), se define la siguiente nomenclatura para los índices:

$$r_{Hx} = (i, j + 1/2, k + 1/2), \quad (4.25)$$

$$r_{Hy} = (i + 1/2, j, k + 1/2), \quad (4.26)$$

$$r_{Hz} = (i + \frac{1}{2}, j + 1/2, k), \quad (4.27)$$

$$r_{\varphi} = (i + \frac{1}{2}, j + 1/2, k + 1/2) \quad (4.28)$$

y se definen los operadores de diferencia centrada como:

$$\delta_x U(i, j, k) = U(i + 1/2, j, k) - U(i - 1/2, j, k), \quad (4.29)$$

$$\delta_y U(i, j, k) = U(i, j + 1/2, k) - U(i, j - 1/2, k), \quad (4.30)$$

$$\delta_z U(i, j, k) = U(i, j, k + 1/2) - U(i, j, k - 1/2). \quad (4.31)$$

De acuerdo con (4.25) y (4.29), la discretización de las ecuaciones (4.19) por series de Taylor con error de truncamiento de segundo orden es:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(r_{Hx}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(r_{Hx}) + \Lambda_x \delta_x [\varphi_x^n(r_{Hx}) + \varphi_y^n(r_{Hx}) + \varphi_z^n(r_{Hx})], \quad (4.32)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(r_{Hy}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(r_{Hy}) + \Lambda_y \delta_y [\varphi_x^n(r_{Hx}) + \varphi_y^n(r_{Hx}) + \varphi_z^n(r_{Hx})], \quad (4.33)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(r_{Hz}) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(r_{Hz}) + \Lambda_z \delta_z [\varphi_x^n(r_{Hx}) + \varphi_y^n(r_{Hx}) + \varphi_z^n(r_{Hx})], \quad (4.34)$$

y la discretización para las ecuaciones (4.22) es:

$$\varphi_x^{n+1}(r_{\varphi}) = \varphi_x^n(r_{\varphi}) + \Lambda_x \delta_x \left[H_x^{n+\frac{1}{2}}(r_{\varphi}) \right], \quad (4.35)$$

$$\varphi_y^{n+1}(r_{\varphi}) = \varphi_y^n(r_{\varphi}) + \Lambda_y \delta_y \left[H_y^{n+\frac{1}{2}}(r_{\varphi}) \right], \quad (4.36)$$

$$\varphi_z^{n+1}(r_{\varphi}) = \varphi_z^n(r_{\varphi}) + \Lambda_z \delta_z \left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(r_{\varphi}) \right], \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

Las ecuaciones (4.32) y (4.35) muestran la regla de evolución, además de la relación del potencial y la función de onda con sus vecinos. El espacio se divide

y la función de onda desacoplada queda ubicada en los puntos semienteros, y alrededor el potencial correspondiente quien lo “alimenta”, según sea el caso. Mientras que cada componente del potencial es “alimentado” por toda la función de onda en la dirección correspondiente (figura 4.4).

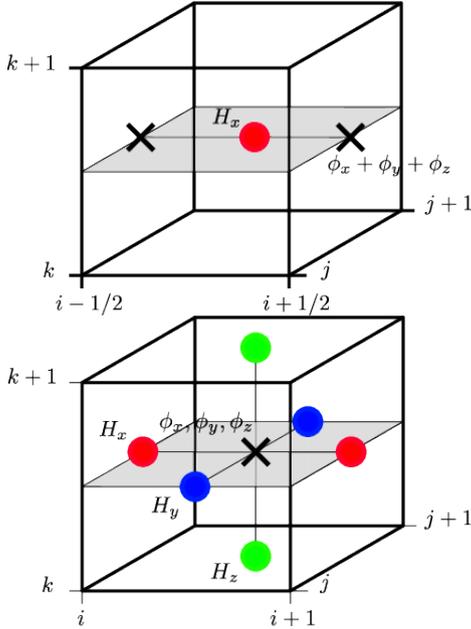


Figura 4.4. Esquema de discretización del espacio para la solución de la ecuación de onda desacoplada. Los círculos representan el potencial H_x (rojo), H_y (azul) y H_z (verde), y la cruz la función de onda. Izquierda: relación de H_x con sus vecinos (suma de las componentes de la función de onda). Derecha: relación de φ_x , φ_y y φ_z con su correspondiente vecino (el potencial según el caso)

4.2.3.2. Factores de atenuación

Supóngase un espacio conformado por un cuboide y encerrado por un cascarón de ancho determinado, definidos como región Interior y PML, respectivamente, la región de contacto se llamará Interfaz (figura 4.5). De tal manera que una onda se propagará libremente en el Interior y será absorbida en la región PML.

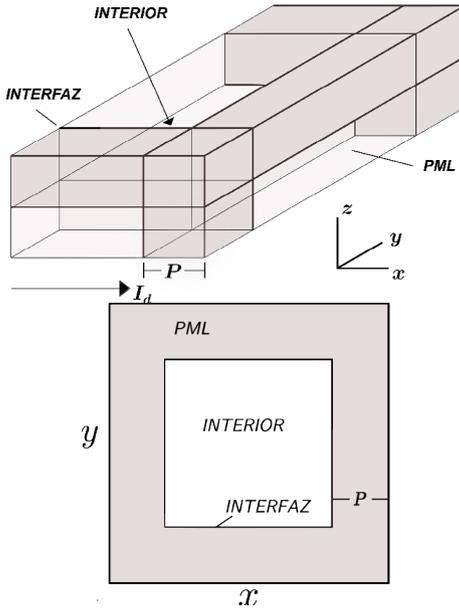


Figura 4.5. Espacio de propagación de la onda. Izquierda: el cuboide es cortado en el eje z y forma un plano. Derecha: la región PML es representada por el color oscuro. Borde superior derecho del cuboide

Para que la atenuación de la onda ocurra, la Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC (2011) propone factores de atenuación Q_{s1} y Q_{s2} en las ecuaciones (4.32) y (4.35), entonces el potencial se redefine como sigue:

$$\begin{aligned}
 H_x^{n+\frac{1}{2}}(r_{Hx}) &= Q_{x1}(i)H_x^{n-\frac{1}{2}}(r_{Hx}) \\
 &\quad + Q_{x2}(i)\delta_x[\varphi_x^n(r_{Hx}) + \varphi_y^n(r_{Hx}) \\
 &\quad + \varphi_z^n(r_{Hx})],
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 H_y^{n+\frac{1}{2}}(r_{Hy}) &= Q_{y1}(j)H_y^{n-\frac{1}{2}}(r_{Hy}) \\
 &\quad + Q_{y2}(j)\delta_y[\varphi_x^n(r_{Hy}) + \varphi_y^n(r_{Hy}) \\
 &\quad + \varphi_z^n(r_{Hy})],
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(r_{Hz}) = Q_{z1}(k)H_z^{n-\frac{1}{2}}(r_{Hz}) + Q_{z2}(k)\delta_z[\varphi_x^n(r_{Hx}) + \varphi_y^n(r_{Hy}) + \varphi_z^n(r_{Hz})], \quad (4.41)$$

y para la función de onda desacoplada:

$$\varphi_x^{n+1}(r_\varphi) = Q_{x1}\left(i + \frac{1}{2}\right)\varphi_x^n(r_\varphi) + Q_{x1}\left(i + \frac{1}{2}\right)\delta_x\left[H_x^{n+\frac{1}{2}}(r_\varphi)\right], \quad (4.42)$$

$$\varphi_y^{n+1}(r_\varphi) = Q_{y1}\left(j + \frac{1}{2}\right)\varphi_y^n(r_\varphi) + Q_{y1}\left(j + \frac{1}{2}\right)\delta_y\left[H_y^{n+\frac{1}{2}}(r_\varphi)\right], \quad (4.43)$$

$$\varphi_z^{n+1}(r_\varphi) = Q_{z1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\varphi_z^n(r_\varphi) + Q_{z1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\delta_z\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(r_\varphi)\right], \quad (4.44)$$

Los factores de atenuación se definen de la siguiente manera:

$$Q_{s1}(\beta) = e^{-q_s(\beta)\Delta tV}, \quad (4.45a)$$

$$Q_{s2}(\beta) = \frac{1 - e^{-q_s(\beta)\Delta tV}}{q_s(\beta)\Delta s}, \quad (4.45b)$$

donde $s = \{x, y, z\}$ y $\beta = \{i, j, k\}$, respectivamente, además

$$q_s(\beta) = \left(\frac{r(\beta)}{P}\right)^4, \quad (4.46)$$

donde P es la longitud de la región PML y $r(\beta)$ es la profundidad desde la Interfaz hacia el borde exterior (figuras 4.5 y 4.6).

4.2.4. Solución completa

En la Interfaz hay un cambio suave entre las dos regiones y la onda es absorbida lentamente dependiendo de la longitud P . Puesto que al calcular el límite en (4.46) cuando $r \rightarrow 0$ se tiene $q \rightarrow 0$. Entonces se obtiene de (4.45) que $Q_{s1} \rightarrow 1$ y $Q_{s2} \rightarrow \Delta s$, de esta manera se reproducen las mismas ecuaciones (4.32) y (4.35).

Entonces, en el Interior se usa la solución por Diferencias Finitas estándar (ecuación 4.17), al redefinir los índices siguiendo el esquema de Cortés y Angelier (2005),

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1}(r_\varphi) = & 2(1 - \Lambda^2)\varphi^n(r_\varphi) + \Lambda_x^2\delta_x\varphi^n(r_\varphi) + \Lambda_y^2\delta_y\varphi^n(r_\varphi) \\ & + \Lambda_z^2\delta_z\varphi^n(r_\varphi) - \varphi^{n-1}(r_\varphi), \end{aligned} \quad (4.47)$$

en la región PML se emplea la solución de la ecuación de onda desacoplada [ecuaciones (4.39) y (4.42)] y en la Interfaz la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(I_d, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) & \\ = Q_{x1}(I_d)H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(I_d, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) & \\ + Q_{x2}(I_d)\left[\varphi_x^n\left(I_d + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)\right. & \\ + \varphi_y^n\left(I_d + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) & \\ + \varphi_z^n\left(I_d + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) & \\ \left. - \varphi^n\left(I_d - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)\right] & \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde I_d es el valor que toma el índice i en la interfaz derecha (figura 4.5). De manera similar se obtiene la ecuación del potencial H_x en la interfaz izquierda y para los demás potenciales H_y y H_z .

En otras palabras, en la región PML existe el potencial y la función de onda desacoplada, en la Interfaz existe el potencial y en el Interior únicamente la función de onda (figura 4.6)

En las fronteras más externas se pueden utilizar las condiciones de Dirichlet (ecuación 4.14a) o Neumann.

Aquí finalizan los fundamentos del algoritmo directo. Enseguida se estudia el algoritmo inverso.

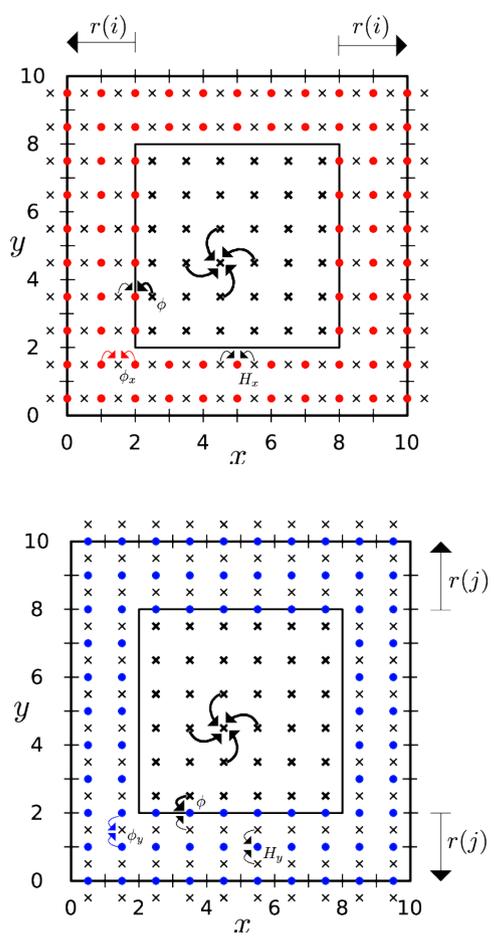


Figura 4.6. Corte en el eje z del cuboide para la solución completa de la propagación de onda con fronteras no reflectivas. Los círculos representan H_x (rojo) y H_y (azul), mientras las cruces representan ϕ_x , ϕ_y y ϕ (cruz en negrilla). Además las flechas simbolizan cuál vecino alimenta cada término y $r(\beta)$ es la profundidad de la región PML desde la Interfaz hasta el borde. Izquierda: discretización para ϕ_x y H_x . Derecha: discretización para ϕ_y y H_y

4.3. Inversión simultánea

Desde los años sesenta se ha hecho un esfuerzo por localizar sismos. González (2008) utilizó la red sismológica global (WWSSN) para localizar sismos en el mundo, mientras Graterol (2006) seleccionó áreas locales con sus respectivas redes sismológicas para hacer lo mismo a una escala más pequeña. Sin embargo, observaron que eran necesarias tan solo cuatro estaciones para realizar la inversión del hipocentro y tiempo de origen de cada evento sísmico. El exceso de datos podría en efecto ofrecer información acerca del subsuelo de la Tierra.

Para invertir simultáneamente la estructura de velocidad, los hipocentros y el tiempo de origen, Berenger (1994) investigó el problema en una dimensión e independientemente Berenger (1996) publicó el método de inversión en tres dimensiones. De esta manera, se generalizó el método de inversión de hipocentros y tiempo de origen agregando la inversión de velocidades. Enseguida se observa en qué consiste el método.

4.3.1. Metodología de inversión simultánea

Se suponen N sismos ($j = 1, \dots, N$) cuyos hipocentros están dados por $x_j =$ longitud, $y_j =$ latitud y $z_j =$ profundidad, además el tiempo de origen t_j .

El espacio se divide en L bloques indexados por $l = 1, \dots, L$, cada bloque tiene velocidad V_l . Entonces el modelo incógnita m^0 por resolver es:

$$m^0 = (x_1^0, y_1^0, z_1^0, t_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0, z_n^0, t_n^0, V_1^0, \dots, V_L^0), \quad (4.49)$$

El número de elementos de m^0 es $4n + L$.

Para encontrar m^0 se tienen M estaciones ($k = 1, \dots, M$), con la posición x_k, y_k, z_k y el tiempo de llegada observado en la k – ésima posición por el j – ésimo sismo.

Existe una relación funcional $T(m^0)$ que permite reproducir los tiempos observados de acuerdo con el modelo m^0 . Suponiendo que esta relación es lineal, se define la matriz de sensibilidad. Esta matriz contiene elementos que representan la variación del tiempo con cada uno de los elementos del modelo $(\partial T_{jk} / \partial m)$, la cual tiene la siguiente forma:

$$G = \left(\begin{array}{cccccc|c} A_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & A_2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & A_j & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & A_N & \end{array} \right) C, \quad (4.50)$$

Las columnas de G representan los elementos del modelo, y sus filas los tiempos de llegada. Está compuesta por las submatrices A_j y C . Por su parte, A_j representa la variación de los tiempos de llegada en cada estación con respecto a variaciones de la posición de la fuente y el tiempo de origen del sismo j –ésimo. Como el cambio de la posición o el tiempo de origen de cierto sismo no afectan los tiempos de llegada de otro, entonces G es semidiagonal en la parte que es compuesta por A_j (ecuación 4.50). La dimensión de A_j es $M \times 4$ y está dada por:

$$A_j = \begin{pmatrix} \partial T_{j1} / \partial x_1 & \partial T_{j1} / \partial y_1 & \partial T_{j1} / \partial z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial T_{jk} / \partial x_k & \partial T_{jk} / \partial y_k & \partial T_{jk} / \partial z_k & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial T_{jM} / \partial x_M & \partial T_{jM} / \partial y_M & \partial T_{jM} / \partial z_M & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

C representa la variación de los tiempos de llegada con respecto a la variación de cada bloque de velocidad. A diferencia de A_j es posible que el cambio de la velocidad de un bloque afecte los tiempos de llegada de todos los sismos. La dimensión de C es $NM \times L$ y está dada por:

$$C_{il} = \delta_{jkl} \partial T_{jk} / \partial V_l \quad (4.52)$$

con $i(j, k) = k + (j - 1)M$ y

$$\delta_{jkl} = \begin{cases} 1, & \text{si el bloque } l \text{ es penetrado por el rayo del sismo } j \text{ que llega a la estación } k \\ 0, & \text{si no es penetrado} \end{cases}$$

Con una aproximación de primer orden o lineal, la matriz de sensibilidad relaciona los tiempos observados y el modelo

$$\Delta T(m) = G\Delta m. \quad (4.53)$$

Para hallar m de (4.53) es necesario invertir G , pero esta matriz no es necesariamente cuadrada. Para despejar m se utiliza el método de los mínimos cuadrados (Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC, 2009a) y la ecuación (4.53) se transforma en:

$$G^T \Delta T = G^T G \Delta m, \quad (4.54)$$

cuya solución es

$$\Delta m = (G^T G)^{-1} G^T \Delta T, \quad (4.55)$$

en la cual ΔT es la variación entre el tiempo observado y el teórico,

$$\Delta T = T_{obs} - T_{teo} \quad (4.56)$$

el error entre ambos tiempos se calcula de la siguiente manera:

$$Error = \sqrt{\sum_{k=1}^M \Delta T_k} \quad (4.57)$$

cuyo valor normalizado se define como:

$$Error_n = \frac{Error}{NM} \quad (4.58)$$

Δm es la variación del modelo, entonces

$$\Delta m^{i+1} = (G^T G)^{-1} G^T \Delta T^i + m^i \quad (4.59)$$

El método iterativo consiste en proponer un modelo inicial m^0 , con el cual se halla el tiempo teórico y enseguida la diferencia con el tiempo observado, es decir ΔT^0 (ecuación 4.56). Ahora se halla un nuevo modelo m^1 por medio de la ecuación (4.59) y se repite el proceso hasta que el error sea mínimo (ecuación 4.58).

Para encontrar G se aproximan las derivadas mediante series de Taylor hasta el primer orden, entonces

$$\frac{\partial T_{jk}(m)}{\partial m} = \frac{T_{jk}(m + \Delta m/2) - T_{jk}(m - \Delta m/2)}{\Delta m} \quad (4.60)$$

El problema se reduce a encontrar los tiempos teóricos y reemplazarlos en las ecuaciones (4.56 y 4.60), los cuales pueden ser hallados por trazado de rayos o resolviendo la ecuación de onda por Diferencias Finitas. En el presente trabajo se utilizarán Diferencias Finitas.

4.3.2. Matriz inversa generalizada

La matriz $G^T G$ puede tener determinante nulo, en tal caso la matriz no tiene inversa, el sistema de ecuaciones (4.55) no tiene solución única y existe al menos un valor propio nulo. Como lo prueba Yee (1966) existe un método para obtener el subespacio solución de mayor dimensión posible, conocido como descomposición de Lanczos. El método consiste en descomponer G mediante matrices construidas con valores propios diferentes de cero. La inversa generalizada encontrada por este método ajusta mejor los datos con el modelo encontrado. Sin embargo, para aplicaciones reales, el método es costoso computacionalmente por las matrices grandes; además, por la incertidumbre de los datos existe dificultad para ordenar formalmente los valores propios diferentes de cero porque hay algunos que son muy pequeños y se podrían considerar como nulos.

Para evitar el determinante cero de la matriz $G^T G$, se añade una matriz de peso al modelo y el sistema (4.55) se modifica de la siguiente manera:

$$\Delta m = (G^T G + \varepsilon^2 W_m)^{-1} G^T \Delta T \quad (4.61)$$

donde ε se conoce como factor de amortiguación, si ε aumenta, la curva de error en función de las iteraciones presenta menor número de oscilaciones. Este factor se encuentra de manera empírica, de tal manera que se obtenga un buen ajuste de los datos teóricos y observados y que las variaciones del modelo en cada iteración sean pequeñas. La matriz W_m en el más simple de los casos es la matriz identidad.

Si se quiere que el modelo de velocidad cambie suavemente en el espacio, se define la matriz de suavizado D (Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC, 2009a). Para una geometría 3D, compuesta por un rectángulo con número de bloques $L = L_x \times L_y \times L_z$, el número de columnas para D es L y presenta la siguiente forma:

$$D = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

donde las submatrices D_x , D_y y D_z representan la primera derivada en direcciones x , y y z , con número de filas $(L_x - 1)L_y L_z$, $L_x(L_y - 1)L_z$ y $L_x L_y (L_z - 1)$, respectivamente.

Como el suavizado solo se aplica a la distribución de velocidad, se desea que el modelo de hipocentros y tiempos de origen no sean afectados, entonces

$$W_m = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D^T D \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

en la que I es la matriz identidad con dimensión $4N \times 4N$.

D_x , D_y y D_z están compuestas por submatrices B_x , B_y y B_z definidas así:

$$D_x = \begin{pmatrix} B_x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B_x \end{pmatrix}_{(L_x-1)L_y L_z \times L}, \quad (4.64a)$$

$$D_y = \begin{pmatrix} B_y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B_y \end{pmatrix}_{L_x(L_y-1)L_z \times L}, \quad (4.64b)$$

$$D_z = (B_z)_{L_x L_y (L_z-1) \times L}, \quad (4.64c)$$

donde,

$$B_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}_{(L_x-1) \times L_x}, \quad (4.65a)$$

$$B_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{L_x(L_y-1) \times L_x L_y}, \quad (4.65b)$$

En general, la forma de B_x , B_y y B_z es la misma, la diferencia es la separación de columnas entre -1 y 1 . Para el caso de B_x no hay separación, para B_y la separación es L_x , mientras que para B_z la separación es $L_x L_y$.

4.4. Caso de uso: Cuenca de Urabá

El método de inversión simultánea por medio de la solución de la ecuación de onda es aplicado en la Cuenca de Urabá. Enseguida se muestra el desarrollo del modelo en esta región.

4.4.1. Información

Para este estudio se utilizaron dos redes sísmológicas: Red Sísmológica de Urabá (RSU) compuesta por 18 estaciones y un subconjunto de 4 estaciones de la Red Sísmológica Nacional de Colombia (RSNC). Además, los eventos sísmicos fueron determinados por la RSU y complementados por la RSNC.

Las estaciones de la RSU miden el tiempo de llegada de los sismos de manera relativa, es decir, no se encuentran sincronizadas con el reloj mundial, por tal motivo se calcula la diferencia entre tiempo de llegada de onda S y P.

Sin embargo, las estaciones CAP, DBB, HEL, SOL (pertenecientes a la RSNC) (tabla 4.1) están sincronizadas con el reloj mundial y sirven para calibrar las estaciones RSU, entonces se miden el tiempo de llegada de onda P para estas cuatro estaciones.

Por tanto, los tiempos observados corresponden a:

- diferencia de tiempo de llegada $T_{SP} = T_S - T_P$ para las estaciones RSU y RSNC,
- tiempo de llegada T_P para las estaciones RSNC.

De esta manera se obtuvieron los tiempos observados de 54 sismos. El objetivo ahora es encontrar el mejor modelo que los represente. Para esto se inicia con un modelo de velocidades sencillo y sucesivamente se hace más complejo.

4.4.2. Modelos

Enseguida se observan los modelos desde el más simple al más complejo, en los cuales cada resultado parcial será el modelo inicial para el siguiente modelo:

- **Modelo con velocidad homogénea:** para empezar, se supone que el subsuelo se compone por una velocidad homogénea y todos los hipocentros (origen espacial y temporal) ubicado en el mismo punto. Este modelo ubicará los hipocentros en sus posiciones más próximas y limitará las dimensiones espaciales de la región considerada
- **Modelo de velocidad con variación en profundidad:** el segundo modelo se propone dependiente únicamente de la profundidad, esto porque generalmente la velocidad es más sensible respecto a esta dimensión, es decir, la inversión tiene libertad para buscar la solución variando la profundidad, pero no la lateralidad.
- **Modelo de velocidad con variación 3D:** finalmente se permite la variación de la velocidad con libertad en tres dimensiones, tanto en profundidad como en lateralidad.

Aumentando progresivamente los grados de libertad del modelo, se pretende determinar el mejor modelo que ajuste los tiempos de arribo observados. Con cada paso se consigue un resultado parcial, hasta obtener un modelo de distribución de velocidad 3D. Los modelos son:

- Modelo con velocidad homogénea.
- Modelo de velocidad con variación en profundidad.
- Modelo de velocidad con variación 3D.

Nombre	Código	Latitud (°)	Longitud (°)	Altura (m)
Acandí	ACA	-77.278	8.529	8
Currulao. La Arena	ARE	-76.610	8.013	83
Capurganá*	CAP	-77.359	8.646	229
Alto Carepa	CAR	-76.484	7.771	685
Changas. Antena Comcel	CHA	-76.578	8.552	191

Nombre	Código	Latitud (°)	Longitud (°)	Altura (m)
Cocos	COC	-76.379	7.411	104
Cerros del Cuchillo	CUC	-76.877	7.483	71
Dabeiba*	DBB	-76.210	7.017	756
Tumar. Cerros El Cuarenta	EL4	-76.960	7.635	125
El Gilgal	GIL	-77.090	8.203	21
Sierra Alta La Guajira	GUA	-76.090	8.116	104
Santa Helena*	HEL	-75.554	6.191	2815
Jurado Alto	JUR	-76.554	7.538	129
Santa Catalina. Loma Linda	LOL	-76.355	8.437	149
Alto Mulatos	MUL	-76.561	8.143	531
Nueva Antioquia	NAN	-76.510	8.044	205
Punta Piedras	PPI	-76.445	8.118	87
Apartadó Primavera	PRI	-76.601	7.889	122
Bahía Solano*	SOL	-77.409	6.227	38
San Pedro. Vereda Pueblito	SPD	-76.347	8.262	292
Trigana. Camino Comunitario	TRI	-77.129	8.375	39
Unguía. Antena Comcel	UNG	-77.113	8.026	57

Tabla 4.1. Estaciones sismológicas utilizadas para el estudio.
Las estaciones marcadas con * pertenecen a la RSNC

El modelo propuesto, como cualquier otro, tiene limitaciones. Las principales son:

1. No se modela toda la superficie terrestre porque principalmente el costo computacional sería muy alto, por tanto se establecen límites espaciales.
2. No se considera una grilla de velocidades continua, por dos razones: el costo computacional sería muy alto y la información disponible observada permite caracterizar un límite de incógnitas. Entonces se modela un cuboide discreto conformado por L cubos del mismo tamaño.
3. El modelo pierde resolución con la profundidad, esto porque las estaciones se encuentran instaladas en superficie.

En las próximas secciones se detallan cada una de estas limitaciones:

4.4.3. Límites espaciales

Los límites del espacio del modelo por encontrar consisten en un cuboide con altura h_z , ancho h_x con orientación *Oeste-Este* y largo h_y con orientación *Sur-Norte* (figura 4.7), el cual representa una parte del suelo y subsuelo de la Cuenca de Urabá. En este espacio los hipocentros de los sismos, las estaciones y los bloques de velocidad deben ubicarse. Así, h_x y h_y están dados por la ubicación de las estaciones y epicentros de los sismos (proyección superficial de los hipocentros), mientras que h_z está limitada por la distribución de sismos.

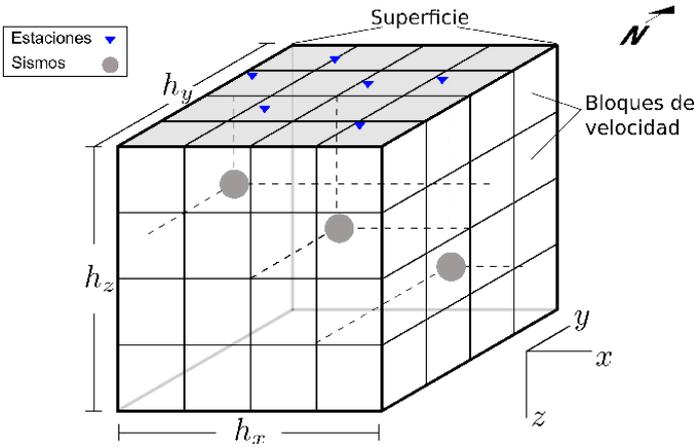


Figura 4.7. Límites espaciales del modelo. Consiste en un cuboide el cual se divide en L bloques y contiene N sismos y M estaciones

4.4.4. Cantidad máxima de elementos del modelo

También existe límite para el número de elementos del modelo de acuerdo con la información disponible. Con los eventos sísmicos ($N = 54$), se determinaron 403 tiempos observados (número de ecuaciones), incluyendo tiempos de llegada de onda $P(T_p)$ y diferencia de tiempo de llegada de onda S y $P(T_{Sp})$. Para que la convergencia de la inversión generalizada tenga mejor ajuste correspondiente a la información observada, el número de ecuaciones no puede sobrepasar el número de incógnitas (de lo contrario, se pueden obtener soluciones no esperadas). Las incógnitas son los elementos del modelo, de los cuales por cada

evento sísmico hay cuatro (ubicación x , y , z del hipocentro y tiempo de origen), es decir

$$4 \times N = 216$$

Lo cual reduce la cantidad de bloques por considerar

$$403 - 4 \times N = 187$$

Entonces el número máximo de bloques es 187.

Si h_x , h_y y h_z se dividen en L_x , L_y y L_z intervalos, se forma una grilla con $L = L_x L_y L_z$ bloques en total, de tal manera que

$$L = L_x L_y L_z < 187$$

4.4.5. Incertidumbre de la velocidad con la profundidad

Además, una última limitación es la incertidumbre de la velocidad con la profundidad. Se define como rayo la trayectoria entre el hipocentro y la estación de acuerdo con el principio de Fermat (el trayecto seguido por un frente de onda al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es un mínimo). A mayor profundidad, menor densidad de rayos, entonces los cubos más profundos tienen menor posibilidad de ser atravesados por un rayo y por tanto mayor será su incertidumbre en velocidad.

4.4.6. Validación del algoritmo

Se debe tener en cuenta que un modelo es una representación de la realidad y, más aún, la aplicación numérica del método Diferencias Finitas a la ecuación de onda es una aproximación a su solución. Además, el método de inversión generalizada asume que los tiempos de llegada dependen del modelo como una función linealmente discretizada. Entonces, como vemos, tenemos tres aproximaciones para resolver el problema tomográfico.

Por tal motivo es necesario realizar algunas validaciones que nos permitan confiar en los resultados que la metodología ofrece. En la figura 4.1 se observan dos algoritmos importantes: el directo y el inverso, de tal manera que se realiza la validación de ambos en esta sección. Por otra parte, se validará el modelo completo posteriormente, dado que se requiere introducir el caso de estudio específico para tener en cuenta los límites de este.

4.4.6.1. Validación del algoritmo directo

El algoritmo directo consiste en calcular el tiempo de llegada de una onda sísmica (T_{dir}), la cual se propaga desde la fuente I hasta la estación k . Este valor se agrega al tiempo de origen del sismo (T_f) y se obtiene el tiempo teórico de onda P ,

$$T_P^{teo} = T_{dir} + T_f \quad (4.66)$$

El tiempo teórico de onda S se calcula suponiendo que las velocidades de onda S y P son proporcionales en todo el medio y se comporta como $\sqrt{1}$ un sólido de Poisson (ecuación 4.12), con constante de proporcionalidad $\alpha = \sqrt{3}$. Entonces se tiene $T_S^{teo} = \alpha T_{dir} + T_f$ y la diferencia de tiempos de llegada de ondas S y P es

$$T_{SP}^{teo} = (\alpha - 1)T_{dir} \quad (4.67)$$

Como la posición de las estaciones son fijas, T_{dir} depende de la distribución de velocidad y el hipocentro del sismo. Por tanto T_P^{teo} es la única variable que depende del tiempo de origen.

Para hallar T_{dir} se propaga la onda en un medio 3D (ecuación 4.47) por el método de Diferencias Finitas y usando fronteras no reflectivas. Además, es necesario construir una región donde se pueda realizar la prueba. Esta consiste en un ortoedro con dimensiones $100 \text{ km} \times 40 \text{ km} \times 40 \text{ km}$ y velocidad $V_p = 5 \text{ km/s}$. Asimismo se requieren estaciones simuladas en superficie, por lo cual se agregaron 7 de estas nombradas con las letras A hasta la G, respectivamente, y separadas 10 km en dirección x comenzando desde $x = 20 \text{ km}$. Por último se requiere una fuente sísmica, la cual se ubicó bajo la superficie en la posición $(10, 20, 20) \text{ km}$. En la figura 4.9 se observa la vista de planta de la simulación.

Por otro lado, el evento sísmico consiste en un pulso cuya forma está dada por la función Ricker. Esta función es implementada como fuente de propagación de onda en diversos estudios por sus características: la función derivada no cambia bruscamente y presenta una rápida convergencia hacia cero. La función Ricker no es única, son una familia de funciones. Para seleccionar la apropiada se recomienda realizar pruebas y seleccionar aquella cuyo costo computacional sea el más bajo posible sin perjudicar la estabilidad del algoritmo. En el presente documento se escogió la función de la figura 4.8. Enseguida se muestra la función:

$$\phi(r_0, t) = (-6 + 24t^2 - 8t^4)e^{-t^2} \quad (4.68)$$

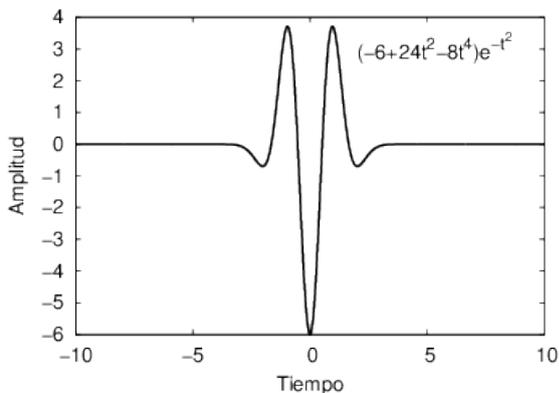
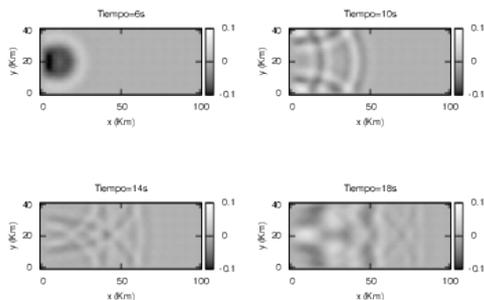


Figura 4.8. Forma de función Ricker usada para simular la fuente sísmica

Enseguida se muestra la propagación de la onda usando fronteras no reflectivas. Mientras las condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann reflejan gran parte de la energía, lo cual puede influir en la adquisición del tiempo de llegada teórico. El método de fronteras no reflectivas PML permite que la onda sea absorbida en los límites de la región y de esta manera se consigue simular la propagación infinita de esta (figura 4.9).

Cada estación registra la amplitud en función del tiempo simulando el funcionamiento de un sismógrafo y de esta manera se obtiene un sismograma sintético. Usando fronteras no reflectivas el sismograma es mucho más limpio, elimina información irrelevante y disminuye el riesgo de fallar en la determinación del tiempo de llegada (figura 4.10).



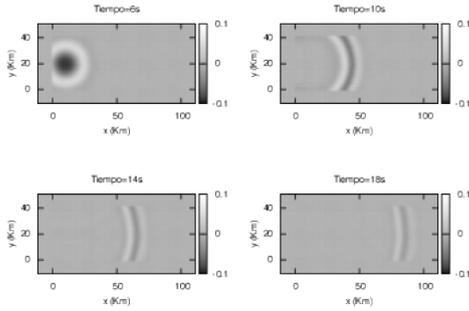
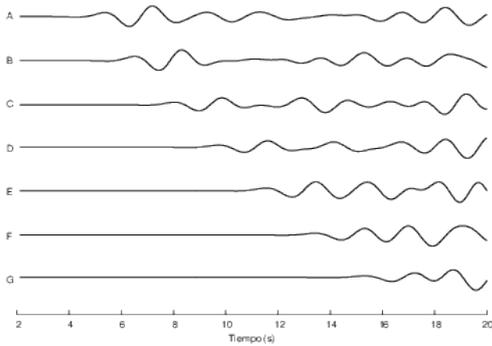


Figura 4.9. Comparación de propagación de onda sin y con PML. Corte del plano en $z = 0$ km. Izquierda: propagación de onda sin PML. Derecha: propagación de onda con PML



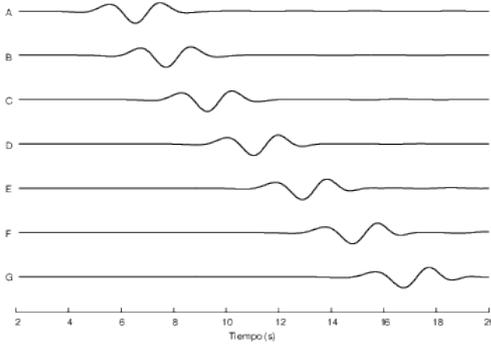


Figura 4.10. Comparación de sismograma sintético con y sin PML, figura inferior y superior, respectivamente. Izquierda: sismograma sintético sin PML. Derecha: sismograma sintético con PML

Ahora bien, ya se observó que la propagación de la onda es plausible. Sin embargo, queda la duda: ¿los tiempos de llegada simulados y registrados por cada estación son los correctos? Si es así, deben reproducir correctamente la velocidad de onda V del medio. Por tanto, se procede a formular el tiempo de llegada de la onda:

$$T_p = \frac{\sqrt{(x - 10)^2 + z^2}}{V} \quad (4.69)$$

donde x es la coordenada horizontal de las estaciones y z es la profundidad de la fuente sísmica.

Ordenando la ecuación (4.69) se obtiene

$$(x - 10)^2 = V^2 T_p^2 - z^2 \quad (4.70)$$

Al tomar como variable dependiente $(x - 10)^2$ e independiente T_p^2 (valores obtenidos a partir del sismograma sintético 4.10). Como se puede observar, la ecuación 4.70 representa una línea recta con pendiente V^2 e intercepto $-z^2$, cuyo resultado se muestra en la figura 4.11.

Los resultados se muestran en la tabla 4.2. Se obtuvo un error de 1 % para el cálculo de profundidad y 0.6 % para la velocidad. Lo cual quiere decir que el algoritmo directo presenta un buen comportamiento.

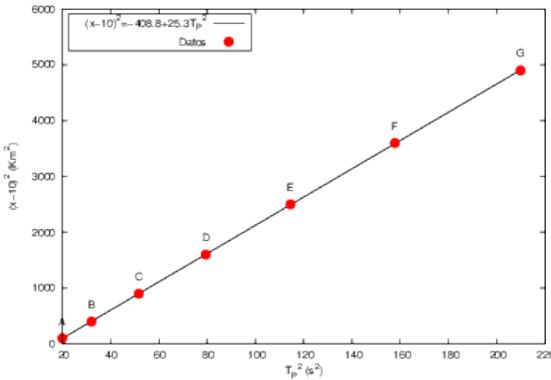


Figura 4.11. Tiempo de llegada picado para el sismograma de la figura (4.10) y linealización de datos usando la ecuación (4.70)

	Velocidad (km/s)	Profundidad (km)
Esperada	5	20
Calculada	5.03	20.22
Error	0.6 %	1 %

Tabla 4.2. Diferencia entre datos observados y esperados de velocidad y profundidad utilizando el algoritmo directo para un medio con velocidad homogénea

4.4.6.2. Validación del algoritmo inverso

Para la validación del algoritmo inverso, de forma histórica se propone un reto probablemente imposible de encontrar en la naturaleza geológica estructural, pero si se demuestra que el método de inversión propuesto logra superarlo, este se convierte en un excelente candidato para resolver cualquier otra estructura. La estructura para invertir consiste en una región distribuida con velocidades intercaladas, como un “ajedrez”. En este caso se construye un cuboide con

dimensiones $48 \text{ km} \times 48 \text{ km} \times 48 \text{ km}$, la cual contiene una grilla de 64 bloques, cada uno caracterizado por velocidad 5.5 km/s o 6.5 km/s . Además, en cada bloque se sitúa una fuente sísmica en el centro. Finalmente, se simulan 16 estaciones sísmográficas en el centro de la cara superior de los bloques superficiales, en la figura 4.12 se observa el modelo sintético completo que debe ser invertido.

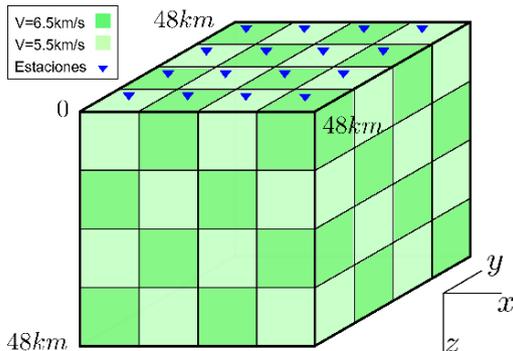


Figura 4.12. Modelo sintético que contiene 64 bloques con velocidad intercalada, 16 estaciones en la superficie y 64 sísmos en el centro de cada bloque

Utilizando el algoritmo directo se simulan los eventos sísmicos y se determinan los tiempos de llegada para cada uno, estos tiempos son denotados como T_{obs} .

El algoritmo inverso requiere ser iniciado con un modelo como punto de partida, entonces se propone un modelo con velocidad uniforme cuya velocidad es 5 km/s e hipocentros situados en el centro de la región, es decir $(24, 24, 24) \text{ km}$ (figura 4.13). Dado que se encuentra muy alejado de la solución, el error inicial es grande, alrededor de 0.024 , calculado a partir de la ecuación 4.57 pero después de 69 iteraciones el error converge (figura 4.14) obteniendo finalmente el resultado de inversión, el modelo inverso.

Al comparar ambos modelos: el sintético (figura 4.12) y el inverso (figura 4.17), descriptivamente se observa que la diferencia entre ambos es pequeña en la superficie, pero grande en la parte más profunda y más aún en las esquinas (figura 4.16), lo cual es de esperar dado que la información observada en superficie es poco sensible al cambio de los bloques más profundos.

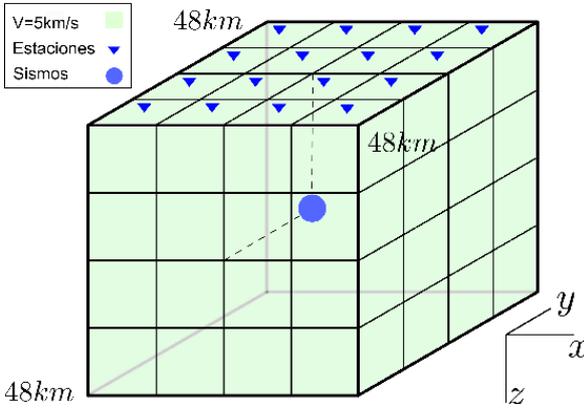


Figura 4.13. Modelo inicial para validar programa de inversión. Los 64 sismos se ubican en el centro de la región y la velocidad es uniforme con un valor de 5km/s

Dado el error de localización de los sismos, se observa que esté pequeño en superficie, pero aumenta a mayor profundidad (figura 4.15), similarmente a los resultados obtenidos con la distribución de velocidad.

Estos resultados son explicados de la siguiente manera: un bloque profundo tiene menor oportunidad de ser muestreado por la onda de algún sismo, entonces tiene menor contribución en la solución de la inversión. Por tanto, un sismo profundo está sujeto a tener error de localización más grande por error de la determinación de la velocidad de un bloque profundo.

Esta validación nos permite observar la primera limitación de la tomografía sísmica a partir de estaciones sismológicas superficiales, la pérdida de resolución con la profundidad. Sin embargo, este hecho es de esperar y se debe prestar atención cuando se interprete la solución aplicada en un estudio de caso.

Alejandro Duitama Leal, José J. Fredy González V.,
Héctor Javier Hortúa y Leonardo D. Donado E.

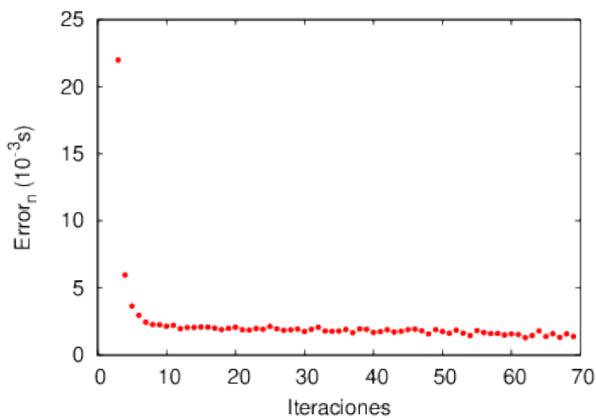
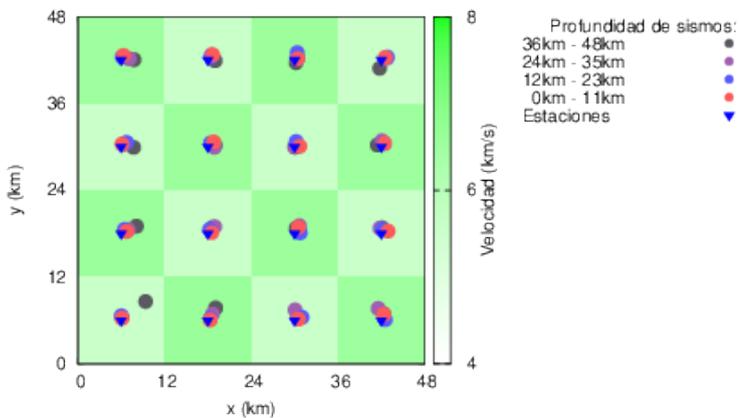


Figura 4.14. Error normalizado del modelo en función de las iteraciones



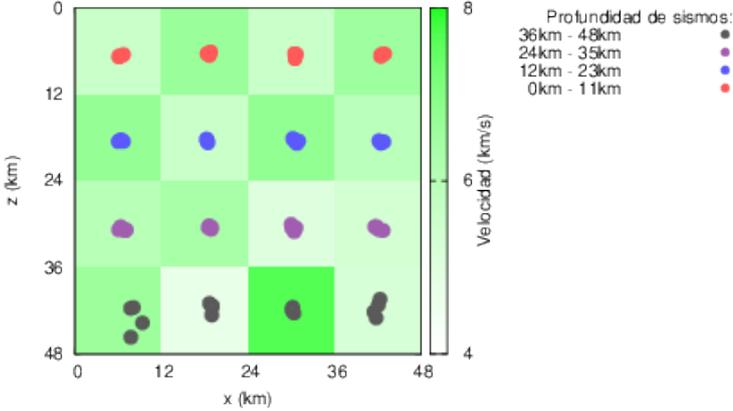


Figura 4.15. Modelo final para validar el programa de inversión. Localización de sismos y distribución de velocidad en diferentes perspectivas. Error normalizado del modelo en función de las iteraciones. Arriba: proyección hacia la superficie ($z = 0$ km). Abajo: proyección lateral ($y = 0$ km)

4.5. Resultados de los modelos

Una vez se tienen presentes las limitaciones de los modelos, se procede a evaluar sus resultados. Para empezar, se cambia el sistema de coordenadas y enseguida se muestran los resultados de cada modelo.

El presente estudio es local, por tanto es adecuado trabajar con coordenadas planas. Por la ubicación de la zona, el origen de coordenadas utilizado es West (x_{West}, y_{West}). Además, por comodidad se hace la siguiente transformación de coordenadas:

$$x = \frac{x_{West}}{1000} - 1000 \quad (4.71a)$$

$$y = \frac{y_{West}}{1000} - 3000 \quad (4.71b)$$

En la cual x e y tienen unidades SI .

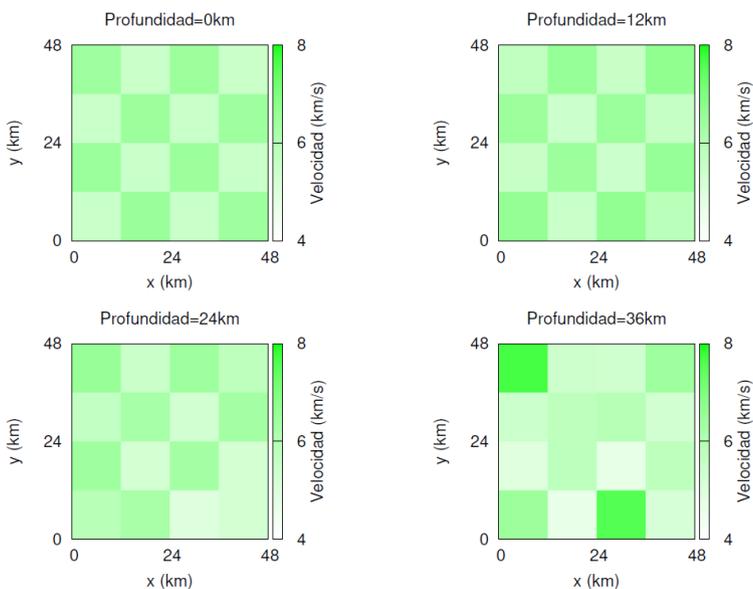


Figura 4.16. Modelo final para validar el programa de inversión. Distribución de velocidad para diferentes profundidades

4.5.1. Modelo con velocidad homogénea

Con el fin de que ninguna estación quede fuera de la región y teniendo en cuenta el historial sísmico de la región, se construyó un espacio con los siguientes intervalos:

$$x = [-100, 175] \text{ km}$$

$$y = [-125, 165] \text{ km}$$

$$z = [-3, 100] \text{ km}$$

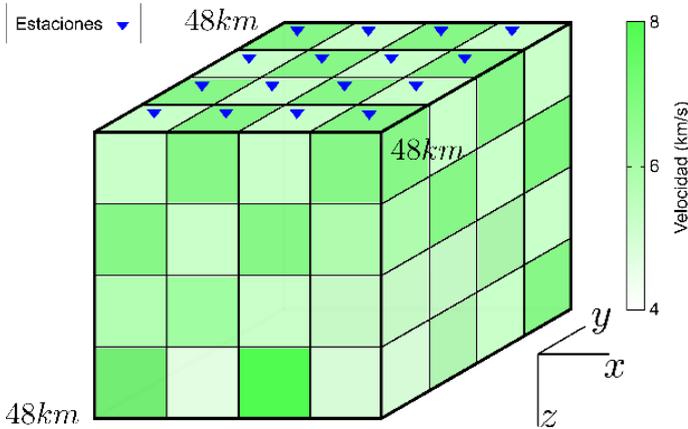


Figura 4.17. Modelo final para validar el programa de inversión. Visualización 3D de distribución de velocidad

El modelo inicial se considera de la manera más sencilla posible, con velocidad homogénea $V_p = 5$ km/s y los 54 sismos ubicados en el centro del espacio, de manera análoga como se hizo el modelo inicial para validar el programa de inversión (figura 4.13). Además, se toma como tiempo de origen aquel menor tiempo de llegada de onda P de acuerdo con el registro de las estaciones RSNC.

Se aplicó el programa de inversión con $\varepsilon = 0,01$, después de 20 iteraciones el error no cambió significativamente (figura 4.18) y los hipocentros fueron ubicados. Hay mayor densidad de sismos en la región suroeste, con mayor tendencia hacia la superficie (figuras 4.19 y 4.20).

A partir del histograma de profundidad (figura 4.20) el eje z se divide en 5 partes, cada una con 19 km de espesor. La parte más profunda entre 76 km y 95 km tiene muy baja densidad de sismos, entonces será descartada en el estudio.

Finalmente, la velocidad obtenida es 5.92 km/s, la cual puede considerarse como el promedio en la región.

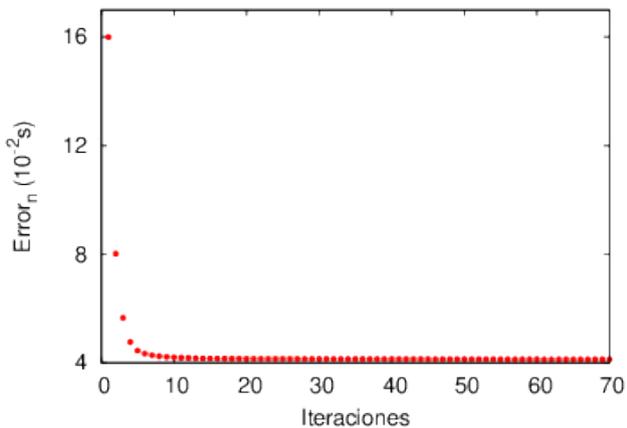
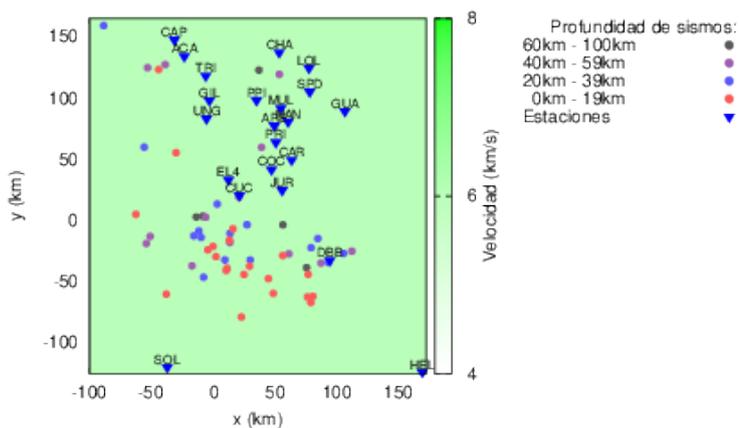


Figura 4.18. Error normalizado del modelo en función de las iteraciones para el modelo de velocidad homogénea



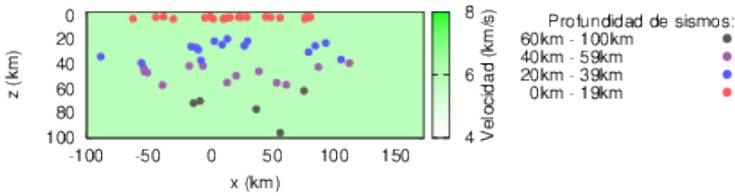


Figura 4.19. Localización de sismos aplicando el modelo de velocidad homogénea con proyección superficial y sobre el perfil este-oeste. Arriba: superficial ($z = 0$ km). Abajo: perfil este-oeste sobre $y = -125$ km

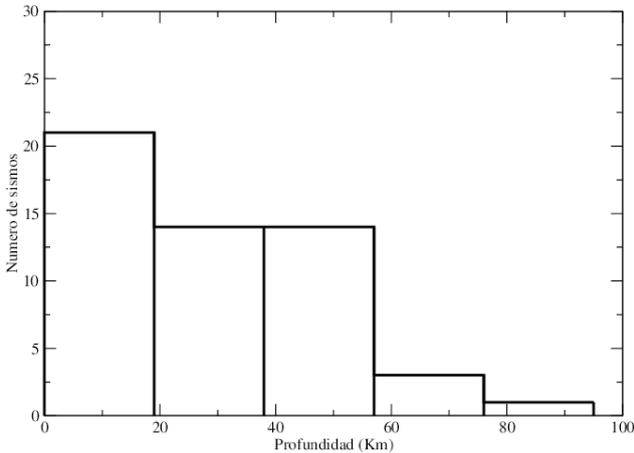


Figura 4.20. Histograma de profundidad de los sismos a partir de la figura 4.19

4.5.2. Modelo de velocidad con variación en profundidad

De acuerdo con resultados del modelo de velocidad homogénea:

- Se mantuvieron los límites laterales de la región pero se redujo el eje z por baja densidad de sismos en la zona profunda (figura 4.20), de tal manera que ahora el intervalo en z es $[-3,80]$ km.

- Se aplica el programa de inversión con libertad de variación de velocidad en profundidad con 4 bloques, tomando en cuenta la localización de los hipocentros, tiempo de origen y velocidad $V_p = 5,92$ km/s en toda la región, como modelo inicial.

La curva de error (figura 4.21) muestra fuertes oscilaciones, entonces el modelo de velocidad con variación en profundidad es inestable, posiblemente porque el valor del factor de amortiguación es muy pequeño (se utilizó $\varepsilon = 0,01$), o la existencia de fuertes variaciones laterales.

Después de 111 iteraciones el error normalizado del modelo es $3,93 \times 10^{-2}$ s. Se caracteriza por el aumento de velocidad con profundidad y un fuerte cambio en 20 km (figura 4.22 y tabla 4.3), lo cual indica la posible existencia del moho en proximidades a esta profundidad.

Profundidad (km)	Velocidad (km/s)
0 - 20	5.56
20 - 40	6.56
40 - 60	7.12
60 - 80	7.26

Tabla 4.3. Modelo de velocidad con variación en profundidad

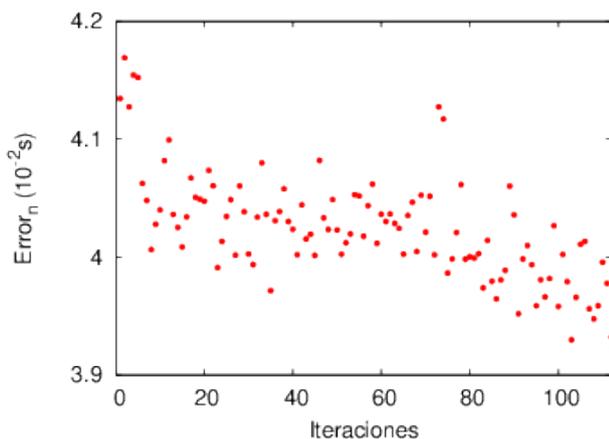


Figura 4.21. Error normalizado del modelo en función de las iteraciones para el modelo de velocidad con variación en profundidad

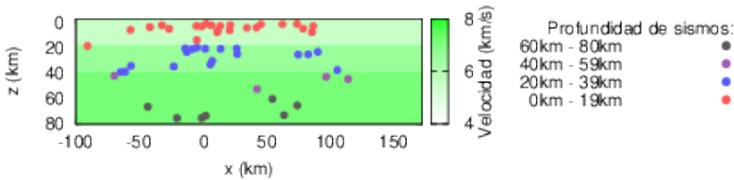


Figura 4.22. Modelo de velocidad con variación en profundidad. Modelo de velocidad con variación en profundidad. Proyección este-oeste sobre $y = -125$ km

4.5.3. Modelo de velocidad con variación 3D

Partiendo del modelo de velocidad con variación en profundidad como modelo inicial (tabla 4.3), se aplica el programa de inversión con libertad de variación 3D, compuesto de $8 \times 5 \times 4$ bloques, es decir 160 bloques en total, además $\epsilon = 1,2$.

La gráfica de error muestra una tendencia decreciente y es acotada, mostrando que el valor de ϵ es el adecuado (figura 4.23), con error normalizado en $2,9 \times 10^{-2}$. La ubicación de hipocentros es reposicionada sin fuertes cambios respecto al modelo de velocidad homogénea (figura 4.24).

Como se espera, en promedio la velocidad aumenta con la profundidad con cambios laterales fuertes (figura 4.25).

Alejandro Duitama Leal, José J. Fredy González V.,
Héctor Javier Hortúa y Leonardo D. Donado E.

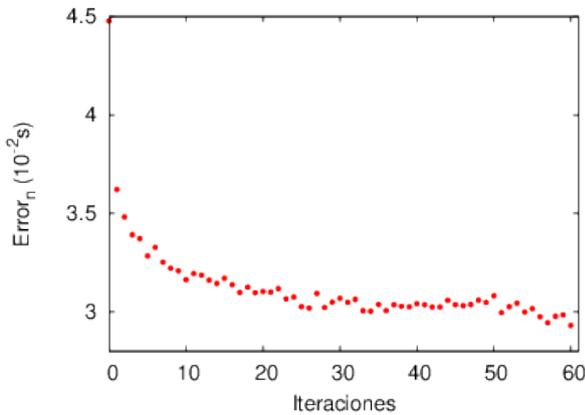
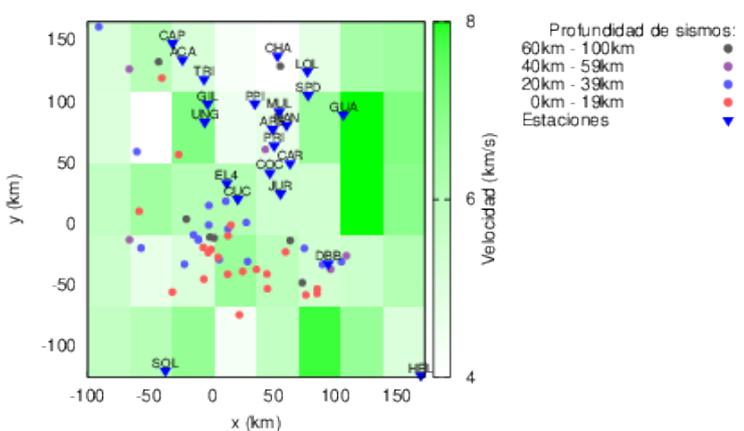


Figura 4.23. Error normalizado del modelo de velocidad con variación 3D en función de las iteraciones

De acuerdo con la distribución de sismos y estaciones, es posible que algunos bloques no sean perturbados, es decir, ningún rayo los penetra. En este caso la solución obtenida por aquellos bloques sería falsa. Para realizar la validación de la solución se plantean dos métodos: trazado de rayos y resolución (más conocido como *checkboard resolution test*).



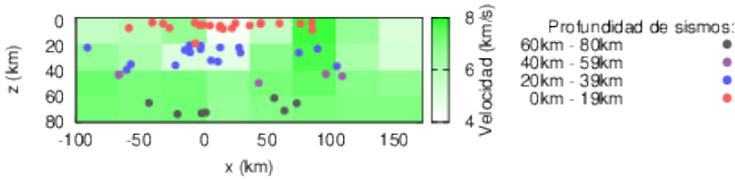


Figura 4.24. Proyección de la localización de sismos y distribución de velocidad. Arriba: la capa superficial ($z = 0$ km), y abajo: en el perfil este-oeste sobre $y = -125$ km

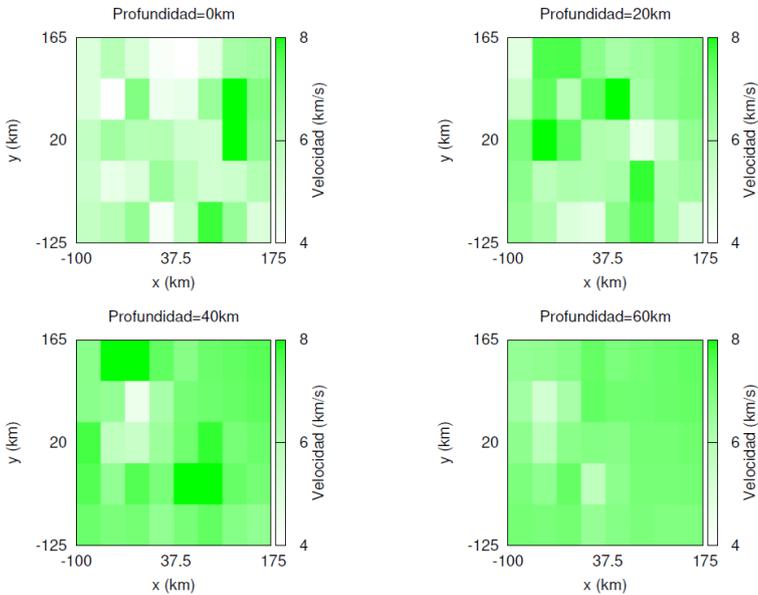


Figura 4.25. Distribución de velocidad para diferentes profundidades

El método por trazado de rayos es más sencillo: consiste en unir mediante una línea recta los hipocentros de los sismos y la ubicación de las estaciones. Los lugares donde la densidad de líneas es mayor, la solución será más confiable.

El segundo, el método de resolución, es un poco más complejo porque se realiza nuevamente una inversión, pero se obtiene mayor precisión, de tal manera que es ampliamente usado para estudios similares a este (Hastings, Schneider y Broschat, 1995). Sin embargo, la idea básica es simple como lo argumentan Burden, Faires y Burden (2002). Similarmente como se realizó la validación del programa de inversión (sección 4.4.6.2), el método consiste en asumir una distribución de velocidad intercalada (en forma de ajedrez) en el espacio, pero ahora con la posición de los hipocentros correspondiente a la solución, se aplica el algoritmo directo y se obtienen tiempos de llegada sintéticos. Una vez establecido el modelo por encontrar, se aplica el programa de inversión sin matriz de suavidad (es decir $D = 0$, sección 4.3.1). Asumiendo la distribución de velocidad como incógnita, se comienza con un modelo de velocidad uniforme y se compara el resultado final con el modelo sintético. Por la simetría del modelo de velocidad intercalado, es fácil observar los lugares donde la resolución es buena.

Se realizó el trazado de rayos a la solución obtenida del modelo de velocidad con variación 3D (figuras 4.24, 4.25 y 4.26). Como se observa, en superficie la densidad de rayos es alta y disminuye con la profundidad, como lo confirma la imagen de resolución para diferentes profundidades (figura 4.27). Entonces se puede asegurar que la solución superficial ($z = [0,20]$ km) es confiable excepto en los bordes cercanos a $x = -100$ km y $x = 175$ km. El siguiente plano a una profundidad desde 20 km a 40 km muestra buena resolución únicamente en la zona central, en la región comprendida por: $[-66, 106] \times [-67, 107]$ km². Los dos siguientes planos a mayor profundidad no tienen resolución, entonces la solución de distribución de velocidad para estos planos no es confiable.

Para interpretar los resultados de una mejor manera se aplica interpolación spline 3D (suaviza y es útil en problemas geológicos) al modelo de velocidad y se agrupan los sismos por cada perfil. Este procedimiento se realiza para los dos planos más superficiales y los tres perfiles este-oeste centrales, puesto que aquellos son más confiables de acuerdo con el resultado obtenido de resolución (figuras 4.28 y 4.29).

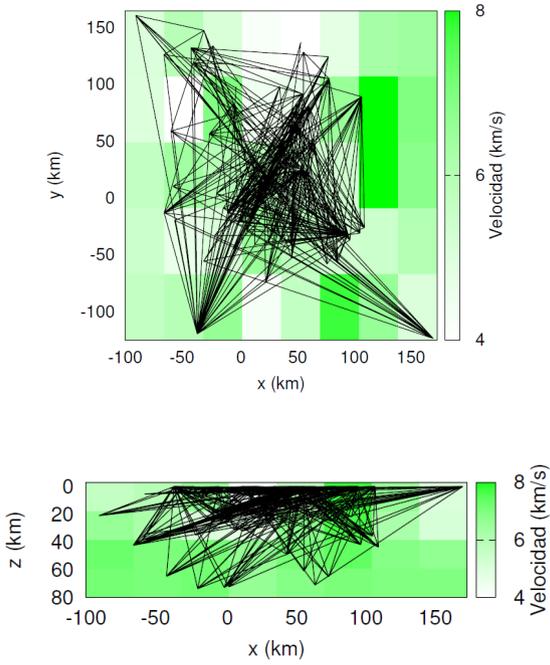


Figura 4.26. Trazado de rayos. Izquierda: la capa superficial ($z = 0$ km).
Derecha: perfil este-oeste sobre $y = -125$ km

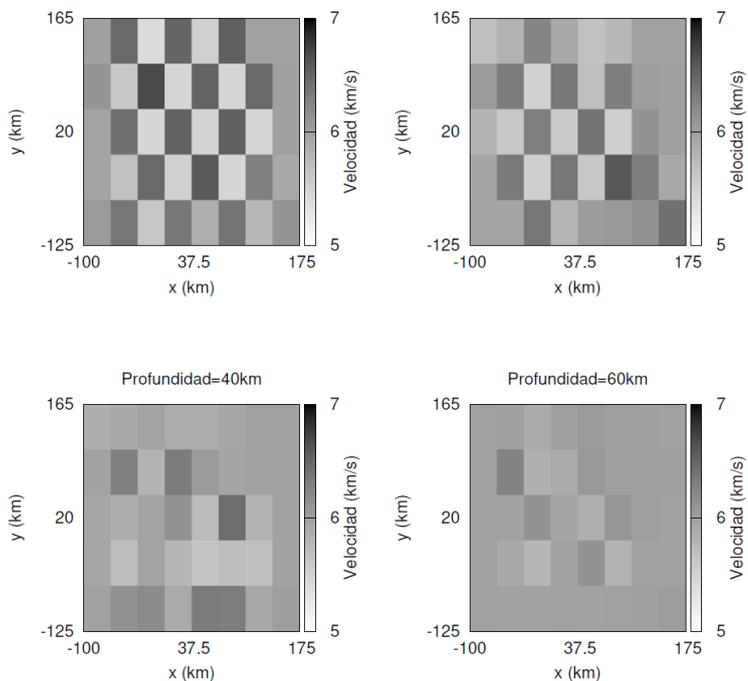


Figura 4.27. Resolución para diferentes profundidades

4.5.4. Interpretación

Con el fin de interpretar los resultados se añade a la solución del modelo de velocidad el mapa de fallas (Stein y Wysession, 2003) (figura 4.28) y elevación de terreno con referencia en coordenadas geográficas (figura 4.30). De tal manera que se observa correspondencia entre la variación de velocidad y las siguientes características geológicas:

- La Falla de Murindó, con la existencia de dos morfolitologías diferentes unidas por esta falla. En efecto, la relación entre velocidades (bajas y altas) están ligadas a características litológicas correspondientes a rocas blandas (sedimentarias) y más competentes (volcano-sedimentarias y cristalinas), respectivamente (figuras 4.30 y 4.31).

- Permite relacionar los segmentos de la Falla de Uramita y otras fallas satélites, en los límites, la forma, geometría y definición (figura 4.30), la cual se hace más evidente sobre el área de la Cuenca de Urabá (figura 4.31).

De la misma manera que las fallas de Uramita y Murindó se relacionan con las velocidades bajas y altas, se infiere que posiblemente existen fallas denotadas como 1 y 2, las cuales estarían acomodando la subducción de la placa Caribe y el movimiento de la placa Chocó-Panamá.

Por la baja resolución en profundidad (20 km) hacer cualquier proposición de características geológicas en esta dirección presenta gran incertidumbre, sin embargo, a partir de perfiles este-oeste se observa la persistencia en profundidad de las fallas de Uramita y Murindó (figura 4.29). Se determinó que estas fallas alcanzan un lineamiento posiblemente hasta una profundidad aproximada de 20 km en el sur, y el centro de la zona de estudio (perfiles $y = [-67, -9]$ km y $y = [-9, 49]$ km, cercano a 7°N), donde se encuentran con un material de mayor velocidad, posiblemente el basamento. Además el perfil $y = [49, 107]$ km (cercano a 8°N) permitió delimitar la Cuenca de Urabá, de tal manera que esta posiblemente alcanza una profundidad máxima de 15 km en esta zona.

4.5.5. Discusión

La metodología consistió en determinar los tiempos de llegada de onda P y S para establecer la distribución de velocidad y asociarla con las características geológicas de la zona. Sin embargo, las estaciones no tenían sincronía. Teniendo en cuenta esta asincronía, se elaboró un programa de inversión mediante un algoritmo inverso y directo y se realizaron los siguientes aportes: el algoritmo inverso tiene en cuenta las variaciones suaves de velocidad que se encuentran en modelos geológicos y el algoritmo directo funciona mediante Diferencias Finitas y fronteras no reflectivas PML, lo cual ofrece una herramienta útil para realizar sismogramas sintéticos de gran calidad. El programa demostró un comportamiento esperado de acuerdo con Burden, Faires y Burden (2002).

Mediante la metodología planteada se obtuvo una distribución de velocidades compuesta por un arreglo de $8 \times 5 \times 4$ bloques, es decir 4 capas con un grosor de 20 km de profundidad (figura 4.25), las cuales están divididas en 8 divisiones en dirección este-oeste y 5 divisiones en dirección sur-norte. La resolución de la tomografía indica que de acuerdo con la distribución de hipocentros de los sismos y estaciones, los resultados confiables se encuentran para las dos capas más superficiales (hasta 40 km de profundidad) y en la parte central de cada una (figuras 4.27 y 4.28).

Estos resultados verificaron las características geológicas superficiales como la separación de dos morfolitologías diferentes unidas por la Falla de Murindó y su relación con la Falla de Uramita y otras fallas satélites, lo cual es soportado por estudios geológicos superficiales (Lee y Stewar, 1981; Stein y Wysession, 2003).

Observando perfiles este-oeste y siguiendo la diferencia entre velocidades, se delimitó la profundidad de las rocas sedimentarias que componen la Cuenca de Urabá en 15 km aproximadamente y la persistencia de las fallas de Uramita y Murindó hasta 20 km más o menos, posiblemente limitadas por el basamento. Zhao, Horiuchi y Hasegawa (1992) mediante observaciones de pozo afirman que la profundidad en el sur de la Cuenca alcanza los 7 km y el basamento disminuye la profundidad hacia el oeste, lo cual está acorde con la forma de la imagen obtenida, pero no acorde con la profundidad máxima, teniendo en cuenta que la resolución de la imagen tomográfica es de 20 km de espesor en profundidad y por tanto la incertidumbre es muy grande (figura 4.29).

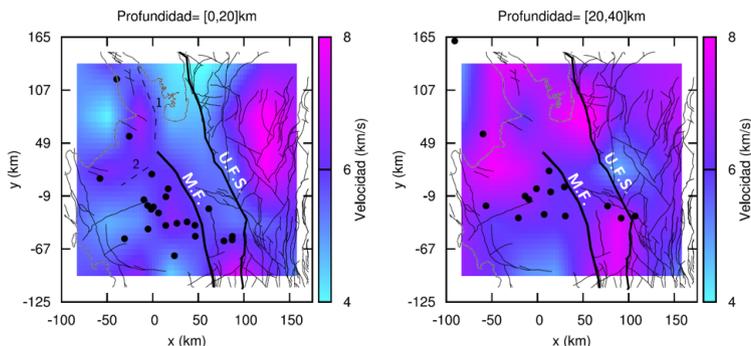


Figura 4.28. Distribución de velocidad para diferentes profundidades aplicando interpolación *spline*. Los puntos representan los sismos en cada capa, las líneas sólidas las fallas (M. F. = Falla de Murindó, U. F. S. = Sistema de Fallas de Uramita) y las líneas punteadas son fallas propuestas

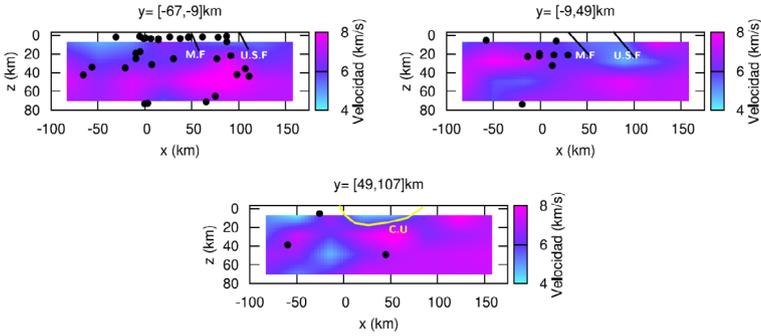


Figura 4.29. Distribución de velocidad para diferentes perfiles este-oeste aplicando interpolación *spline*. Los puntos representan los sismos en cada capa. La línea amarilla delimita la Cuenca de Urabá (C. U.). M. F. = Falla de Murindó, U. F. S. = Sistema de Fallas de Uramita

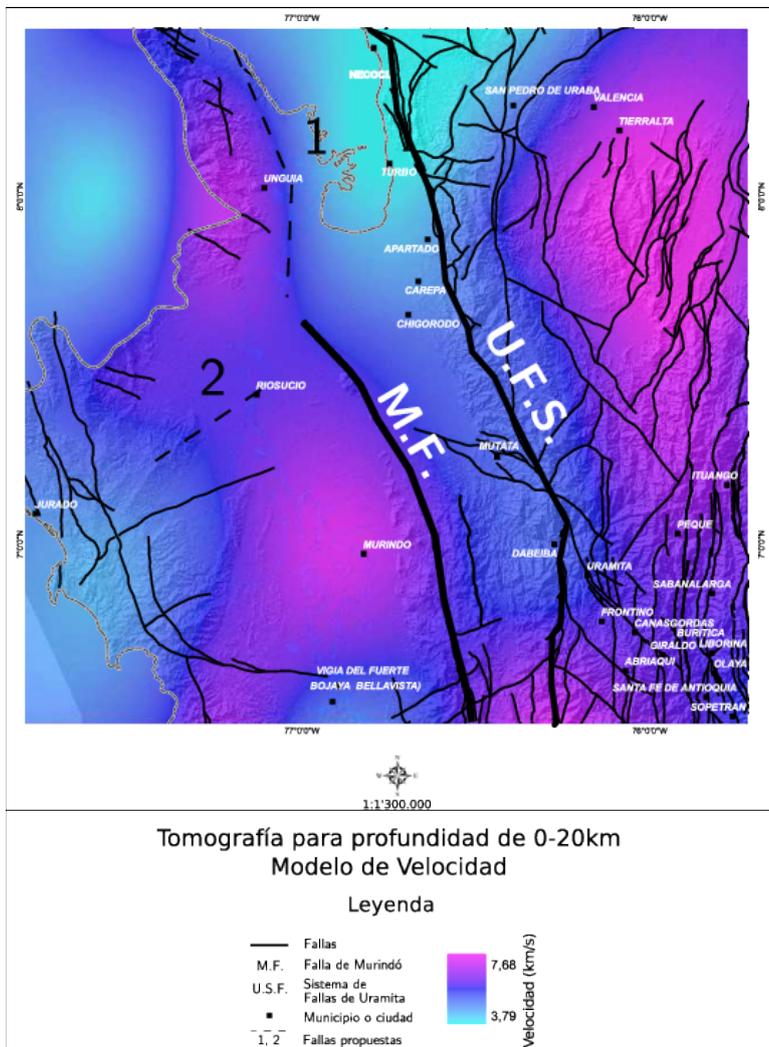


Figura 4.30. Modelo de velocidad superficial con interpolación spline

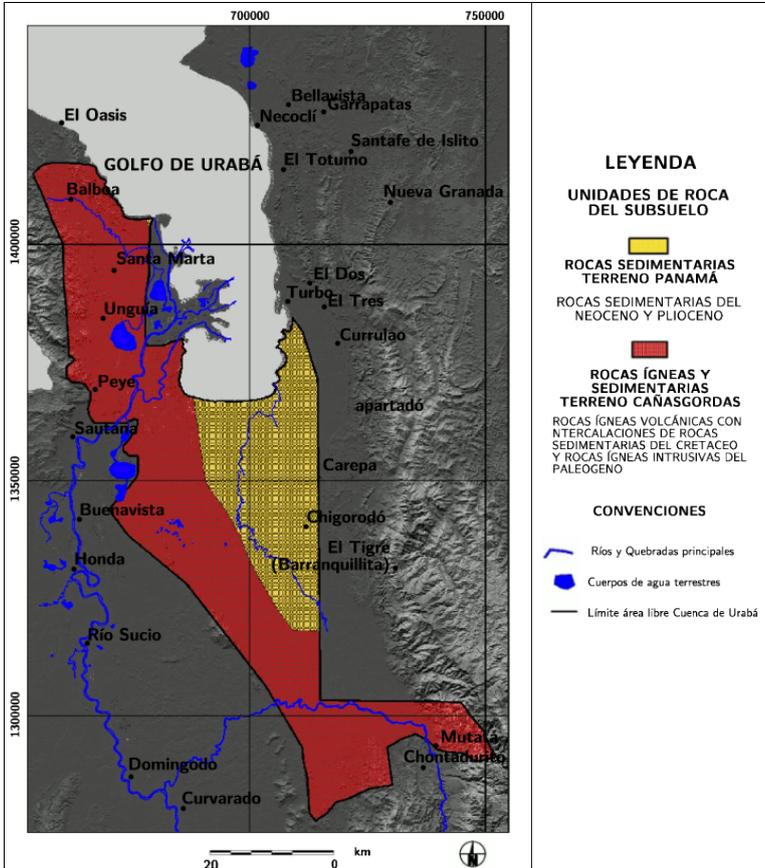


Figura 4.31. Morfolitología del área libre de la Cuenca de Urabá. Modificada del informe de Lee y Stewart (1981)

Referencias

- Aki, K. y Lee, W. H. (1976). Determination of three-dimensional velocity anomalies under a seismic arrays using first P arrival times of local earthquakes. Part 1. An homogeneous initial model. *JGR, Journal of Geophysical Research*, 81(23), agosto, 4381-4399. <https://doi.org/10.1029/JB081i023p04381>
- Berenger, J. P. (1994). A perfectly matched layer absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2), octubre, 185-200. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159>
- _____. (1996). Three-dimensional perfectly matched layer absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 127(2), septiembre, 363-379. <https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0181>
- Burden, R. L., Faires, D. J. y Burden, A. M. (2002). *Análisis numérico*. Cengage Learning. <https://bit.ly/3esGffU>
- Ceron, J. F. (2008). *Crustal structure of the colombian Caribbean Basin and margins*. Tesis de doctorado, University of South Carolina.
- Cortés, M., Angelier, J. y Colletta, B. (2005). Paleostress evolution of the northern Andes (Eastern Cordillera of Colombia): Implications on plate kinematics of the South Caribbean region. *Tectonics*, 24. <https://doi.org/10.1029/2003TC001551>
- Crosson, R. S. (1976). Crustal structure modeling of earthquake data. Part 1. Simultaneous least square estimation of hypocenter and velocity parameters. *JGR, Journal of Geophysical Research*, 81(17), junio, 3036-3046. <https://doi.org/10.1029/JB081i017p03036>
- Duque, H. (1980). Geotectónica y Evolución de la Región Noroccidental. *Boletín Geológico, Ingeominas*, 23(3), 4-37.
- _____. (1990). The Choco Block in the northwestern corner of South America: Structural, tectonostratigraphic, and paleogeographic implications. *Journal of South American Earth Sciences*, 3(1), 71-84. [https://doi.org/10.1016/0895-9811\(90\)90019-W](https://doi.org/10.1016/0895-9811(90)90019-W)
- Feininger, T. y Bristow, C. R. (1980). Cretaceous and Paleogene history of coastal Ecuador. *Geologische Rundschau*, 69, 849-874.

- Franco, L. E., Sánchez, J. J., Dionicio, V. y Castillo, L.F. (2006). *Análisis de sismicidad en cercanías al municipio de Dabeiba, departamento de Antioquia. Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC*. I Simposio Latinoamericano y del Caribe en Geofísica, II Congreso Latinoamericano de Sismología y III Congreso Colombiano de Sismología.
- González, O. (2008). *Extensión del método de las Diferencias Finitas en el dominio del tiempo para el estudio de estructuras híbridas de microondas incluyendo circuitos concentrados activos y pasivos*. Tesis de doctorado, Universidad de Cantabria, España.
- Graterol, V. (Intérprete). (2006). *Programa adquisición procesamiento e interpretación de datos de aerogravimetría en el litoral pacífico de Colombia - Contrato n.º 075*. Carson Services, Inc./Aerogravity Division y Agencia Nacional de Hidrocarburos. <https://bit.ly/2Vmn9jX>
- Hastings, F. D., Schneider, J. B. y Broschat, S. L. (1995). Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 100(5), 3061. <https://doi.org/10.1121/1.417118>
- Hernández, O. (2009). *Proyecto: Cartografía geológica y modelamiento estructural de las cuencas de Urabá y Sinú - San Jancinto, a partir de la interpretación de imágenes de sensores remotos y monitoreo sísmico*. Universidad Nacional de Colombia y Agencia Nacional de Hidrocarburos. Bogotá.
- Humphreys, E. y Clayton, R. (1988). Adaptation of back projection tomography to seismic travel time problems. *Journal of Geophysical Research Atmospheres*, 93(B2), 1073-1085, febrero. <https://doi.org/10.1029/JB093iB02p01073>
- Ingeominas. (2007). *Atlas geológico de Colombia. Plancha 5-05*. Instituto Colombiano de Geología y Minería - Ingeominas.
- Iyer, H. M. y Hirahara, K. (1993). *Seismic Tomography: theory and practice*. Chapman & Hai.
- Lee, W.H.K. y Stewart, S.W. (1981). *Principles and applications of microearthquake networks*. Academic Press.

- Marín, J. P., Bermúdez, H. D., Aguilera, R., Jaramillo, J. M., Rodríguez, J. V., Ruiz, E. C. y Cerón, M. R. (2010). Evaluación geológica y prospectividad sector Sinú - Urabá. *Boletín de Geología*, 32(1).
- Meissnar, R. O., Flueh, E. R., Stibane, F. y Berg, E. (1976). Dynamics of the active plate boundary in southwest Colombia according to recent geophysical measurements. *Tectonophysics*, 35(1-3), octubre, 115-136. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(76\)90032-9](https://doi.org/10.1016/0040-1951(76)90032-9)
- Nivia, Á. (1989). *El terreno Amaime-volcánica, una provincia acrecionada de basaltos de Meseta Océánica*. En V Congreso Colombiano de Geología. Memorias Tomo I.
- Oliver, J. y Murphy, L. (1971). WWNSS: Seismology's Global Network of Observing Stations. *Science*, 174(4006), 254-261. <https://doi.org/10.1126/science.174.4006.254>
- Pennington, W. (1981). Subduction of the Eastern Panama Basin and Seismotectonics of Northwestern South America. *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*. <https://doi.org/10.1029/JB086iB11p10753>
- Pindell, J. y Dewey, J F. (1982). Permo-Triassic reconstruction of western Pangea and the evolution of the Gulf of Mexico/Caribbean region. *Tectonics*, 1(2), abril, 179-211. <https://doi.org/10.1029/TC001i002p00179>
- Red Sismológica Nacional de Colombia - RSNC. (2009a). *Boletín de Sismos enero-junio de 2009*. Bogotá.
- _____. (2009b). *Boletín de Sismos julio-diciembre de 2009*. Bogotá.
- _____. (2011). Características estaciones. Bogotá.
- Schwerdtfeger, H. (1960). Direct Proof of Lanczos' Decomposition Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 67(9). <https://doi.org/10.1080/00029890.1960.11992013>
- Stein, S. y Wysession, M. (2003). *An Introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. Blackwell Publishing.

- Suter, F., Sartori, M., Neuwerth, R. y Gorin, G. (2008). Structural imprints at the front of the Chocó-Panama indenter: Field data from the North Cauca Valley Basin, Central Colombia. *Tectonophysics*, 460(1-4), noviembre, 134-157. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2008.07.015>
- Trenkamp, R., Kellogg, J., Freymueller, J. y Mora, H. (2002). Wide plate margin deformation, southern Central America and northwestern South America, CASA GPS observations. *Journal of South American Earth Sciences*, (15), 157-171.
- Van der Hilst, R. y Mann, P. (1994). Tectonic implications of tomographic images of subducted lithosphere beneath northwestern South America. *Geology*, 22, 451-454.
- Vargas-Cuervo, G., Castillo, L., Aguilera, R. y Jiménez, D. (2010). Inventario, interpretación y evaluación de la información geológica, geofísica y geoquímica perteneciente al área libre de la cuenca Urabá. *Ingeniería, Investigación y Desarrollo*, 10(2), 128-145. https://revistas.uptc.edu.co/index.php/ingenieria_sogamoso/article/view/3407
- Yee, K. S. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3), 302-307, mayo. <https://doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693>
- Zhao, D., Horiuchi, S. y Hasegawa, A. (1992). Seismic velocity structure of the crust beneath the Japan Islands. *Tectonophysics*, 212(3-4), octubre, 289-301. [https://doi.org/10.1016/0040-1951\(92\)90296-I](https://doi.org/10.1016/0040-1951(92)90296-I)

EX UMBRA IN SOLEM

Dirección de Investigación
Universidad de Cundinamarca
2020



www.ucundinamarca.edu.co

 Universidad de cundinamarca

 ucundinamarcaoficial

 @ucundinamarca

 UCUNDINAMARCATV



Vigilada MinEducación