	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA:1 de 7</b>

21.1

<b>FECHA</b>	Martes, 23 de Julio de 2019
--------------	-----------------------------

Señores  
**UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA**  
 BIBLIOTECA  
 Ciudad

<b>UNIDAD REGIONAL</b>	Sede Fusagasugá
------------------------	-----------------

<b>TIPO DE DOCUMENTO</b>	Trabajo de grado
--------------------------	------------------

<b>FACULTAD</b>	.Educación
-----------------	------------

<b>NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO</b>	Pregrado
---	----------

<b>PROGRAMA ACADÉMICO</b>	Licenciatura en matemáticas.
---------------------------	------------------------------

El Autor(Es):

<b>APELLIDOS COMPLETOS</b>	<b>NOMBRES COMPLETOS</b>	<b>No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN</b>
Romero Gabalan	Billy Sairus	1069755627



<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAR113</b>
<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
	<b>PAGINA: 2 de 7</b>

Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

<b>APELLIDOS COMPLETOS</b>	<b>NOMBRES COMPLETOS</b>
Gonzalez Galeano	Andrey Alain

<b>TÍTULO DEL DOCUMENTO</b>
MODELO DE RUTA CHUSACÁ - FUSAGASUGÁ POR CURVAS DE BÉZIER Y ANÁLISIS DE NUEVAS RESTRICCIONES DE LA VÍA.

<b>SUBTÍTULO</b> (Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

<b>TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:</b> Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía
Licenciado en matemáticas

<b>AÑO DE EDICIÓN DEL DOCUMENTO</b>	<b>NÚMERO DE PÁGINAS</b>
2019	88

<b>DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS</b> (Usar 6 descriptores o palabras claves)	
<b>ESPAÑOL</b>	<b>INGLÉS</b>
1. Curvas	Curves
2. Bézier	Bézier
3. Matemáticas	Mathematics
4. Interpolación	Interpolation
5. Automóvil	Car
6. Ruta	Route

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad  
Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*



<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
	<b>PAGINA:3 de 7</b>

## RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS

(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

Este trabajo pretende visualizar desde una perspectiva matemática las restricciones de una vía y así evaluar la teoría sobre la velocidad adecuada de manejo en una carretera primaria, la carretera elegida fue la ruta Chusacá - Fusagasugá, que cuenta con unas características adecuadas para su estudio, además de sus niveles de accidentalidad alarmantes. Esto lleva a realizar una investigación con todas las herramientas necesarias para conseguir modelar la carretera gracias a las curvas de Bézier y así, conseguir digitalizar la carretera con el ánimo de relacionar todos los aspectos geométricos con funciones paramétricas que luego permite realizar cálculos dimensionales y dinámicos a diversos tipos de automóviles para así obtener las velocidades máximas de todos los vehículos a través de todas las curvas del tramo en diversos puntos específicos sobre cada curva. Posteriormente, el análisis de las velocidades en diversos tramos de curva, el comportamiento de los automóviles en las curvas, teniendo en cuenta las diversas condiciones permite verificar cuáles son los automóviles más seguros para transitar por esta vía y, la obtención de las curvas más peligrosas a lo largo de toda la ruta con un fin preventivo.

This work aims to visualize from a mathematical perspective the restrictions of a road and thus evaluate the theory about the proper speed of driving on a primary road, the road chosen was the Chusacá - Fusagasugá route, which has adequate characteristics for its study, in addition of its alarming levels of accident. This leads to an investigation with all the necessary tools to be able to model the road thanks to the Bézier curves and thus, to digitalize the road in order to relate all the geometric aspects with parametric functions that then allows dimensional and dynamic calculations to be carried out. many kinds types of cars in order to obtain the maximum speeds of all vehicles through all the curves of the section at several specific points on each curve. Subsequently, the analysis of the speeds in several sections of the curve, the behavior of the cars in the curves, taking into account the various conditions allows to verify which are the safest cars to travel on this route and, obtaining the most dangerous curves along the entire route with a preventive purpose.

## AUTORIZACION DE PUBLICACIÓN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación,

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
NIT: 890.680.062-2



teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.


En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una "X":

<b>AUTORIZO (AUTORIZAMOS)</b>	<b>S I</b>	<b>N O</b>
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.	X	
2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	X	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	X	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b> <b>PAGINA:5 de 7</b>

demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “*Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

**NOTA:** (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

**Información Confidencial:**

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI** NO **X**.


En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

**LICENCIA DE PUBLICACIÓN**

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
NIT: 890.680.062-2

	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA:6 de 7</b>

Licencia de Publicación será permanente).

b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.

c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.

d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.


f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el “Manual del Repositorio Institucional AAAM003”

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia CreativeCommons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.



	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA:7 de 7</b>

j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia CreativeCommons Atribución- No comercial- Sin derivar.




**Nota:**

Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).

<b>Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)</b>	<b>Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)</b>
1. BillyRomeroTG.pdf	Texto
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

<b>APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS</b>	<b>FIRMA (autógrafo)</b>
Romero Gabalan Billy Sairus	

Código Serie Documental (Ver Tabla de Retención Documental).

óricas6.271





Modelo de ruta Chusacá - Fusagasugá por curvas de Bezier y  
análisis de nuevas restricciones específicas de la vía.

---

Presentado por:

BILLY SAIRUS ROMERO GABALAN

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

---

Asesor:

ANDREI ALAIN GONZALES GALEANO



# Agradecimientos

A mi familia por su inagotable energía, por su inquebrantable confianza, a quienes debo lo que soy ahora y por quienes trabajo para ser cada día mejor.

A mis docentes por su acompañamiento y disposición en cada escalón de mi carrera profesional, por creer en mí y sobretodo por brindarme su apoyo.

A mis amigos que aportaron de manera significativa en mi formación, por su amistad y aprecio.

A todos aquellos que contribuyeron en cada paso de este proyecto.



# Introducción

El conductor de un vehículo es el elemento principal de este proyecto de tesis, es a él a quién va dirigida esta investigación pues, el conductor de un automotor debe desarrollar demasiadas habilidades a partir de la experiencia para tomar decisiones en pocos segundos, ya que es el responsable de muchas vidas a su alrededor. Así es como nace la idea de brindar algo más de control vial a las personas en pleno ejercicio de conducción. Por consiguiente, conocer los límites a los que puede enfrentarse en una carretera es sumamente importante para transitar sobre ella. Por otro lado, la construcción de una carretera eficaz en Colombia se debe tener en cuenta muchos aspectos de diferente naturaleza, esto incluye estudios políticos, económicos, sociales, geológicos, entre otros, todos regulados por el Ministerio de Transporte, éste asegura, por medio del manual de diseño geométrico de carreteras emitida por el Instituto Nacional de Vías (INVIAS) [1], que la construcción de una carretera debe tener en cuenta que el diseño en planta del eje de carretera necesita relaciones óptimas entre la velocidad de diseño<sup>1</sup>, el peralte y la curvatura.

Para una carretera tan importante como es la vía Chusacá - Fusagasugá que permite el ingreso y salida de la capital por el sur del país y una de las más concurridas, esta vía es reconocida por sus altos índices de accidentalidad según la Dirección de tránsito de la Policía Nacional [2], como medida preventiva, las autoridades se han empeñado en reducir los límites de velocidad hasta los  $80\text{km/h}$  y  $60\text{km/h}$  en casi todo su trayecto. El problema reside en éstas restricciones tan generales cuando desde ningún punto de vista se trata de una carretera homogénea, impidiendo así que se tomen consideraciones absolutas, además, imponiendo restricciones en tramos inne-

---

<sup>1</sup>Dato que brinda las características de una carretera donde se origina un intervalo de velocidad máximo y mínimo de conducción.

cesarios, ocasionando más tráfico y entorpeciendo el continuo flujo de carros.

Lo que pretende esta investigación es generar un modelo matemático con ayuda de las Curvas de Bézier para el planteamiento real de los parámetros de velocidad de diseño en función del peralte y la curvatura de la ruta ya que estos datos no son modificables, y así, luego de obtener dichos datos, analizar las restricciones específicas del tramo de vía.

Considerando que se trata de una ruta primaria, por su ubicación geológica, estructura y flujo de autos, se debe realizar más estudios minuciosos para disminuir los registros de accidentalidad y optimizar la circulación del automotor de principio a fin desde la misma conciencia del conductor conociendo los límites a los que se enfrenta en cada punto específico de la vía. Ofreciendo estos parámetros con precisión, permite regular al conductor con mayor seguridad con el simple hecho de que se trata de restricciones menos generales y más específicas para un control total de la vía.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Objetivos</b>	<b>9</b>
1.1. Objetivo general . . . . .	9
1.2. Objetivos específico . . . . .	9
<b>2. Marco teórico</b>	<b>11</b>
2.1. Marco de antecedentes . . . . .	11
2.1.1. Antecedentes . . . . .	11
2.1.2. Estado del arte . . . . .	12
2.2. Bases teóricas . . . . .	14
2.2.1. Carreteras . . . . .	14
2.2.2. Automóviles . . . . .	16
2.2.3. Índices de accidentalidad . . . . .	19
2.2.4. Curvatura de carreteras y velocidades. . . . .	19
2.2.5. Curvas de Bézier . . . . .	28
2.2.6. Software Geográfico . . . . .	33
2.2.7. Lenguaje de programación. . . . .	33
<b>3. Marco metodológico</b>	<b>35</b>
3.1. Tipo y diseño de investigación . . . . .	35
3.1.1. Digitalización de la carretera. . . . .	37
3.1.1.1. Elección de la carretera . . . . .	37



3.1.1.2.	QGIS . . . . .	38
3.1.2.	Ejecución del método de interpolación . . . . .	39
3.1.2.1.	Python 3.6 . . . . .	39
3.1.2.2.	Curvas de Bézier . . . . .	39
3.1.2.3.	Interpolación . . . . .	40
3.1.3.	Cálculo de curvas y relación de velocidad, peralte y radio de curvatura .	44
<b>4.</b>	<b>Análisis e interpretación de resultados</b>	<b>49</b>
4.1.	Resultados . . . . .	49
4.2.	Análisis de resultados . . . . .	52
4.2.1.	La carretera. . . . .	52
4.2.2.	La velocidad . . . . .	53
4.2.2.1.	Gráficas . . . . .	54
4.2.2.2.	Curvas peligrosas . . . . .	55
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>61</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	61
5.2.	Recomendaciones . . . . .	62
<b>6.</b>	<b>Anexos</b>	<b>67</b>

# Índice de figuras

2.1. Referencias de neumáticos, tomado de: Virtual Llantas, <a href="http://www.virtualllantas.com/todo-sobre-llantas/">www.virtualllantas.com/todo-sobre-llantas/</a> . . . . .	18
2.2. Muertes por accidente, casos y tasas. Colombia 2009 - 2018. . . . .	19
2.3. Fuerzas ejercidas sobre auto en curva plana. . . . .	21
2.4. Fuerzas ejercidas sobre auto en plano inclinado. . . . .	22
2.5. Fuerzas que actúan sobre un vehículo en una curva sin peralte con respecto del punto O. . . . .	26
2.6. Fuerzas que actúan sobre un vehículo en una curva sin peralte con respecto del punto O. . . . .	27
2.7. Curva de Bézier de primer grado. . . . .	29
2.8. Curva de Bézier de segundo grado. . . . .	30
2.9. Curva de Bézier de cuarto grado. . . . .	31
3.1. Formato Excel de coordenadas exportadas de QGIS. . . . .	38
3.2. Gráfica de coordenadas de la curva 1. . . . .	40
3.3. Puntos de control curva 1. . . . .	41
3.4. Ejemplo curva 25 . . . . .	42
3.5. Peralte en términos de grados, minutos y segundos de la curva 1. . . . .	45
3.6. Resultados arrojados por el código . . . . .	46
3.7. Resultados arrojados por el código . . . . .	46
3.8. Curva 22 y velocidades. . . . .	47
3.9. Curva 1, velocidades de diferentes tipos de vehículos. . . . .	48

4.1. Ruta Bogotá - Fusagasugá tomada de [9] . . . . .	50
4.2. Curva 1 . . . . .	50
4.3. Curva 1, tomada de Google Maps. . . . .	51
4.4. Índices de alta accidentalidad según municipio. Tomado de [12] . . . . .	52
4.5. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 2 . . . . .	54
4.6. Ruta Bogotá - Fusagasugá, velocidades máximas curva 2 . . . . .	54
4.7. Saturación de modelo por exceso de puntos de control . . . . .	55
4.8. Velocidad máxima curva 14 . . . . .	57
4.9. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, peralte y coordenadas. . . . .	57
4.10. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, velocidad máxima de bus(40). . . . .	58
4.11. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, comportamiento optimo de velocidad de bus(40). . . . .	58
4.12. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, nivel de acondicionamiento y seguridad según vehículo. . . . .	59
6.1. Muertes por accidente de tránsito según el medio de transporte. . . . .	67
6.2. Muertes por accidente de tránsito según tipo de accidente . . . . .	67
6.3. Muertes por accidente de tránsito según el mes del año. . . . .	68
6.4. Muertes por accidente de tránsito según la hora. . . . .	68
6.5. Muertes por accidente de tránsito según departamento de mayor índice de accidentalidad . . . . .	70
6.6. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 2 . . . . .	75
6.7. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 3 . . . . .	75
6.8. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 4 . . . . .	76
6.9. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 5 . . . . .	76
6.10. Ruta Bogotá - Fusagasugá , curva 6 . . . . .	77
6.11. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 7 . . . . .	77
6.12. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 8 . . . . .	78
6.13. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 9 . . . . .	78
6.14. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 10 . . . . .	78

6.15. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 11 . . . . .	79
6.16. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 12 . . . . .	79
6.17. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 13 . . . . .	79
6.18. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14 . . . . .	80
6.19. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 15 . . . . .	80
6.20. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 16 . . . . .	80
6.21. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 17 . . . . .	81
6.22. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 18 . . . . .	81
6.23. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 19 . . . . .	81
6.24. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 20 . . . . .	82
6.25. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 21 . . . . .	82
6.26. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 22 . . . . .	82
6.27. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 23 . . . . .	83
6.28. Ruta Bogotá - Fusagasugá , curva 24 . . . . .	83
6.29. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 25 . . . . .	84
6.30. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 26 . . . . .	84
6.31. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 27 . . . . .	84
6.32. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 28 . . . . .	85
6.33. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 29 . . . . .	85
6.34. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 30 . . . . .	85
6.35. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 31 . . . . .	86
6.36. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 32 . . . . .	86
6.37. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 33 . . . . .	86
6.38. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 34 . . . . .	87
6.39. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 35 . . . . .	87
6.40. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 36 . . . . .	87
6.41. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 37 . . . . .	88
6.42. Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 38 . . . . .	88



# Capítulo 1

## Objetivos

### 1.1. Objetivo general

Proponer un modelo matemático usando las Curvas de Bézier [4] para el planteamiento de las relaciones entre velocidad, radio de curvatura y peralte utilizados en el Manual de Diseño Geométrico evaluándolo en la vía desde Chusacá hasta Fusagasugá.

### 1.2. Objetivos específico

- Digitalizar la vía en el tramo Chusacá - Fusagasugá con ayuda del programa QGIS [5].
- Ejecutar el método de interpolación por polinomios de Bernstein [6] para obtener la función que traza la vía.
- Analizar las curvas y relacionar las ecuaciones de radio de curvatura, peralte y velocidad de la vía con el método de interpolación propuesto.
- Contrastar análisis bajo el modelo propuesto con la construcción original del tramo de vía Chusacá - Fusagasugá y evaluar la fiabilidad del modelo.



# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Marco de antecedentes

#### 2.1.1. Antecedentes

En este espacio se exhiben algunos trabajos acerca de las curvas de bézier o la modelación de carreteras.

De todos los trabajos el más cercano a nuestra investigación es la realizada por M. Y.Misro, A. Ramli, J.M, Ali, en 2015 titulada “Approximating Maximum Speed on Road from Curvature Information“ [7] donde hace una aproximación a un tramo de carretera por curvas de bézier pero con un margen de error superior sustentado en los cálculos evidenciados de las velocidades obtenidas. Además, la gráfica generada por los puntos de control a pesar de no exceder puntos de control, no modela con la exactitud que se esperaría.

Por otro lado, Juan Dueñas Bejar realizó un proyecto en 1996 acerca de las curvas de Bézier ayudándose con los Blossom que es un método de cálculo por medio de la interpolación lineal recursiva de los puntos de control dados donde aseguraba que gracias a varios métodos particulares de las curvas, podría describir la representación gráfica de dicha curva alterando la cantidad de puntos de control sin alterar la traza de la misma curva.

Más adelante en el 2013 un proyecto investigativo llamado “Medida de consistencia en carreteras convencionales y su relación con la seguridad vial“ y presentado por Laura Garacha



Morcillo nos demuestra cómo el análisis de los diferentes modelos de carreteras pueden ayudar a brindar diferentes modelos de diseño de tal manera que ayude a conseguir el mejor modelo que vaya de la mano con la diversidad de velocidades para el diseño eficaz de carreteras. Este proyecto solo se enfoca en la conclusión teórica de los modelos más eficaces a la hora de diseñar una carretera, para él, el diseño de carretera es uno de los factores de mayor incidencia en los accidentes automovilísticos. Este proyecto se aplicó a la provincia de Granada.

Alejandro García Bedoya una vez más enseña de qué manera las Curvas de Bezier pueden ser de nuevo utilizadas para la modelización. Para la Universidad de Sevilla presenta un proyecto llamado “Una aproximación geométrica a la aerodinámica de curvas y superficies“. Aquí, nos demuestra que un objeto que se transporte por una curva puede además ser aerodinámica, de tal manera que las curvas de Bézier sean la ruta por la que se transporta. Sin embargo, no somete el objeto a estimaciones externas del recorrido.

### 2.1.2. Estado del arte

Un primer trabajo realizado por Kenneth Renny Simba, Gunter Heppeler, Ba Dinh Bui, Yogi Muldani Hendrawan, Oliver Sawodny, Naoki Uchiyama en el 2017 para la Universidad de tecnología de Toyohashi, la Universidad de Stuttgart y el politécnico de fabricación Bandung, llamado “*Bezier Curve Based Trajectory Generation and Nonlinear Friction Compensation for Feed Drive Contouring Control*” donde aseguran que para un control de transmisión en una trayectoria de movimiento, si se desea ahorrar energía además de una fabricación eficiente, se debe suavizar estas trayectorias con curvas de Bézier, y sugieren curvas cuadráticas, cúbicas y quinticas tal que permita su diferenciabilidad para conseguir una velocidad y aceleración continuas para su estudio. Y con esto, y un condensador que cancele las fuerzas de fricción al buscar rastrear el diseño de la trayectoria suave con un controlador de contorno. A diferencia de este proyecto, no pretende suavizar curvas para hallar su velocidad, por el contrario, ya que este método es el utilizado en la investigación de proyecto “*Approximating Maximum speed on road from curvature information of Bézier Curve*”, que exigía modelar una carretera y el hecho de no suavizar fue el primer problema a desarrollar. Así es como se obtienen velocidades precisas de tramos precisos de la ruta.

En un trabajo realizado 2015 en la academia mundial de Ciencias, Ingeniería y Tecnología por MI Misro, A. Ramli, JM Ali llamado *Approximating Maximum Speed on Road from Curvature Information of Bezier Curve*. Donde se realiza un estudio sobre una vía y se realiza una aproximación por curvas de Bézier para así obtener valores de curvatura y con ello encontrar la velocidad máxima, obteniendo como conclusiones que, las curvas de Bézier permite un análisis con una aproximación muy confiable de la carretera en cuestión, además, un valor agregado cuando de estimar velocidades máximas instantáneas se trata. Este proyecto de investigación tiene similitudes con el presentado en esta tesis en el método de hallar la curvatura pues, los cálculos se hacen de la misma manera y bajo la misma teoría de geometría diferencial. con curvatura para curvas planas.

En otro trabajo realizado por Juan Dueñas Beñar, llamado *Çurvas de Bézier y B-Spline*.<sup>en</sup> 1996, trata de analizar, dadas todas las características de las curvas y los polinomios de Bernstein y Casteljaou con ayuda de los Blossoms la manera de hallar nuevos puntos de control de una curva sin que esta curva se vea alterada. Este debe ser un ejemplar necesario para futuras investigaciones si se desea subyacer a ésta, así pues, la disminución de puntos de control podría facilitar y precisar distintos modelos de las rutas o tal ves no.

En el 2013 se realiza un trabajo acerca de la medida de la consistencia de las carreteras y la relación con la seguridad vial en la provincia de Granada. Laura Garach Morcillo comenta que el 35 % de los accidentes automovilísticos son producidos por la ineficiencia en el diseño de carreteras. Utiliza arboles de decisión para compara diferentes modelos de consistencia y así hallar la más adecuada para la construcción. Concluye que no sólo el defectuoso diseño de la carretera es el único factor que produce los accidentes, hay otros como el diseño del automóvil y el factor climático, además de la falta de señalización.

En el 2014 Yasmany Damián García Ramírez investigó acerca de modelos de aceleración y desaceleración por motivo de análisis de velocidades en carreteras. Describe modelos de aceleraciones y pruebas experimentales que le permiten obtener datos. A diferencia de este proyecto, su método experimental con exámenes a diferentes conductores lo aleja por completo de da-

tos y consideraciones físicas de dónde se pueden obtener resultados interesantes y medibles. Su proyecto se llamó "Aceleraciones y desaceleraciones de vehículos livianos en caminos de montaña" para la Universidad Nacional de San Juan.

## 2.2. Bases teóricas

### 2.2.1. Carreteras

Colombia, una nación en crecimiento tecnológico, económico, poblacional, etc., también necesita un crecimiento de la red vial puesto que se considera el medio por el que se moviliza la mayor cantidad de personas y de cargamento en el país. Por otra parte, estas carreteras deben satisfacer la demanda de ciudadanos que cada vez más circulan por estas redes de asfalto, obligando a las entidades correspondientes de tal construcción a estudiar minuciosamente todos los aspectos que deben cumplir todas las carreteras.

Uno de los aspectos que más interesa es el diseño geométrico que tiene la carretera, este está reglamentado por el Manual de Diseño Geométrico de Carreteras, aquí se encuentran muchos elementos que hacen de una carretera la más segura y cómoda para los usuarios.

Todas las carreteras están clasificadas de acuerdo a su funcionalidad, y el tipo de terreno. Esta clasificación, según el Manual de Diseño Geométrico de Carreteras (2013:5, 6) dice que, según su funcionalidad las carreteras se catalogan de acuerdo a la utilidad social e intereses nacionales:

- **Primaria:** Se consideran primarias todas las troncales, transversales que cumplen la función de permitir el ingreso a las diferentes zonas principales de producción y población del país. Estas, además, deben estar pavimentadas.
- **Secundarias:** Son aquellas que unen cabeceras municipales con carreteras primarias, estas pueden funcionar pavimentadas o en afirmado.
- **Terciarias:** Se trata de aquellas carreteras que unen las cabeceras municipales con veredas y las veredas entre sí. Estas carreteras deben estar en afirmado, en caso tal de estar pavimentadas deben actuar según la norma de una carretera de secundaria.

Categoría	Descripción
Terreno plano	Son aquellas que tienen pendientes transversales al eje de vía menores de cinco grados ( $5^\circ$ ). Además, sus pendientes longitudinales son menores de tres grados ( $3^\circ$ ). Aquí, le permite a los vehículos pesados mantener la misma velocidad de los vehículos livianos.
Terreno ondulado	Para estas las pendientes transversales van desde los seis hasta los trece grados ( $6^\circ - 13^\circ$ ), la pendiente longitudinal esta dada de tres a seis grados (3 % - 6 %). Esta obliga a los vehículos pesados a disminuir su velocidad por debajo de los livianos.
Terreno montañoso	Son todas aquellas carreteras que tiene un terreno que goza de trece hasta cuarenta grados de pendiente en su eje transversal ( $13^\circ - 40^\circ$ ) y sus pendientes longitudinales tiene un seis a un ocho por ciento de pendiente (6 % - 8 %). Este tipo de carretera obliga a los vehículos pesados a sostener la velocidad en rampa en distancias considerables.
Terreno escarpado	Son las carreteras que tienen un eje transversal con pendiente superior a cuarenta grados ( $40^\circ$ ) y una pendiente longitudinal superior a (8 %).

Cuadro 2.1: Tabla de tipos de carreteras según tipo de terreno tomada de [1]

**Según el tipo de terreno** Se clasifican por el tipo de terreno que predomina a lo largo de toda la carretera, puesto que se puede dar el caso de carreteras homogéneas con diferente tipo de terreno. Estas están listadas en la anterior tabla:

Para este proyecto de tesis es necesaria la interpretación de de la ruta Chusacá - Fusagasugá, esta carretera está ubicada en el departamento de Cundinamarca, es la encargada de conectar el sur del departamento con la capital del país. Más específicamente el municipio de Fusagasugá con Bogotá D.C. La elección de tal ruta no tiene más trascendencia salvo la que implica su

importancia geográfica e índices de accidentalidad.

La ruta cuenta con 40.8 kilómetros de extensión donde se lograron caracterizar 38 curvas importantes para el estudio. Así, brinda un análisis específico de este tramo de vía. La carretera, en estos momentos y según Via 40 Express [8], está en estudio puesto que tiene bastantes fallas geológicas pues, como se puede observar, se trata de una carretera absolutamente heterogénea. Diseñada con doble calzada en la totalidad de sus tramos y en ambos sentidos. Para la Concesión Bogotá girardot que cuenta con dos peajes (Chusacá, Chinauta), en el peaje de Chusacá transitan alrededor de 10.000 a 26.000 automóviles diariamente, en un fin de semana son alrededor de 35.000 y en un puente festivo transitan alrededor de 72.000 vehículos automotores. Las cifras del tránsito de la ruta son la demanda más importante del país en términos de cantidad. Es por esto que una cantidad importante de viajeros necesita una excelente calidad de servicio iniciando desde la estructura de la carretera hasta la de los mismos automóviles.

### **2.2.2. Automóviles**

Los automóviles son la parte más fundamental del proyecto, son lo que provocaron este estudio y sobre los que actúan todos los cálculos. La clasificación de los automóviles sería necesaria y se tomó en cuenta que, no necesariamente debe existir un modelo para cada tipo de automóvil sino que, para disminuir cálculos, se podría generalizar un poco los tipos de autos en evaluación, esto gracias a que se puede despreciar hasta ciertas dimensiones los automóviles para cálculos similares. Estas dimensiones se pueden encontrar en una tabla almacenada en los anexos de este proyecto.

Una de las partes más determinantes de nuestra investigación se centra en la obtención del coeficiente de rozamiento por que este dato cambia por completo los datos a obtener, y cuyo elemento se obtienen estrictamente de los neumáticos. Los neumáticos son la unión entre el vehículo y la carretera encargados de la adherencia y la fricción entre ambos. Los tipos de neumáticos se pueden diferenciar por su referencia inscrita en el propio neumático, la página web neumarket [13] dedicada a la venta de neumáticos nos brinda una excelente información acerca de todo lo que se debe conocer antes de adquirir un neumático. dentro de esta información tenemos los siguientes datos:

- **Ancho (milímetros):** El ancho de una llanta se mide en milímetros de extremo a extremo de la cinta de rodamiento, es el primer número que se encuentra en la referencia.
- **Perfil ( %):** Es la relación que existe entre la altura del costado y el ancho de la llanta. Este número se encuentra luego del indicador del ancho de la llanta antecedido por un barra inclinada y representa el porcentaje que ocupa el perfil de la llanta o costado con respecto al ancho de la llanta. En la figura se logra observar con mayor claridad este dato.
- **Construcción (R):** Este se refiere al tipo de construcción interna del neumático, casi todos los neumáticos tienen este tipo de construcción lo que indica que las cuerdas o hilos debajo del labrado corren por lo ancho de la llanta.
- **Diámetro del Rin (pulgadas):** El diámetro del rin indica que la llanta está diseñada para montarse en un rin de determinado diámetro. Este dato está dado en pulgadas y se encuentra justo al lado de la R en la referencia.
- **Índice de carga:** Es un dato que indica la capacidad máxima de resistencia del neumático al peso. Cuanto mayor el índice, mayor su capacidad de carga. En los anexos se encuentra la tabla que explica los datos máximos y mínimos y el rango de ellos de el índice de carga.

**Índice de velocidad:** Este valor es representado por una letra en mayúscula luego de el índice de carga, hace referencia a la velocidad máxima del neumático. Las diferentes categorías están en la gráfica depositada en los anexos.

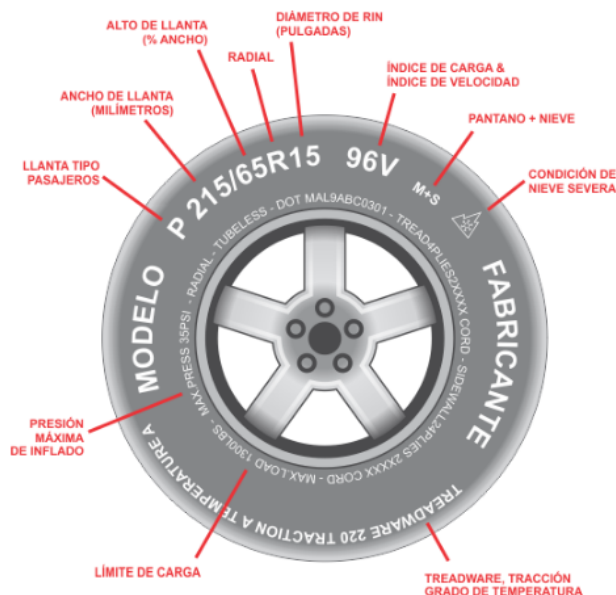


Figura 2.1: Referencias de neumáticos, tomado de: Virtual Llantas, [www.virtualllantas.com/todo-sobre-llantas/](http://www.virtualllantas.com/todo-sobre-llantas/)

La velocidad y el diseño del neumático están vinculados por factores que determinan el porqué están considerados como los mejores materiales para que trabajen unidos. Aseguran a los usuarios de su utilidad gracias a que tienen una excelente relación evidenciada en el coeficiente de rozamiento, según el libro publicada su última edición en 2007 Física general Schaum [16], que el coeficiente de rozamiento hace referencia al valor de la resistencia al deslizamiento producido por el contacto entre dos materiales, depende de muchos factores, entre ellos: el acabado de las superficies, la temperatura y la velocidad relativa entre ambos materiales. Entre más bajo el valor del coeficiente, mayor es su deslizamiento, por el contrario, entre más alto sea el coeficiente de rozamiento entre dos superficies, menor es la capacidad de deslizarse entre sí. Estos valores pueden considerarse desde el cero hasta mayores que la unidad. Para éste proyecto, el coeficiente de rozamiento que se tendrá en cuenta será para las superficies del neumático y la carretera, para el neumático se tiene en cuenta que esta producido con caucho o goma y las carreteras en Colombia están producidas con asfalto y algunas con mezcla de asfalto y alquitrán. La tabla correspondientes a los valores de los coeficientes esta reposada en los anexos del proyecto.

### 2.2.3. Índices de accidentalidad

El Instituto Nacional de Medicina Legal y Ciencias Forenses [11] brinda unas estadísticas con el fin de informar y alertar a la comunidad los municipios con mayores índices de accidentalidad junto con algunos datos de los tipos de accidentes con mayor frecuencia y el tipo de población más afectada históricamente.

La siguiente gráfica muestra la cantidad de accidentes de transporte casos y tasas por 100,000 habitantes desde el año 2009 hasta el 2018.

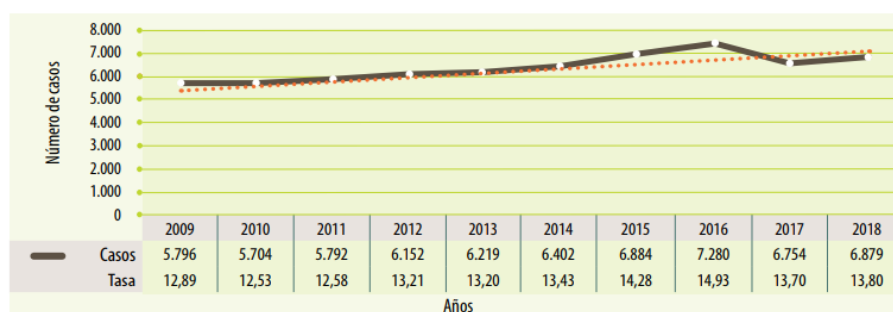


Figura 2.2: Muertes por accidente, casos y tasas. Colombia 2009 - 2018.

En los anexos se podrá verificar más información suministrada por la Institución y que será abordada más adelante.

### 2.2.4. Curvatura de carreteras y velocidades.

Las curvas de carreteras también puede modelarse desde una perspectiva matemática, este análisis permite conocer con exactitud a qué clase de curva se enfrentan los automóviles que transitan por determinada carretera. Existen dos datos importantes para el análisis de las curvas de las carreteras, estos son la curvatura y el radio de curvatura.

De acuerdo con la teoría local de curvas parametrizadas ver [22], éste primer elemento, la curvatura  $k(t)$  en un punto es una medida de la tasa de cambio del ángulo que los vectores tangentes cercanos hacen con el vector tangente en ese punto. Este valor es interpretado de tal manera que a mayor curvatura la curva se torna más abierta y a menor curvatura ocurre lo contrario. Se simboliza con la letra  $k(t)$  y su ecuación viene dada por la siguiente expresión:



Dada la función:

$$z(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [0, 1]$$

se tiene que,

$$k(x(t), y(t)) = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.1)$$

Junto con la curvatura está el siguiente elemento que asigna unidades de medida a la circunferencia. El radio de curvatura es el valor determinado por el segmento perpendicular a una curva hasta el centro de la circunferencia que determinada por la curvatura de la misma. Este valor es considerado inverso a la curvatura, luego su expresión está dada así:

$$R = \frac{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}} \quad (2.2)$$

O también:

$$R = \frac{1}{k} \quad (2.3)$$

Y viceversa:

$$k = \frac{1}{R} \quad (2.4)$$

En síntesis, todos los elementos abordados hasta el momento surgen a partir del movimiento. La velocidad es una magnitud Física descrita por la cantidad de tiempo que se necesita en recorrer determinado espacio, o bien, el cambio de posición en determinado tiempo. para este proyecto será necesario describir desde diferentes contextos tal magnitud, terreno plano, terreno inclinado, esto desde la perspectiva del terreno, por otro lado, desde el punto de vista del automóvil la manera de estudiar tiene que ver con la dinámica ejercida por los cuerpos en diferentes contextos.

La velocidad, como antes se mencionó, es la razón de cambio de la posición con respecto del

tiempo, en términos físicos:

$$v = \lim_{\Delta_r \rightarrow 0} \frac{\Delta_r}{\Delta_t} \quad (2.5)$$

Según la teoría de equilibrio, para que un automóvil no se salga de la calzada se debe manejar una estricta relación ya que, su fuerza de fricción debe ser igual a la fuerza centrífuga, entonces:

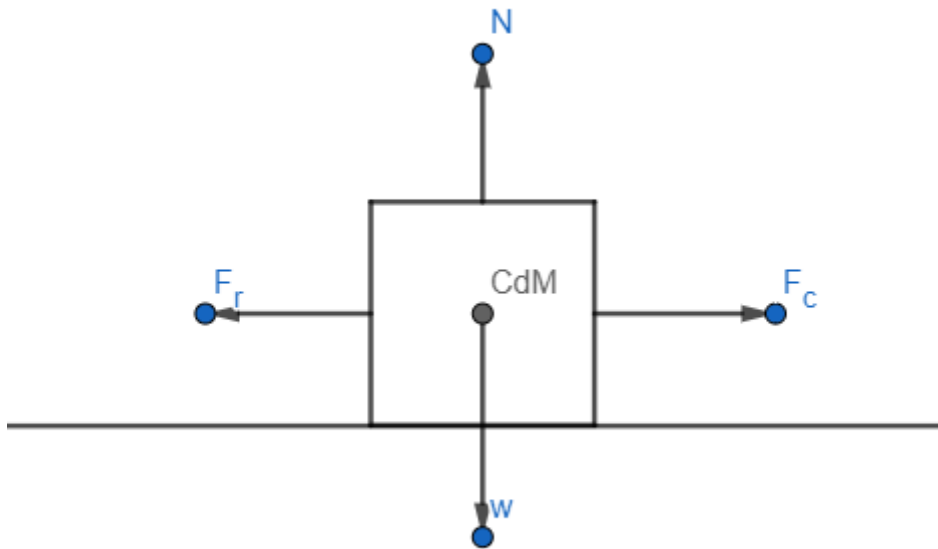


Figura 2.3: Fuerzas ejercidas sobre auto en curva plana.

De esta manera se puede precisar el valor de la velocidad, en este caso, gracias a la condición de equilibrio que expresa que para que el auto no realice un cambio brusco en su eje horizontal la fuerza centrífuga y la Fuerza de rozamiento deben ser de igual magnitud. Luego:

$$F_c = \frac{mv^2}{Rg} \quad (2.6)$$

$$F_r = \mu m \quad (2.7)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{Rg} &= \mu m \\ \frac{v^2}{R} &= \mu g \\ v^2 &= \mu Rg \\ v &= \sqrt{\mu Rg}\end{aligned}\tag{2.8}$$

La anterior es la velocidad para terreno plano teniendo en cuenta la fricción y el parámetro de gravedad.

Ahora, se analiza la velocidad para planos inclinados.

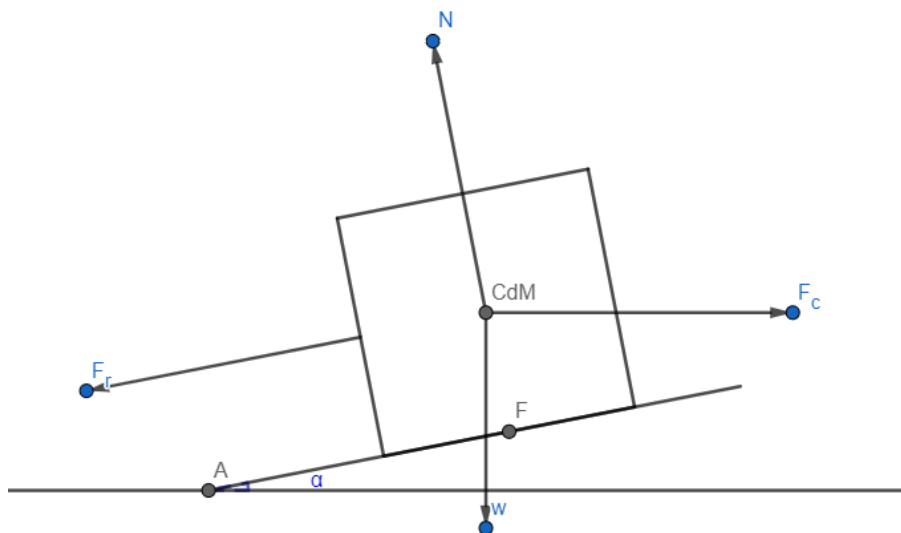


Figura 2.4: Fuerzas ejercidas sobre auto en plano inclinado.

Para este contexto, en primera medida, se debe tener en cuenta:

**Primeros datos:**

R = Radio de curvatura

$\alpha$  = Peralte

$N$  = Fuerza normal

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2} \quad (2.9)$$

$$F_r = \mu N \quad (2.10)$$

$$w = mg \quad (2.11)$$

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

Además se debe tener en cuenta la siguiente equivalencia que se puede comprobar a partir de la figura 2,4, tener en cuenta que el subíndice x e y de algunas fuerzas representa la componente en x e y respectivamente:

$$F_{cx} = F_r + w_x$$

$$F_c \cos \alpha = \mu N + w \sin \alpha \quad (2.12)$$

$$F_c \cos \alpha = \mu(F_{cy} + w_y) + w \sin \alpha$$

$$F_c \cos \alpha = \mu(F_c \sin \alpha + w \cos \alpha) + w \sin \alpha$$

$$\frac{mv^2}{R} \cos \alpha = \mu \left( \frac{mv^2}{R} \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha \right) + mg \sin \alpha$$

$$\frac{v^2}{R} \cos \alpha - \mu \frac{v^2}{R} \sin \alpha = g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Luego,

$$v^2 = \frac{Rg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

En conclusión,

$$v = \sqrt{\frac{Rg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}} \quad (2.13)$$

Esta última ecuación representa la velocidad máxima a la que debe transitar un vehículo una curva basándose en el peralte de la curva.

Hasta el momento están todas las condiciones necesarias para determinar suficientes parámetros de un automóvil en movimiento, sin embargo, incluso para pequeños cambios. Uno de los elementos más importantes de el análisis de curvas es el peralte. El peralte de una curva es la disminución de la elevación gradual del borde exterior con respecto al borde interior, esto con el fin de compensar el peso que lleve el cuerpo con la fuerza centrífuga, o bien, inercia. Además, sirve como rampa que expulsa el agua reposada en la carretera, es por ello que como mínimo el peralte de una carretera debe estar en los 0,5 %.

Si se tiene en cuenta el peralte de un plano y un automóvil transitando sobre la curva con fricción y el coeficiente de fricción determinado por  $\mu$ , la fórmula del peralte nace a partir de la anterior deducción, luego:

$$v = \sqrt{\frac{Rg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}}$$

$$v^2 = \frac{Rg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

$$\frac{v^2}{Rg} = \frac{(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} * \frac{\frac{1}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos \alpha}}$$

$$\frac{v^2}{Rg} = \frac{(\mu + \tan \alpha)}{1 - \mu \tan \alpha}$$

$$\frac{v^2}{Rg}(1 - \mu \tan \alpha) = (\mu + \tan \alpha)$$

$$\frac{v^2}{Rg} - \frac{v^2}{Rg} \mu \tan \alpha = (\mu + \tan \alpha)$$

$$\frac{v^2}{Rg} - \mu = \left( \frac{v^2}{Rg} + 1 \right) \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{v^2}{Rg} - \mu}{\frac{v^2}{Rg} + 1}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{v^2 - \mu Rg}{Rg}}{\frac{v^2 + Rg}{Rg}}$$

Y así se obtiene,

$$\tan \alpha = \frac{v^2 - \mu Rg}{v^2 + Rg} \quad (2.14)$$

La ecuación anterior se obtiene de la fórmula para la velocidad en un plano inclinado que más adelante será abordada.

Por otra parte, en dinámica se puede examinar y abordar la anterior temática a partir de los sucesos que se deben tener en cuenta dentro del automóvil cuando se entra en interacción con los efectos generados por una carretera en particular. La velocidad máxima, como se logra observar, también se puede precisar según torques internos de un automóvil. Es decir, que gracias a las propiedades de equilibrio y estabilidad del vehículo, se puede determinar con qué velocidad máxima puede transitar a lo largo de una curva con peralte hasta evitar que este derrape o se produzca un volcamiento. La expresión de esta naturaleza se puede deducir de la siguiente figura:

El torque es la capacidad de giro de una fuerza aplicada a un objeto a determinada distancia de

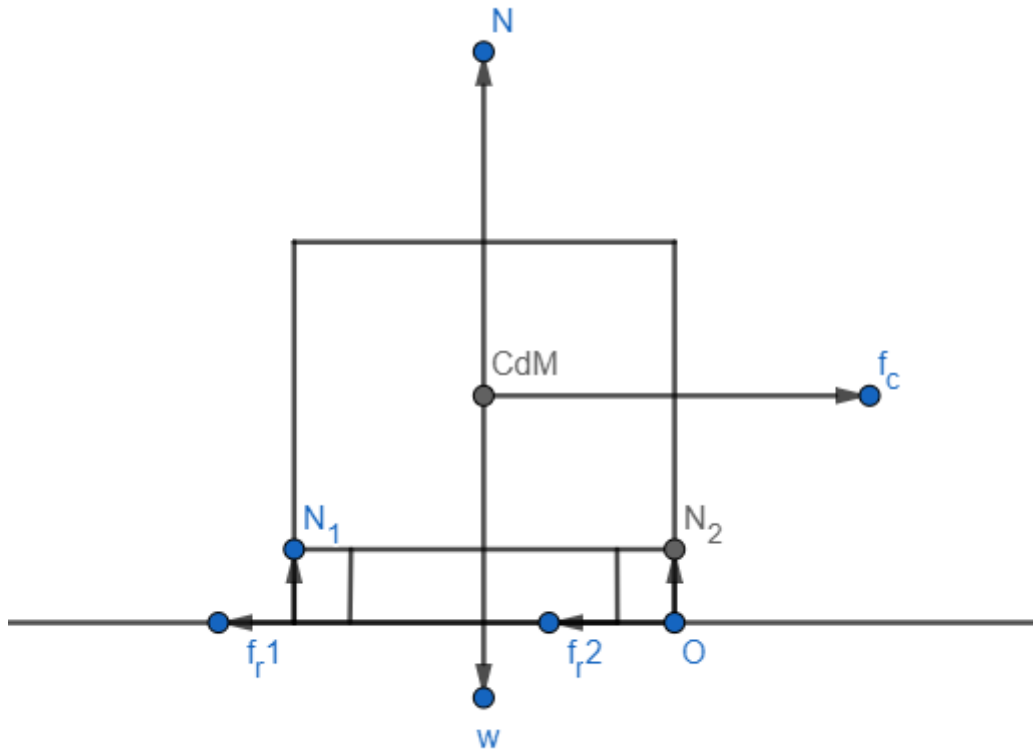


Figura 2.5: Fuerzas que actúan sobre un vehículo en una curva sin peralte con respecto del punto O.

un pivote referencial. Se dice que un cuerpo se encuentra en equilibrio cuando la suma de todos sus torques es igual a cero (0). Esto quiere decir que el vehículo se encontrará en equilibrio cuando la suma de todos sus torque sumen cero así:

$$-aN_1 + mgx_c - F_c y_c = 0 \quad (2.15)$$

Empieza a volcar cuando  $N_1 \leq 0$ , luego la ecuación queda reducida a:

$$mgx_c - F_c y_c = 0$$

$$mgx_c = F_c y_c$$

$$mgx_c = \frac{mv^2}{R} y_c$$

$$\begin{aligned}
 gx_c &= \frac{v^2}{R}y_c \\
 \frac{gRx_c}{y_c} &= v^2 \\
 v &= \sqrt{\frac{gRx_c}{y_c}}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Ahora, se deduce del plano inclinado la ecuación de la velocidad en función de los torques de un automóvil, es hora de tener en cuenta el peralte. Así, cuando se hagan los cálculos del parámetro obtendremos una fórmula basada en la condición de equilibrio pero sobre un plano inclinado. Luego, basándose en la siguiente figura:

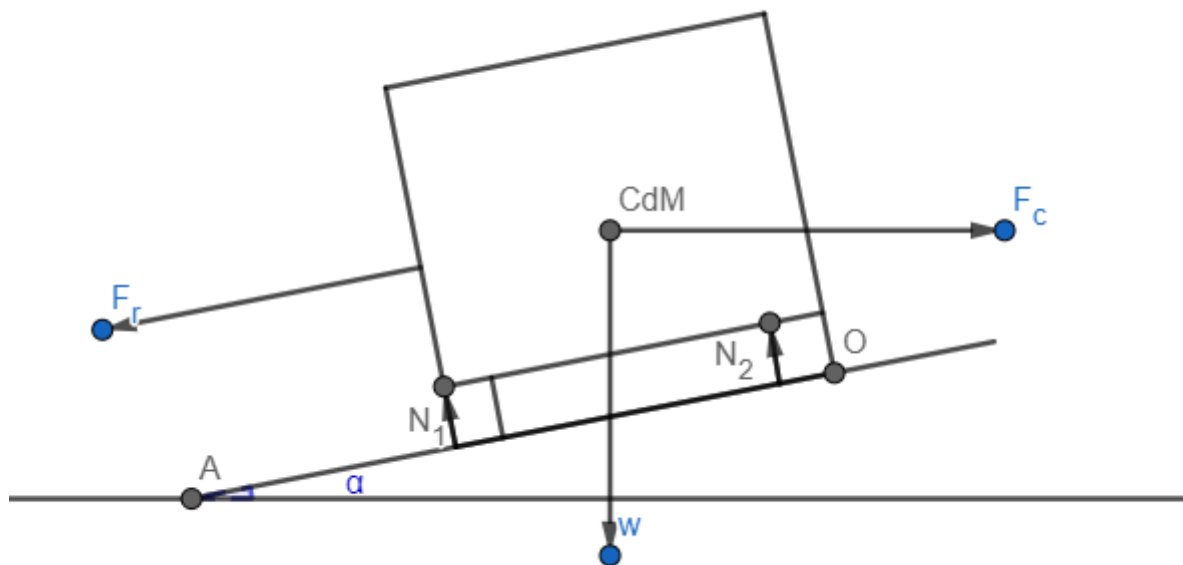


Figura 2.6: Fuerzas que actúan sobre un vehículo en una curva sin peralte con respecto del punto O.

Tenemos que, según la condición de equilibrio, los torques de un automóvil en un plano inclinado quedan expresados de la siguiente manera esto con respecto del punto O como se muestra en la figura 2,5:

En primer lugar se hace el cambio de coordenadas polares a cartesianas dada la inclinación del



plano, así,

$$x = x_c \cos \alpha \quad (2.17)$$

$$y = y_c \sin \alpha \quad (2.18)$$

$$w \sin \alpha y - f_c \sin \alpha y + w \cos \alpha x + f_c \cos \alpha x - N_1 a = 0$$

$$y \sin \alpha (w - f_c) + x \cos \alpha (w + f_c) = 0$$

$$y \sin \alpha \left( mg - \frac{mv^2}{R} \right) + x \cos \alpha \left( mg + \frac{mv^2}{R} \right) = 0$$

$$y \sin \alpha \left( g - \frac{v^2}{R} \right) + x \cos \alpha \left( g + \frac{v^2}{R} \right) = 0$$

$$g(y \sin \alpha + x \cos \alpha) + \frac{v^2}{R}(x \cos \alpha - y \sin \alpha) = 0$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{g(y \sin \alpha + x \cos \alpha)}{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)}$$

$$v = \sqrt{\frac{Rg(y \sin \alpha + x \cos \alpha)}{(x \cos \alpha - y \sin \alpha)}} \quad (2.19)$$

de esta manera queda expresada la ecuación de velocidad utilizando los torques como referentes.

### 2.2.5. Curvas de Bézier

Las curvas de Bézier nacen en los años 1960 para el diseño técnico primeramente para maquinas aeronáuticas y automotrices. Estas curvas son consideradas como un método de interpolación, además se deben gracias a los polinomios de Bernstein. Los polinomios de Bernstein son una clase particular de polinomios que se aproximan a una función  $f(x)$  expresado así:

**Splines:**

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad t \in [0, 1] \quad (2.20)$$

**Polinomios de Bernstein**

$$P(x) = \sum_{i=0}^n c_i * b_{i,n}(t) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad t \in [0, 1] \quad (2.21)$$

Luego, La curva de Bézier que pasa por los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^3$  desde  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  está dada por:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i * b_{i,n}(t)$$

O bien:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} P_i * t^i (1-t)^{n-i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad t \in [0, 1] \quad (2.22)$$

**Descripción:** El parámetro  $t$  tiene como dominio el intervalo  $[0, 1]$ , fuera de este dominio la curva deja de interpolar y continua dibujando el polinomio.  $n$  representa el grado del polinomio,  $i$  el iterador de la sumatoria.  $P_i$  son considerados "Puntos de control", estos puntos definen el inicio, final y los límites geométricos que tendrá la curva, además, cualquier modificación de algún punto de control, modificará inmediatamente la curva de Bézier. La curva solo interpola los puntos de control inicial y final. La curva generada por dichos puntos de control jamás saldrá del polígono de control, el polígono de control es el polígono formado por la unión de los puntos de control en orden secuencial. Un polinomio de grado  $n$  tiene  $n + 1$  puntos de control, la curva generada por determinados puntos de control se considera "Spline", la unión de varios Splines se llama "superficie de control".

Así es como se ve una Curva de Bézier de primer (1) grado.

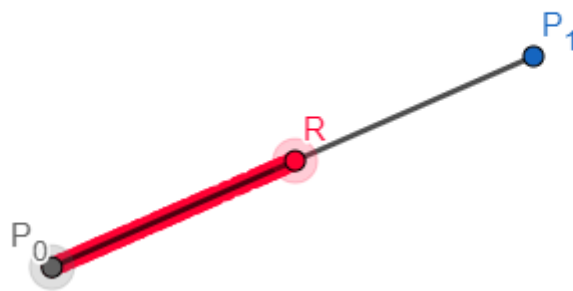


Figura 2.7: Curva de Bézier de primer grado.

Las curvas de Bézier tienen cierta particularidad, las curvas de mayor grado subyacen a las de grados anteriores, es decir, las curvas de segundo grado están hechas con dos curvas de primer

grado. Por ejemplo:

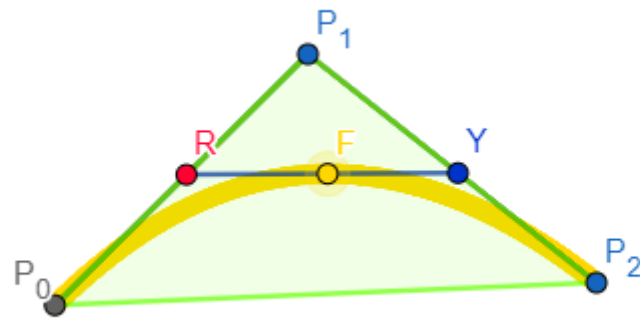


Figura 2.8: Curva de Bézier de segundo grado.

Así se ve una curva de Bézier de cuarto grado:

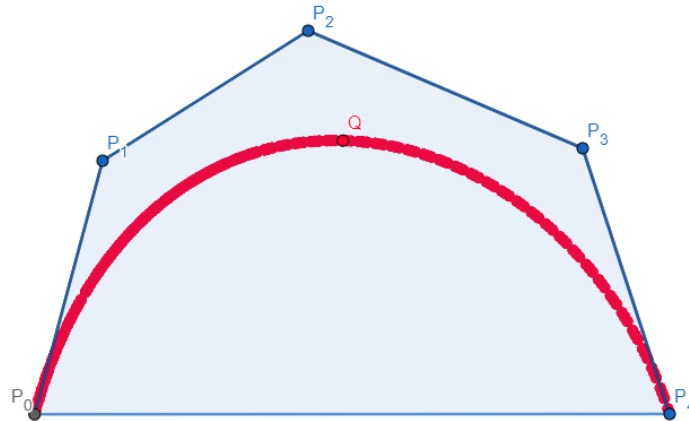


Figura 2.9: Curva de Bézier de cuarto grado.

**Puntos de control:** Los puntos de control, aquellos que determinan la trayectoria de la Curva de Bézier, se convierten en una pieza considerablemente útil cuando de modelar la carretera se trata, esto gracias a que, sin estos puntos de control, es imposible seguir la ruta mediante una función matemática. Es por esto que la obtención de estos puntos es imprescindible. Así pues, se resuelve considerar el siguiente sistema de ecuaciones encargado de determinar esos puntos de control a partir de los datos que se vienen obteniendo, entonces:

Sistema de ecuaciones de los polinomios de Bernstein:

$$BP = Q$$

$B$  = Polinomio de Bernstein de grado  $n$  evaluados en los tiempos  $m$ .  $B_{(n \times m)}$

$P$  = Puntos de control de la curva.

$Q$  = Puntos sobre la curva o ruta.

Entonces, el sistema de ecuaciones queda así:

$$BP = Q \implies \begin{bmatrix} B_0^n(t_0) & B_1^n(t_0) & B_2^n(t_0) & \dots & B_n^n(t_0) \\ B_0^n(t_1) & B_1^n(t_1) & B_2^n(t_1) & \dots & B_n^n(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^n(t_m) & B_1^n(t_m) & B_2^n(t_m) & \dots & B_n^n(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Ahora, se resuelve el anterior sistema de ecuaciones así:

$$B^t BP = B^t Q$$

luego,

$$P = (B^t B)^{-1} B^t Q \quad (2.24)$$

Esto es,

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} B_0^n(t_0) & \dots & B_0^n(t_m) \\ B_1^n(t_0) & \dots & B_1^n(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n^n(t_0) & \dots & B_n^n(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0^n(t_0) & \dots & B_n^n(t_0) \\ B_0^n(t_1) & \dots & B_n^n(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0^n(t_m) & \dots & B_n^n(t_m) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_0^n(t_0) & \dots & B_0^n(t_m) \\ B_1^n(t_0) & \dots & B_1^n(t_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n^n(t_0) & \dots & B_n^n(t_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

De esta manera se obtiene la solución de el sistema de ecuaciones donde como resultado nos arroja una matriz de  $n \times 1$  que es la matriz de los puntos de control. Puntos de inmensa relevancia porque sin ellos la curva de Bézier no existiría.

### **2.2.6. Software Geográfico**

QGIS es un sistema de información geográfico de código abierto brindado para diversos sistemas operativos entre ellos: Linux, Unix, MAC OSX, Windows, Android. Que le permite al usuario obtener y manipular diferentes tipos de datos geográficos con una cobertura eficaz. Además de sus múltiples funciones, permite que el usuario cree sus propias funciones a partir de la codificación por medio de lenguajes de programación, ellos son: Python y C++.

### **2.2.7. Lenguaje de programación.**

Python es un lenguaje de programación desarrollado en 1991 por Guido Van Rossum, con una sintaxis de alto nivel e interpretado y dinámico. Orientado a científicos e ingenieros se considera como uno de los mejores realizando cálculos con necesaria rapidez. Su última versión es la 3.7.3.



# Capítulo 3

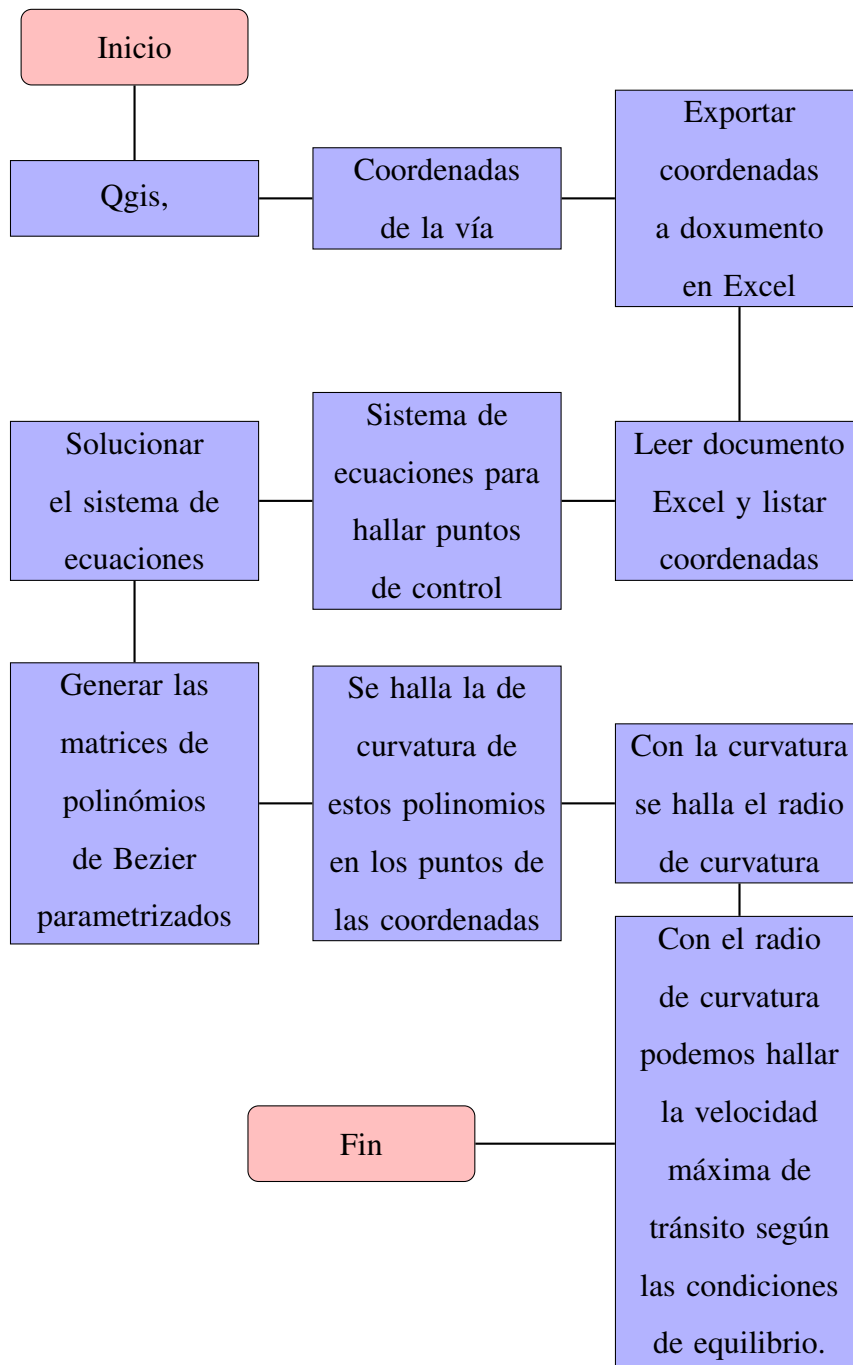
## Marco metodológico

### 3.1. Tipo y diseño de investigación

Este proyecto experimental ha sido constituido por diferentes elementos que al trabajar conjuntamente han conseguido el resultado esperado, el algoritmo que se ha desarrollado tiene muchos componentes importantes tanto matemáticos y físicos como informáticos. Estos componentes informáticos van desde la utilización del lenguaje de programación Python 3.6 [8] para la realización de extensos cálculos matemáticos y las gráficas de las curvas de las carreteras que le brindan veracidad, de tipo visual, al método. Por otro lado, El software libre QGIS tiene uno de los papeles más importantes en todo el proceso, éste es el primer paso de la digitalización de la carretera partiendo de la visualización satelital y así llegar a obtener datos para el respectivo estudio. El siguiente diagrama de flujo explica a grandes rasgos el algoritmo y sus alcances:

#### **Diagrama de flujo**





En general, se realizan tres procesos importantes que nos conducen a los resultados esperados, todos se llevan a cabo en el mismo orden para cada curva en cuestión y en el siguiente orden::

Proceso 1: Digitalización de la carretera.

Proceso 2: Ejecución del método de interpolación.

Proceso 3: Cálculo de curvas y relación entre velocidad, peralte y radio de curvatura.

#### **3.1.1. Digitalización de la carretera.**

Iniciar con este proceso consta de varias ayudas externas al código generado. Entre estas ayudas encontramos varios software libres de gran interés para la localización geográfica de nuestra ruta y así iniciar con la digitalización.

##### **3.1.1.1. Elección de la carretera**

La ruta Bogotá - Fusagasugá desde la altura de Chusacá hasta el cruce de Cucharal es la vía de elección, este tramo de carretera fue elegido por sus condiciones geológicas, su demanda de usuarios y la importancia que requiere en una ubicación tan significativa. Además, el entorno social siempre estará beneficiado por esta carretera pues, es de notar, que todos los componentes económicos de una sociedad y en específico, el movimiento económico en Fusagasugá se debe en su gran mayoría a este medio de transporte. Algunas noticias de accidentalidad motivaron a que se hiciera un riguroso estudio para descartar factores cotidianos por lo que se presenta tanto nivel de accidentalidad en esta ruta en específico. Por otro lado, las simultaneas restricciones adjudicadas por las autoridades competentes, han disminuido drásticamente el flujo vehicular puesto que, ante cualquier accidente, como primera medida se disminuyen los límites máximos de velocidad, para esta instancia y con un índice de accidentalidad en elevación nace la intriga si estos índices se deben entonces a la velocidad y es así como se generan las primeras dudas acerca de los métodos de prevención.

### 3.1.1.2. QGIS

El software libre QGIS permite tener acceso a muchos datos de cualquier parte del mundo. Para este proyecto ayudó a conseguir las coordenadas  $x$  e  $y$  de ciertos puntos específicos de la vía. Permitted la subdivisión de cada curva separando puntos a una distancia cercana los 100 metros, esto con el fin de brindar generalidad con todas las curvas pues, se logra evidenciar que la vía desde Chusacá hasta Fusagasugá no tiene una curvatura muy pronunciada o cambios bruscos en una curva en específico a diferencia de otras lo que permite realizar cálculos muy precisos con la separación anteriormente mencionada; y estos puntos guardan las coordenadas en los atributos de cada capa. Los atributos son cientos de características de un elemento específico. Además, concede la posibilidad de exportar estos datos en un formato Excel y las coordenadas mantenían su valor decimal intacto, esto mejoraba su manipulación en el siguiente paso del proceso de esta investigación.

	A	B
1	X	Y
2	-74,25937	4,542
3	-74,26020254	4,541462775
4	-74,2610526	4,540941706
5	-74,26180459	4,540281696
6	-74,26267689	4,539794731
7	-74,26361861	4,539491931
8	-74,26452887	4,53983887
9	-74,26505	4,54068

Figura 3.1: Formato Excel de coordenadas exportadas de QGIS.

Estas coordenadas están proporcionadas a partir de una apreciación realizada por el programa QGIS, luego se ubican en el centro de la carretera en el sentido Bogotá - Fusagasugá, esto con el fin de no generar brechas considerables entre el carril lento y el carril rápido.

### 3.1.2. Ejecución del método de interpolación

#### 3.1.2.1. Python 3.6

El lenguaje de programación Python 3.6 fue eficaz en cada uno de los pasos para la obtención de resultados. La lógica usada para solucionar problemas encontrados durante el proceso va de la mano con la sintaxis necesaria para escribir las líneas de código. Este lenguaje se caracteriza por su impresionante procesamiento de cantidades inimaginables de datos. Su elección se debe además a que va dirigido a científicos e ingenieros. El método de interpolación utilizado necesitaba algún soporte que lograra computar con facilidad y rapidez los cálculos necesarios y éste cumplió con totalidad los requisitos. El ambiente gráfico ofrecido para Python con ayuda del paquete matplotlib es infinitamente comprensible además que no admite brechas entre los datos generados y las gráficas que simultáneamente se obtuvieron luego de observar los cambios que se obtenían a partir de los pequeños ajustes que se codificaban.

#### 3.1.2.2. Curvas de Bézier

Las aplicaciones de las matemáticas es el fundamento del proyecto, la necesidad de hallar esa aplicación arrojó varios temas entre ellos las curvas de Bézier que, originalmente, nacen para el diseño técnico primeramente de automóviles, luego de investigar el método surge la idea de modelar algo más que para lo que están echas estas curvas. Efectivamente las curvas de Bézier son aplicables a muchos ámbitos, sin embargo, la manera como se utiliza en este proyecto no sería precisamente idónea pues, si bien se trata de un método que pretende suavizar curvas, aquí queríamos adecuar la curva a una ya existente y nacen acá una serie de inconvenientes para lograrlo.

El método de Curvas de Bézier tiene una primer característica que es su dominio, el parámetro  $t$  sólo permite interpolar dentro de intervalo  $[0, 1]$  lo cual iba a simular la escala de tiempo para el ejercicio de la carretera.

En el ejercicio de indagar una forma de realizar la interpolación se encuentra con un mecanismo que brinda visualmente una interesante manera de observar el recorrido de una función. Las curvas de Bézier, al ejecutarse bajo un parámetro  $t$  representando el tiempo de recorrido o

interpolación, se asemeja al recorrido de una partícula sobre una función. Esto le ofrece algo de dinamismo al ejercicio de interpolar una carretera y, además, ejecutar cálculos sobre dicha partícula que posteriormente obtendrá una forma de vehículo para fines físicos.

### 3.1.2.3. Interpolación

El programa arroja 38 gráficas, todas unidas conforman la vía Bogotá - Fusagasugá. En estas gráficas se muestra el modelado de cada curva y la velocidad máxima en cada punto específico. Sobre cada curva hay tanta cantidad de puntos según la distancia de la curva. Es decir, cada 100 o 120 metros hay un punto sobre la vía. Cada punto tiene su coordenada obtenida del documento Excel y ésta es manipulada para que obtenga la escala real dado que la coordenada no está en términos de metros.

En la siguiente gráfica se muestran los puntos de color negro sobre la vía:

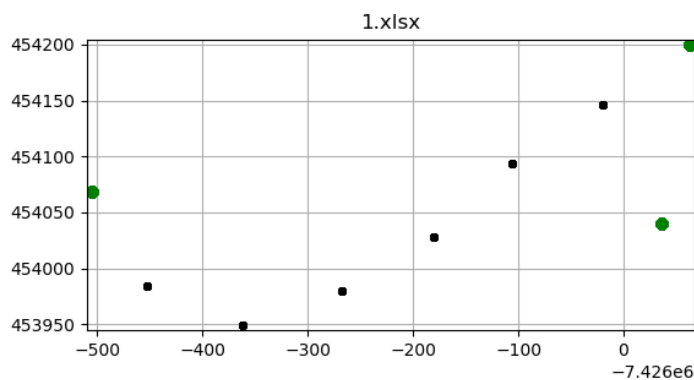


Figura 3.2: Gráfica de coordenadas de la curva 1.

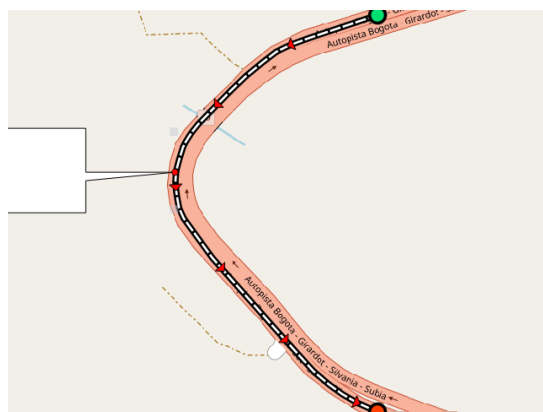
Ahora, se puede ejecutar el sistema de ecuaciones que busca los puntos de control, son los que se encuentran en color verde. La cantidad de puntos sobre la vía es igual a la cantidad de puntos de control, pero en las gráficas no siempre se muestran los puntos de control puesto que tienen coordenadas que se salen de la dinámica visual.

Entonces, una buena cantidad de puntos hace que la ruta se modele con exactitud sin embargo, no es óptimo desde un punto de vista informático. Es decir, la memoria necesaria para almacenar todos los datos a los que se debe enfrentar el código se podría disminuir si se disminuyeran los puntos de control, disminuir los puntos de control no es imposible, sin embargo la precisión con la que generaría la gráfica no sería la misma pero los cálculos serían considerablemente menos. El programa imprime lo siguiente:

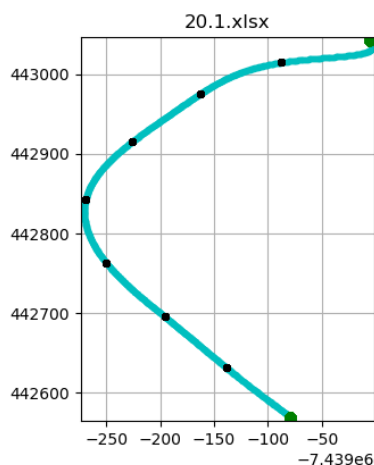
```
Puntos de control de la curva a determinado tiempo.  
[[-7430838.99780787 453810.99986624]  
 [-7431171.51861338 453811.18735698]  
 [-7429622.77288445 453475.14141143]  
 [-7434662.46760062 453636.2846814 ]  
 [-7423645.32912777 454131.69905945]  
 [-7440084.12478799 451399.43379683]  
 [-7422147.82341837 456690.54238287]  
 [-7437285.88091027 449422.24033956]  
 [-7427802.99149405 456041.70692866]  
 [-7432410.37654205 452210.1778199 ]  
 [-7431086.01649245 453470.81907232]  
 [-7431277. 453261. ]]
```

Figura 3.3: Puntos de control curva 1.

El anterior proceso es uno de los más importantes, al hallar los puntos de control se podrá graficar la curva, dado que se trata de un sistema de ecuaciones (2.24), este genera los puntos de control con una precisión impecable, al alterar estos puntos de control se verá alterada toda la curva y dejará de interpolar como corresponde, luego su ubicación es precisa y se evidencia si se permite contrastar con la curva original del sistema de información geográfico (QGIS) como se muestra en la figura (3.4) Una vez hallados los puntos de control se procede a graficar la curva. Esta debe pasar exactamente por los puntos extraídos del programa QGIS. La impresión de esta gráfica debe modificarse puesto que la salida no está dada con las dimensiones, sin embargo el contraste entre la ruta normal y el modelado por Curvas de Bézier queda de la siguiente manera:



(a) Carretera en QGIS



(b) Interpolación en Python

Figura 3.4: Ejemplo curva 25

En la anterior figura es notable cómo actúan los puntos de control sin embargo no se ven en la gráfica pues, sólo es posible observar los puntos inicial y final que delimitan los extremos de las curvas, el resto de puntos de control el programa los ubica donde considere el sistema de ecuaciones interpolará con exactitud.

Así es el proceso de interpolado, modelado y gráfica de la curva. Luego de esto se continúa con los cálculos de velocidad. Para estos cálculos se deben tener en cuenta varios componentes de la carretera y de los vehículos automotores con el ánimo de conseguir la mayor precisión posible.

Por fortuna, gracias a las condiciones en las que se vienen manipulando las coordenadas, permite manejarlas de tal manera que se logra crear la curva parametrizada para así poder manipular con ayuda del Cálculo Diferencial. La separación de coordenadas  $x$  e  $y$  es necesaria, individualmente se procede a realizar el calculo de la curvatura con ayuda de su ecuación. Python permite diferenciar polinomios de magnitud considerable, en general, cualquier polinomio diferenciable para la curva anteriormente mencionada, el polinomio que deriva el programa está introducido en un arreglo o matriz y así lo lee el programa:

$$-7430838,99780787t^1 - 81742886,7047472t^10(-t + 1) - 408629252,508645t^9(-t + 1)^2 - 1226719307,1541t^8(-t + 1)^3 - 2449802958,61216t^7(-t + 1)^4 - 3437318865,65205t^6(-t + 1)^5 - 3429032294,41929t^5(-t + 1)^6 - 2454304340,70039t^4(-t + 1)^7 - 1225587493,59652t^3(-t + 1)^8 - 408782570,709813t^2(-t + 1)^9 - 81741946,181417t(-t + 1)^10 - 7431277,0(-t + 1)^11$$

Este primer polinomio es para la la función paramétrica en  $x$ , ahora, en la componente  $y$ :

$$453810,999866243t^{11} + 4991923,06092678t^{10}(-t + 1) + 24941132,7776286t^9(-t + 1)^2 + 74849986,9724312t^8(-t + 1)^3 + 149863460,689618t^7(-t + 1)^4 + 208546538,414135t^6(-t + 1)^5 + 210991030,580885t^5(-t + 1)^6 + 148309339,312056t^4(-t + 1)^7 + 75246881,6432294t^3(-t + 1)^8 + 24871559,7800943t^2(-t + 1)^9 + 4988179,00979556t(-t + 1)^10 + 453261,0(-t + 1)^11$$

Estas coordenadas son el pilar principal del modelado de la carretera, con el parámetro  $t$  en un dominio entre  $[0, 1]$  es capaz de generar la curva de principio a fin atravez de las coordenadas sobre la carretera y siguiendo los puntos de control.

Para generar los anteriores polinomios es necesario utilizar la ecuación (2.22), se trata de el polinomio generado gracias a los puntos de control. Este anterior ejemplo es generado para una curva en específico, todas las curvas tienen polinomios diferentes dependiendo de la ubicación de los puntos de control en el plano y de la cantidad de puntos sobre la curva.

Por otro lado, este polinomio ejecuta su interpolación en el dominio  $[0, 1]$ , luego de este dominio el polinomio se sigue ejecutando para todos los reales sin ninguna contraindicación.

Una vez obtenida esta función paramétrica, el paso a seguir es el tratamiento matemático y físi-



co pertinente.

### 3.1.3. Cálculo de curvas y relación de velocidad, peralte y radio de curvatura

La curvatura es el parámetro principal que se quiere obtener para iniciar con los cálculos de velocidad, peralte y radio de curvatura. para este dato es necesario acudir a la ecuación (2.18), es la ecuación de velocidad máxima con los torques de referentes, teniendo en cuenta el centro de masa, el coeficiente de fricción, el peralte y radio de curvatura. Se abarcará cada uno según corresponda.

El centro de masa pretende definir varias cosas del proyecto. En principio, realizar los cálculos de velocidad máxima para una curva con determinado peralte y el coeficiente de fricción no tendría nada de sentido si no se actúa sobre un vehículo, actuar sobre un vehículo implica que se debe tener en cuenta las condiciones dimensionales del vehículo y más ampliamente, de cualquier vehículo. Es por eso que se optó por generar diferentes datos para cada uno de los tipos de vehículos por los que dicha carretera circulan. Todos estos datos están dados para todas las curvas y para todos los puntos sobre ellas y los tipos de carros están listados en el cuadro 5,3, Tabla de pesos y dimensiones de los automotores. Para el caso, la fórmula (2.18) necesita datos del medio de transporte referentes a las dimensiones del mismo, además es necesario el centro de masa generalizado, si bien tenemos diferentes tipos de vehículos, generar una fórmula para cada tipo en particular ignorando que cada vehículo podría tener cambios dependiendo de cada situación lo mejor es tomar una fórmula general que se adecue a cada tipo de auto y genere valores cercanos a los esperados:

$$CdM = \left( \frac{Alturadelvehículo}{2}, \frac{Anchodelvehículo}{2} \right) \quad (3.1)$$

Así se puede generalizar de una mejor manera el centro de masa con respecto a cada tipo de auto. Más adelante, se puede evidenciar cómo el centro de masa cumple una función considerable con los resultados.

Por otra parte, el coeficiente de fricción obedece a la estructuración de la carretera con respecto del neumático, para una carretera como el tramo entre Chusacá y Fusagasugá, carretera creada con asfalto en su mayoría además con una mezcla de alquitrán en algunos casos el coeficiente de fricción tomado fue de 0,5 basados en el cuadro 6.1 de los anexos. Aquí se puede verificar que esta selección del coeficiente de fricción es adecuada dado que se trata de un rango para velocidades superiores a 50 km/h y en un terreno seco o húmedo.

El peralte, como se comentaba al inicio del proyecto, existe dos parámetros que ya no se pueden modificar, La construcción o geometría de la carretera y, por supuesto, el peralte de ella. Para este trabajo y para fines de precisión se consideró pertinente la existencia de los datos reales de peralte a lo largo de todas las curvas de la vía. Esto se consigue gracias a un estudio de topografía y geometría que generara todos estos datos con exactitud. A continuación, se puede observar cómo el código lee el Excel anteriormente conformado por el las coordenadas y el peralte real en los diferentes tramos sobre una curva.

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,25937	4,542		8	35 22
-74,26020254	4,541462775		8	35 22
-74,2610526	4,540941706		8	35 22
-74,26180459	4,540281696		8	19 2
-74,26267689	4,539794731		8	19 2
-74,26361861	4,539491931		5	35 15
-74,26452887	4,53983887		5	35 15
-74,26505	4,54068		5	35 15

Figura 3.5: Peralte en términos de grados, minutos y segundos de la curva 1.

La anterior figura es la muestra de un excel que debe leer el código, este formato es único y aplica para una curva en específico, esto se realiza con cada curva sobre la carretera sin excepción. El peralte de cada tramo de carretera debía ser supervisado para que no se diera un peralte erróneo, es decir, que se regula que cada punto sobre la vía tenga el peralte correspondiente al kilómetro al que pertenece. Este peralte era el otro dato que recibía el código. Este tomaba el ángulo y lo transformaba a radianes para poder efectuar los cálculos necesarios para la velocidad. Quedando así introducidos todos los parámetros necesarios para generar las velocidades necesarias en cada punto de la curva y para todos los tramos de curvas en toda la carretera.

Como se había comentado, el código le permite al usuario conocer diferentes velocidades dependiendo de las necesidades. Es decir, se puede conocer la velocidad máxima en cualquier punto de la carretera, esto discrimina el tipo de automóvil y si la carretera tiene algún peralte dependiendo de la ecuación de velocidad y los parámetros que se quieran incluir. Por otro lado, para fines de precisión se ha decidido dar validez al peralte, que es un referente importante de construcción geométrica de cualquier carretera. Este factor le daría fiabilidad al método y corrobora los primeros acercamientos a la realidad.

```
la curvatura es:
C = 0.0076096755276623155
Este valor representa el radio de curvatura.
R = 131.4116477588104
Este es la velocidad con el peralte en km/h:
83.61267197190537
```

Figura 3.6: Resultados arrojados por el código

```
la curvatura es:
C = 0.0037334700107660886
Este valor representa el radio de curvatura.
R = 267.84733695900377
Este es la velocidad con el peralte en km/h:
119.37100167159014
```

Figura 3.7: Resultados arrojados por el código

Las anteriores imágenes explican el resultado del código con una curva particular. Gracias al polinomio anteriormente obtenido, el programa introduce este polinomio y hace particiones de tiempo dependiendo de la cantidad de puntos sobre la curva, dentro del dominio estipulado. Así, el código empieza generando cálculos en cada momento que le permiten llegar a varios datos de cada curva. En principio, el código halla la curvatura gracias a la ecuación (2.1) está curvatura se refleja en la anterior figura, la curvatura allí mostrada representa la curvatura en un punto sobre la curva, para cada punto existe una curvatura diferente. Para conseguir este resultado lo primordial es empatar las particiones de tiempo con la ubicación temporal de cada punto sobre la vía y evaluar según corresponda. Así pues, es posible obtener curvatura, radio de curvatura.

Luego, con los datos recolectados y gracias a la ecuación de equilibrio con relación al torque, también se puede hallar las velocidades para cada punto. En consecuencia, la curvatura, el radio de curvatura y la velocidad son los datos que imprime el código para un punto en específico sobre la curva.

Entre ellos hay más procesos ya mencionados, la utilización del peralte, dimensiones del vehículo y coeficiente de fricción, además de los parámetros naturales como la gravedad. Todos estos procesos juntos generan los fundamentos necesarios para que el código cree la imagen que permite apreciar el resultado. En la siguiente gráfica está reflejado este proceso teniendo en cuenta peralte de la carretera, coeficiente de rozamiento de los neumáticos con respecto del suelo, centro de masa del vehículo. Y como resultado nos muestra:

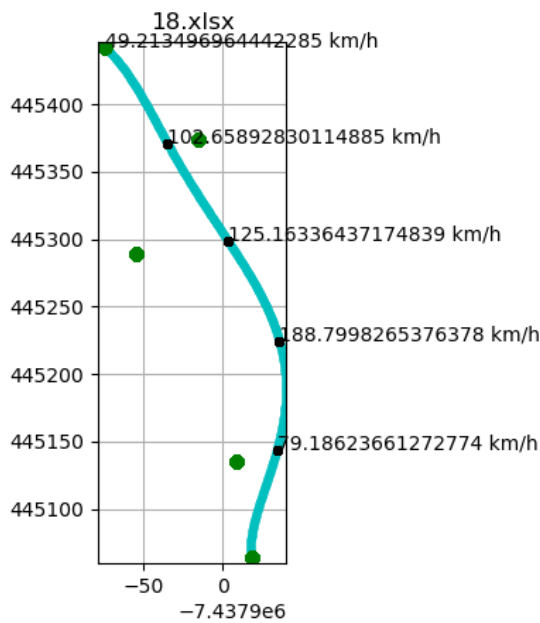


Figura 3.8: Curva 22 y velocidades.

La anterior imagen muestra el resultado de los pasos a seguir del modelo propuesto, dentro del todo el proceso se puede apreciar la utilidad de los puntos de control. En la anterior imagen se puede observar que ellos ya se ubican más cercanos a la curva (en color verde), ofreciendo una distinción más precisa con respecto de los de la curva representados en color negro. Además se observa cómo interactúa las velocidades a lo largo de la curva, dando generosidad a las partes

más rectas y disminuyendo velocidad a las más curvas.

Sin embargo, estas velocidades sólo son consideradas para un automóvil. Es por esto que se considera realizar todos los cálculos necesarios a lo largo de toda la vía para diferentes tipos de vehículos. La clasificación de los tipos de vehículos se encuentran en el cuadro (6.3) donde se puede observar los parámetros tenidos en cuenta con los once diferentes tipos de vehículo, ya sea de carga o de transporte de pasajeros. Esta diferencia dimensional se evidencia en los cálculos de las velocidades, a continuación se encuentra una tabla de las velocidades obtenidas por los diferentes vehículos en una curva en particular:

Automóvil	Camioneta	Minivan	Van	Aerovan	Camión peq	Camion grar	Doble troqu	Camion 4 eje	Tractomula	Buseta (20)	Buseta (40)
132.116426	132.234395	132.541407	132.516806	132.642318	131.912537	133.671574	133.906681	134.142232	134.142232	132.613478	132.642318
188.618184	188.786604	189.224915	189.189794	189.368982	188.327100	190.838417	191.174071	191.510360	191.510360	189.327809	189.368982
255.745742	255.959633	256.516219	256.471624	256.699142	255.376038	258.564333	258.990244	259.416906	259.416906	256.646864	256.699142
446.354990	446.728296	447.699971	447.621878	448.018967	445.709743	451.274299	452.017645	452.762300	452.762300	447.927726	448.018967
152.230387	152.287366	152.435507	152.423645	152.484152	152.131834	152.978989	153.091682	153.204460	153.204460	152.470252	152.484152
103.332745	103.371422	103.471978	103.463926	103.504998	103.265847	103.84089	103.917385	103.993938	103.993938	103.495563	103.504998

Figura 3.9: Curva 1, velocidades de diferentes tipos de vehículos.

# Capítulo 4

## Análisis e interpretación de resultados

### 4.1. Resultados

En las siguientes imágenes se puede evidenciar cómo actúa la interpolación con respecto de las coordenadas obtenidas y del método aplicado. Además, se reflejan los cálculos físicos hechos para construir la velocidad máxima en cada una de las curvas en diferentes lugares específicos de la carretera. Además de el análisis de las curvas con índices de accidentalidad elevados o antecedentes para así contrastar con los resultados del modelo y concluir bajo determinados términos básicos dicha consecuencia.

Así se ve toda la carretera desde Chusacá hasta Fusagasugá.

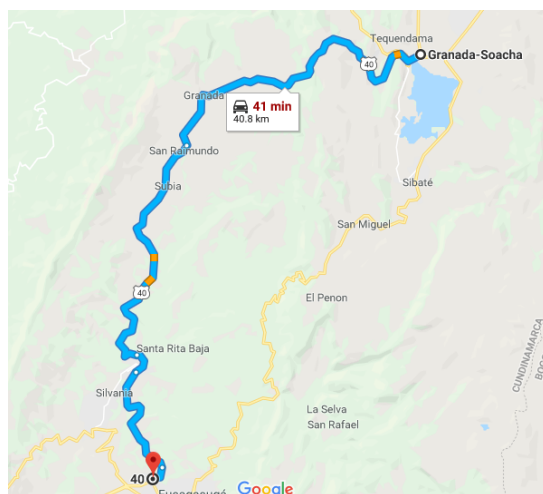


Figura 4.1: Ruta Bogotá - Fusagasugá tomada de [9]

Ahora, se exponen los resultados arrojados por el algoritmo, es aquí donde se unen todos los procesos sistemáticos y metódicos que le dan sentido a los cálculos. Este se desglosó en 38 curvas, la primera de esas 38 curvas es:

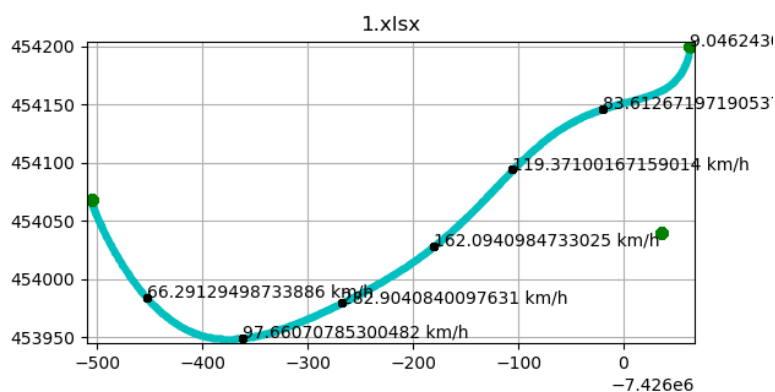


Figura 4.2: Curva 1

La anterior imagen obedece al siguiente tramo de curva ubicado en la parte sur de la capital del país:

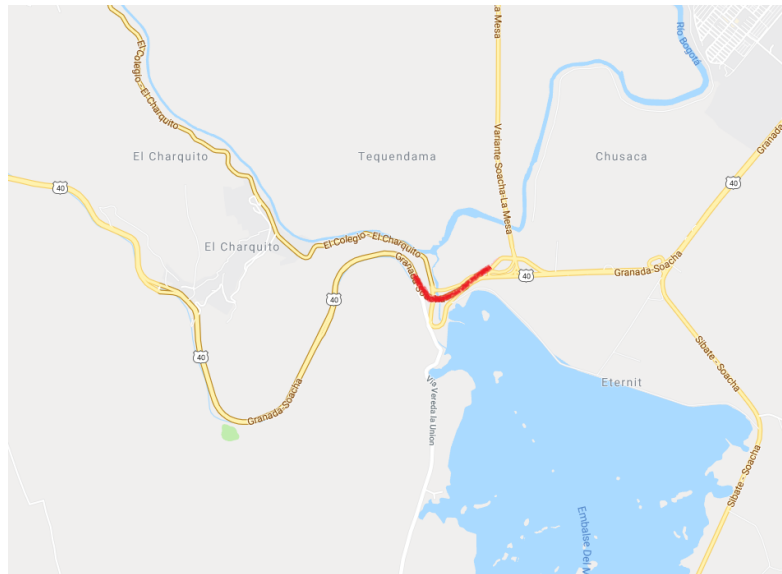


Figura 4.3: Curva 1, tomada de Google Maps.

La figura 4.2 se obtiene del programa compilado, es solo una de las 38 gráficas extraídas de la ruta y digitalizadas. Habiendo seleccionado una curva en particular esta es manipulada por el algoritmo matemático que toma pequeños y diferentes datos de cada proceso y lo envía al siguiente paso para empezar a brindar los cálculos necesarios para así conseguir las velocidades requeridas.



## 4.2. Análisis de resultados

Los resultados obtenidos fueron de la mano en cada instante del proceso con los objetivos planteados al inicio de la investigación.

### 4.2.1. La carretera.

La vía Bogotá - Girardot es una de las que está en primer lugar por su peligrosidad automovilística. Según un estudio realizado por Fondo de prevención vial [10] Según la Secretaria de transporte de Cundinamarca [12], en el 2016 se registró que Soacha es el municipio con mayor índice de accidentes con histórico de muertos y lo sigue el Municipio de Fusagasugá. y la mayor cantidad de personas implicadas se trata de peatones que circulan en la vía. Gracias a los datos brindados por el Instituto de Medicina Legal y Ciencias Forenses se puede verificar que, los últimos 10 años los índices de accidentalidad se han venido incrementando a pesar que las campañas y restricciones para la prevención accidental también ha avanzado. Por otro lado, el exceso de velocidad se ubica en el tercer lugar de las causas más repetitivas de accidentalidad. Además, Cundinamarca es la cuarta ciudad más accidentada del país luego de Bogotá D.C. Valle del Cauca y Medellín. Igualmente se logra observar que las estadísticas muestran que en Diciembre es el mes que más accidentes se registran siendo los fines de semana los de mayor índice reflejados a sobremanera oscilando entre las 6 am y a las 6 pm. Al observar la siguiente gráfica:

Municipio	Total desde 2005 hasta 2016
Arbeláez	8
Fusagasugá	311
Girardot	258
Granada	136
Sibaté	36
Silvania	110
Soacha	666
Subachoque	23

Figura 4.4: Índices de alta accidentalidad según municipio. Tomado de [12]

Se puede evidenciar que el tramo elegido para la investigación es uno de los más accidentados a lo largo de una década, además, justamente entre Bogotá y Fusagasugá se encuentran los Municipios con mayor índices de accidentalidad. Por esta razón se ha querido inspeccionar gracias a modelo matemático que tenemos cuál sería entonces la razón de las restricciones actualmente registradas. Esto permite que posteriormente se evalúe casos de accidentalidad con las condiciones necesarias para confrontar las posibles causas de algunos eventos desafortunados.

#### **4.2.2. La velocidad**

La velocidad obtenida es la relacionada con el peralte de la carretera, esta solo es una de las varias posibilidades, es decir, también el programa puede obtener la velocidad con varios grados de peralte, incluso sin peralte. Es capaz de obtener la velocidad teniendo en cuenta el equilibrio del automóvil en una curva, esto informa la velocidad límite con la que un automóvil puede transitar por determinada curva para no volcar. También se tiene en cuenta el valor de coeficiente de rozamiento de cada neumático, el centro de masa y, por supuesto, el radio de curvatura. Sin embargo, para estos casos la velocidad tenida en cuenta se debe a las ecuaciones de equilibrio. Estas determinan el rumbo del automóvil en ciertas características y condicionan al conductor en varios puntos a lo largo de una curva específica. Los torques de los automotores se deben entender como la razón por la cual los automóviles se volcan. Estos relacionan la velocidad a la que se desplaza un automóvil y la restringe para mantener el auto en equilibrio o, en otras palabras, evita que el automóvil salga de su trayectoria (curva) provocando un accidente.

Para la curva número 1 se obtiene la siguiente gráfica analizada en Excel:

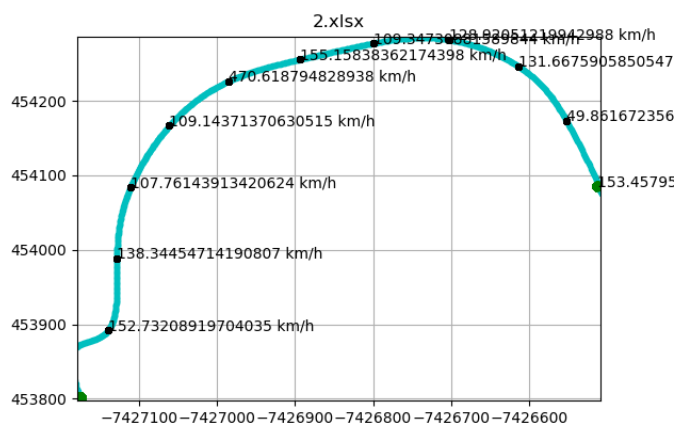


Figura 4.5: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 2

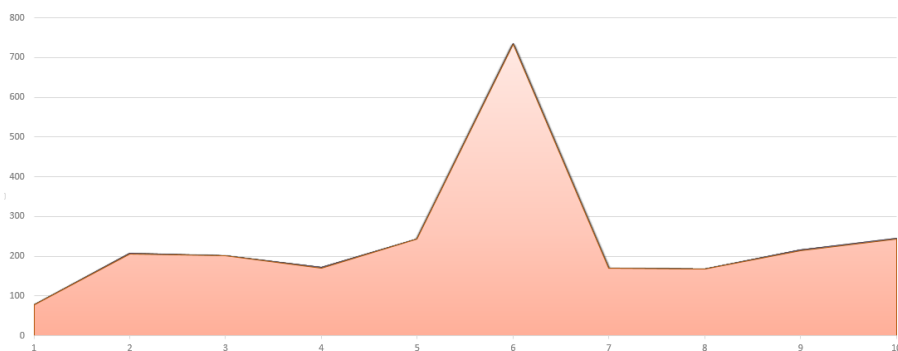


Figura 4.6: Ruta Bogotá - Fusagasugá, velocidades máximas curva 2

En la gráfica se puede observar que se espera que los automóviles modifiquen su velocidad a lo largo de toda la curva, en la imagen 4,5 se evidencia que en la mitad de la curva se espera una mayor velocidad puesto que la curvatura en ese punto no es muy pronunciada o es muy leve, para tal caso la velocidad debe aumentar y esto se verifica en la imagen 4,6 donde la mitad de la gráfica muestra el cambio de velocidad aumentándose considerablemente.

#### 4.2.2.1. Gráficas

La cantidad de puntos de control depende solo de la cantidad de puntos sobre la vía, pero la cantidad de puntos sobre la vía esta restringida puesto que pocos puntos haría que la curva interpole pero no modele con exactitud, por otro lado, muchos puntos no haría mayor exactitud,

la curva interpola de igual manera pero satura los cálculos lo que hace que la precisión de las respectivas derivadas no sean precisas para los datos puesto que cambia la diferenciación de la curva y no modela muy bien, resultan tramos con curvas de más. Un ejemplo más claro es el final de alguna de las gráficas en cuestión, por ejemplo:

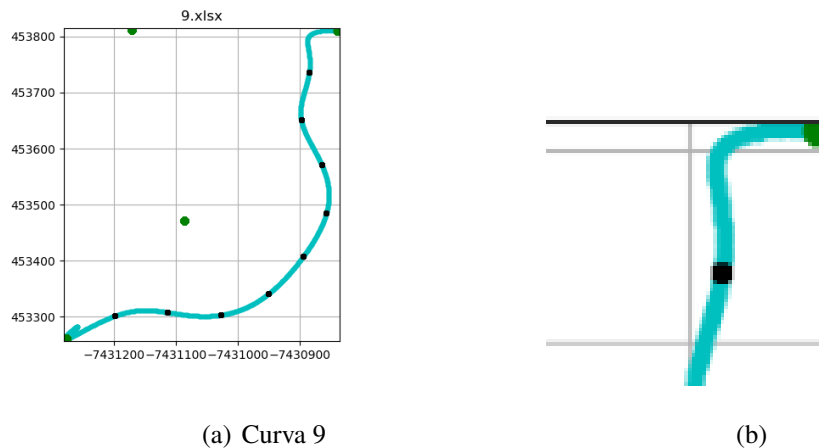


Figura 4.7: Saturación de modelo por exceso de puntos de control

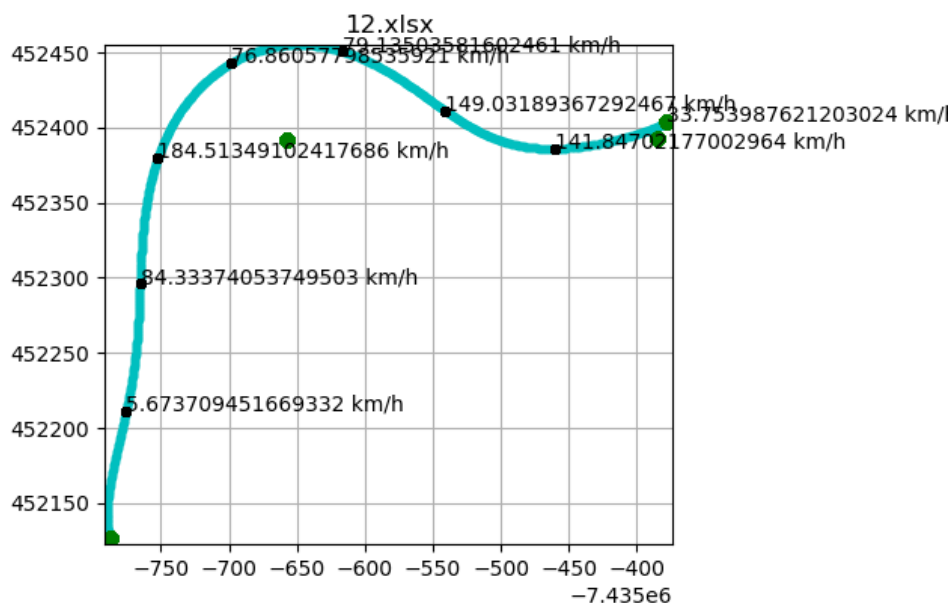
En el final de esta carretera se revela cómo actúa la saturación de cálculos debido a la cantidad de puntos. Esta es una curva de 12 puntos sobre la vía, luego tiene 12 puntos de control, para esta curva es casi el límite de puntos que puede soportar la interpolación hasta que deja de modelar correctamente.

#### 4.2.2.2. Curvas peligrosas

Lo siguiente es un análisis de las curvas más peligrosas o de alta accidentalidad según el modelo propuesto y según informes generados por las autoridades. El Coronel Flavio Meza quien dio parte de una noticia donde aseguraba que cerca de 27 personas habrían resultado muertas en un accidente de tránsito sobre la vía que cubre desde Bogotá hasta Fusagasugá. El accidente ocurrido cerca a la media noche donde todo indica que el bus se queda sin frenos y el conductor en un acto de disminuir la velocidad del bus lo acerca al borde de la carretera, sin contar con que una zanja iba a empeorar la situación. Este trayecto es conocido como El Recreo, Granada, pero se trata de una de las curvas más peligrosas de toda la vía. Esto anterior es además comprobado por el modelo que clasifica a esta curva como una de las más peligrosas

teniendo en cuenta que se analiza el Radio de curvatura siendo uno de los más pequeños de todo el tramo y significando alto nivel de accidentalidad pues la velocidad a la que se puede transitar debe disminuir.

A continuación se puede evidenciar su ubicación geográfica además de el contraste con el modelo propuesto:



Esta curva representa la número 14 de nuestro compendio de curvas, este tramo de vía se considera de alta accidentalidad por los índices previamente abordados, además de su inclinada pendiente engañosa que impide ver con claridad la forma concreta de la curva dado el entorno con mucha zona verde.

Es importante que para esta curva se estimen las velocidades requeridas en todo momento del tramo, para esto se introducen los correspondientes datos de cálculo primarios. El peralte para esta curva está dado así:

Debe existir una relación apegada a las estadísticas y a la manera como fue construida esta vía dado que, el código estima que, según sus parámetros y características la curva presenta un radio de curvatura más pequeño que el resto de curvas lo cual brinda un acercamiento de el comportamiento que debe tener las velocidades, o bien, los conductores al transitar por este

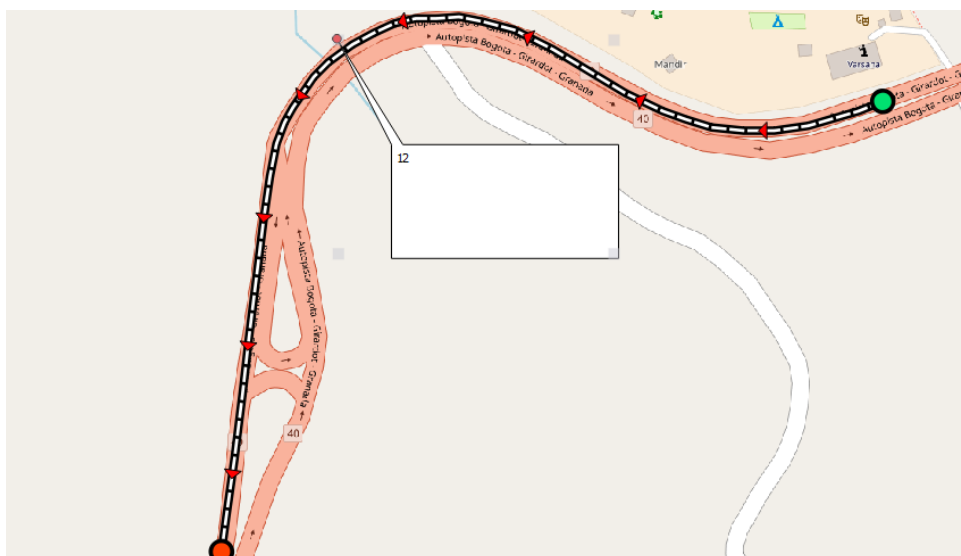


Figura 4.8: Velocidad máxima curva 14

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,35378	4,52404	8	35	40
-74,3546054	4,52386	8	35	40
-74,3554086	4,52411318	8	35	40
-74,3561604	4,52450642	10	44	35
-74,3569822	4,52443187	10	44	35
-74,357522	4,5238007	10	44	35
-74,3576538	4,52295992	10	44	35
-74,3577557	4,52211417	10	44	35
-74,35787	4,52127	10	44	35

Figura 4.9: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, peralte y coordenadas.

tramo.

Para esta curva el accidente previamente mencionado tuvo como implicado un bus de 40 o más pasajeros. La siguiente tabla muestra el comportamiento de un bus con sus velocidades para así obtener una idea más cercana la causa precisa del accidente, los datos están brindados en kilómetros por hora:

Es válido afirmar que es evidente que la curva presenta una disminución de velocidad considerable cuando se acerca a la mitad de la curva, este proceso ocurre porque la curvatura se hace más grande a medida que llega al centro de curva provocando que se vuelva brusca la carretera en ese punto. Evidentemente el exceso de velocidad produjo la colisión, sin embargo no hay

Buseta (40)
225,03205
236,43041
127,54327
123,87745
297,38371
135,92211
9,144423

Figura 4.10: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, velocidad máxima de bus(40).

que olvidar que, según las autoridades el bus se quedó sin frenos y el conductor. en un acto de supervivencia, no tuvo más opción que enviar el bus hacía una zanja que terminó empeorando la situación y finalizando de la peor manera.

Acontinuación, se puede observa cómo el algoritmo espera que un conductor maneje la velocidad de su vehículo sobre esta curva:

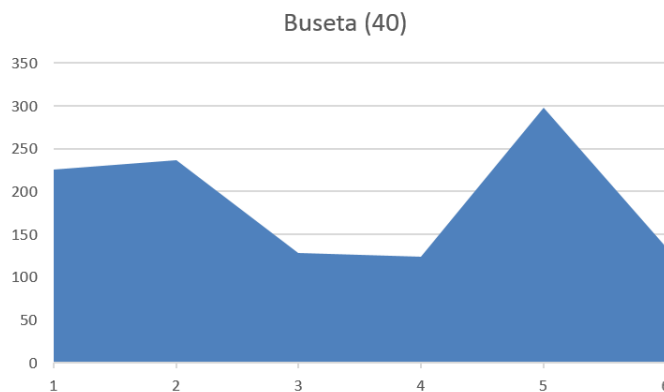


Figura 4.11: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, comportamiento óptimo de velocidad de bus(40).

Es importante mencionar que el vehículo antes mencionado por sus características también tiene mucho que ver, para el algoritmo, un bus de 40 pasajeros está muy bien acondicionado para transportarse a determinadas velocidades pues, su mayor desventaja que son sus dimensiones se equilibran con la distribución de pasajeros y los maletines que se ubican en la parte inferior

del vehículo disminuyendo la altura del centro de masa y, así mismo, aumentando la seguridad del vehículo evitando que el eje del centro de masa traspase las dimensiones del bus. Algunos de los automotores con mayor seguridad según su distribución de carga son:

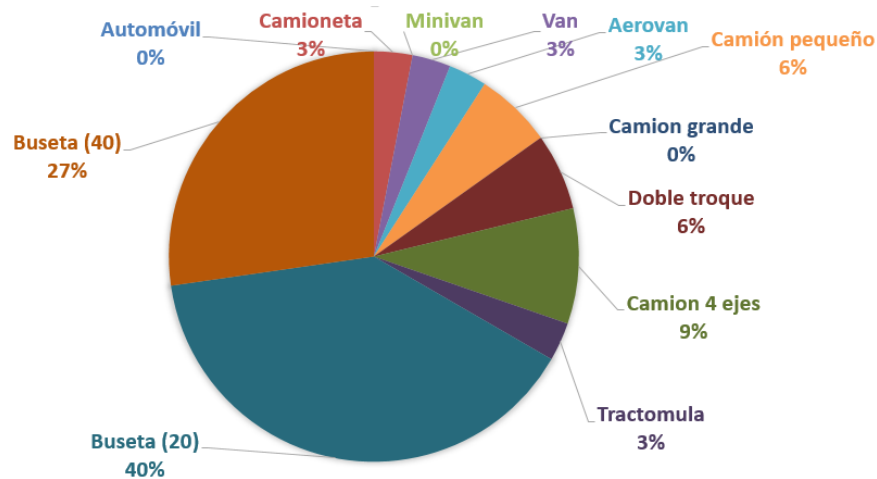


Figura 4.12: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14, nivel de acondicionamiento y seguridad según vehículo.

La anterior gráfica muestra un dato absolutamente importante para tener en cuenta. Según el modelo, las características de los vehículos brindan mucho más información al respecto que la misma vía, es decir, las dimensiones, el peso y la distribución de carga es uno de los factores más importantes a la hora de hallar velocidades máximas con relación a los accidentes provocados por tal imprudencia de conductores. Contrario al instinto que considera que los automóviles particulares serían los más seguros, el modelo especifica que hay una probabilidad mayor de que, en caso de un volcamiento, sea un automóvil pequeño el más oprobado. Pues en ninguna de las curvas anteriormente tratadas obtuvo mayor índice de velocidad permitido en algún punto sobre alguna curva, en general, los automóviles pequeños son los que menos aparecen, camioneta, van, minivan, aerovan, con relación a los que tienen mayor posibilidad de quedar ilesos en un caso de alta velocidad sobre una curva son aquellos que su centro de masa se debe a su distribución de carga y pasajeros, buses de mas de 40 pasajeros, doble troque y principalmente, buses de 20 pasajeros que se llevo un puntaje del 40 % de curvas donde resultó como el de mayor seguridad de volcamiento..





# Capítulo 5

## Conclusiones y recomendaciones

### 5.1. Conclusiones

Este proyecto ha sido el compendio de muchas pequeñas investigaciones que conjuntamente han conseguido identificar problemas y llegado a términos que se consideraban dentro de las posibilidades existentes. La cantidad de variables que se pueden tener en cuenta para precisar detalles dentro de la naturaleza del automovilismo son imprescindibles para la exactitud del caso, sin embargo aquí podemos despreocupar algunas de estas variables sin el ánimo de modificar resultados sino por razones de que el efecto producido no es altamente relevante con los resultados obtenidos. La exactitud y las temáticas que engloban los cálculos matemáticos han demostrado su veracidad y su alcance en un entretenido ejercicio de modelación y análisis. La modelación de la carretera va más allá de la simple silueta trazada gráficamente, el detallado seguimiento de los procesos sistemáticos y numéricos efectuados por el lenguaje de programación acercan cada vez más a la exactitud que tanto se busca y evidenciarla en la vida real es aterrizar ideas generadas durante toda una investigación y seguramente un programa de estudio. Algunos resultados arrojados en muchos casos pueden no caber en la imaginación de quien se enfrenta al tráfico real cotidianamente, pero cuando el algoritmo expresa ciertos comportamientos con diferentes consecuencias y se explica gracias al vínculo entre la matemática y la física se empiezan a comprender todos los resultados obtenidos.

Queda absolutamente claro que no se cuenta con una carretera ideal como se desearía, los cálcu-

los evidencian el anterior análisis, pues no se puede realizar una carretera con la disposición de manejar a tan altas velocidades arriesgando el vehículo y las vidas a que la carretera no cuente con las especificaciones necesarias y, sobretodo, no cuente con el peralte exigido para maniobrar un automotor en curva.

Los accidentes vehiculares son el pilar central de esta investigación, como se sabe, gracias a las consecuencias de la alta velocidad se correlacionan en virtud del conocimiento con el volcamiento y demás parámetros de una vía.

Por otro lado, es importante resaltar la condición que se aprecia con los automóviles livianos, si bien son lo más utilizados, se trata de un automotor con más condiciones idóneas para un volcamiento, pues sus características no le ayudan como se espera. Caso contrario con los vehículos de carga pesada, sea camiones pequeños o buses de mediana y mayor capacidad. Estos tienen una mejor distribución de carga y su centro de masa se ubica perfectamente bajo para alcanzar a generar la estabilidad y por ende el equilibrio necesario para ubicarse como uno de los más seguros automóviles, dato que se debe tener en cuenta cuando de transportarse se trata.

## **5.2. Recomendaciones**

Es importante mencionar que este proyecto de investigación en ningún momento pretende enseñar, a quien le llegue, la velocidad a la que puede dirigirse sobre la vía Bogotá - Fusagasugá hasta el límite de no sufrir lesiones. Se trata pues, de una mirada matemática de la veracidad de los cálculos utilizados en el diseño real de tal ruta orientado por la concesión Vía 40 Express y con esto contribuir a la toma de decisiones en el momento de diseñar una carretera para que no se pasen por alto parámetros que seguramente pueden volver más eficaz tal proceso.

# Bibliografía

[1] Ministerio de Transporte Instituto Nacional de Vías. *Manual de Diseño Geométrico*. Resolución No 005865 del 12 de noviembre de 1998.

[2] Dirección de tránsito de la Policía Nacional <https://www.policia.gov.co/direccion/transito> (Visitado el 23 de julio de 2019)

[3] WikipediA *Velocidad de diseño*  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Velocidad\\_de\\_proyecto](https://es.wikipedia.org/wiki/Velocidad_de_proyecto) (Visitado el 23 de julio de 2019)

[4] Marco Paluszny, Harmut Prautzsch, Wolfgang Boehm *Métodos de Bézier y B-Spline* Instituto Tecnológico de Karlsruhe, 2002.

[5] QGIS. <https://qgis.org/es/site/about/index.html>  
Versión 3.0

[6] WikipediA *Polinomios de Bernstein*  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio\\_de\\_Bernstein](https://es.wikipedia.org/wiki/Polinomio_de_Bernstein) (Visitado el 23 de julio de 2019)

[7] “Approximating Maximum Speed on Road from Curvature Information”, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences, MYMisro, A.Ramli, JM, Ali, 2015.

[8] Python. <https://www.python.org/>  
Versión 3.6

- [9] Google Maps <https://www.google.com/maps>  
(Visitado el 23 de julio de 2019)
- [10] Fondo de Prevención Vial. *Agenda Nacional de Seguridad Vial*  
<https://ansv.gov.co/> Av La Esperanza calle 24 No 62 - 49 (Visitado el 23 de julio de 2019)
- [11] Instituto de Medicina Legal y Ciencias Forenses  
<http://www.medicinalegal.gov.co/> Calle 7A No. 12A-51 Bogotá - Colombia  
(Visitado el 23 de julio de 2019)
- [12] Secretaria de transporte *Gobernación de Cundinamarca*  
<http://www.cundinamarca.gov.co/Home/Secretariadetransporte> Calle 26 No 51-53 Bogotá - Colombia (Visitado el 23 de julio de 2019)
- [13] página web de compra y envíos de neumáticos.  
<https://www.neumarket.com/blog/como-leer-tus-llantas/> (Visitado el 23 de julio de 2019)
- [14] Coeficiente de rozamiento de neumáticos.  
<https://causadirecta.com/>  
(Visitado el 23 de julio de 2019)
- [15] Índice de cargamento según referencia de la llanta.  
<https://www.neumarket.com/blog/como-leer-tus-llantas/> (Visitado el 23 de julio de 2019)
- [16] Frederick J. Bueche, Eugene Hetch *Física general de SHAUM* 1997-2007
- [17] Ignacio Martin Bragado *Física general* 2003
- [18] Gráficador para Python. <https://matplotlib.org/> (Visitado el 23 de julio de 2019)

- [19] Curvas de Bézier. [https://es.wikipedia.org/wiki/Curva\\_de\\_B%C3%A9zier](https://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_B%C3%A9zier)  
(Visitado el 23 de julio de 2019)
- [20] La fuerza centrífuga y la estabilidad de un vehículo.  
[http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/circular/din\\_circular.htm](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/circular/din_circular.htm)  
(Visitado el 23 de julio de 2019)
- [21] Fuerza centrífuga [https://es.wikipedia.org/wiki/Fuerza\\_centric%C3%ADfuga](https://es.wikipedia.org/wiki/Fuerza_centric%C3%ADfuga)  
(Visitado el 23 de julio de 2019)
- [22] Manfredo P. Do Carmo. Instituto nacional de Matemática. *Differential geometry of curves and surfaces* Brasil, 1976 - 2016
- [23] Jhon Jairo Agudelo Ospina Universidad Nacional de Colombia *Manual Geométrico de Vías* 2002
- [24] Centro de masa <https://www.fisicalab.com/apartado/centro-de-masas#contenido>  
(Visitado el 23 de julio de 2019)



# Capítulo 6

## Anexos

Instituto de Medicina Legal y Ciencias Forenses.

Medio de Transporte	Conductor		Pasajero		Peatón		Sin información		Total	
	Casos	%	Casos	%	Casos	%	Casos	%	Casos	%
Motocicleta-motocarro	2.852	77,84	598	50,13	-	0,00	-	0,00	3.450	50,16
Peatón	-	0,00	-	0,00	1.764	100,00	-	0,00	1.764	25,65
Automóvil-campero-camioneta	243	6,63	360	30,18	-	0,00	-	0,00	603	8,77
Bicideta	421	11,49	7	0,59	-	0,00	-	0,00	428	6,22
Sin información	8	0,22	5	0,42	-	0,00	257	100,00	270	3,93
Tracto-camión-camión-furgón-volqueta	98	2,67	95	7,96	-	0,00	-	0,00	193	2,81
Bus-buseta-microbús	16	0,44	102	8,55	-	0,00	-	0,00	118	1,72
Otros vehículos terrestres carreteros	16	0,44	7	0,59	-	0,00	-	0,00	23	0,33
Vehículos aéreos	9	0,25	13	1,09	-	0,00	-	0,00	22	0,32
Vehículos acuáticos	1	0,03	6	0,50	-	0,00	-	0,00	7	0,10
<b>Total</b>	<b>3.664</b>	<b>100</b>	<b>1.193</b>	<b>100</b>	<b>1.764</b>	<b>100</b>	<b>257</b>	<b>100</b>	<b>6.878</b>	<b>100</b>

Figura 6.1: Muertes por accidente de tránsito según el medio de transporte.

Tipo de Accidente	Hombre		Mujer		Total	
	Casos	%	Casos	%	Casos	%
Choque	3.035	60,41	549	44,27	3.584	57,22
Atropello	1.287	25,62	477	38,47	1.764	28,16
Caída del ocupante	99	1,97	67	5,40	166	2,65
Caída del vehículo a un precipicio	97	1,93	39	3,15	136	2,17
Caída de aeronave	19	0,38	-	0,00	19	0,30
Hundimiento	6	0,12	2	0,16	8	0,13
Incendio	6	0,12	-	0,00	6	0,10
Explosión	3	0,06	-	0,00	3	0,05
Aterrizaje forzoso	1	0,02	-	0,00	1	0,02
Volcamiento	471	9,38	106	8,55	577	9,21
<b>Total</b>	<b>5.024</b>	<b>100</b>	<b>1.240</b>	<b>100</b>	<b>6.264</b>	<b>100</b>

Figura 6.2: Muertes por accidente de tránsito según tipo de accidente



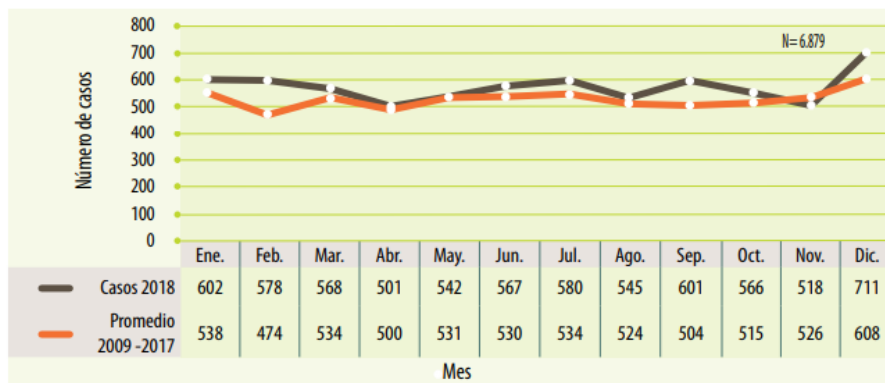


Figura 6.3: Muertes por accidente de tránsito según el mes del año.

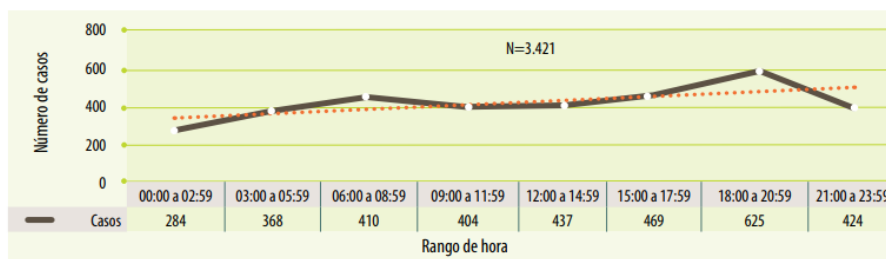


Figura 6.4: Muertes por accidente de tránsito según la hora.

En la siguiente tabla se muestran los coeficientes de rozamiento para diferentes pos de suelos en diferentes condiciones climáticas:

superficie	seca				humeda			
	mas de 50 km		menos de 50		mas de 50		menos de 50	
velocidad	desde	a	desde	a	desde	a	desde	a
cemento								
nuevo, liso	0.80	1.20	0.7	1.0	0.50	0.80	0.40	0.75
usado	0.60	0.80	0.60	0.75	0.45	0.70	0.45	0.65
Pulimentado	0.55	0.75	0.50	0.65	0.45	0.65	0.45	0.60
Asfalto o alquitrán								
nuevo, liso	0.80	1.20	0.65	1.00	0.50	0.80	0.45	0.75
Usado	0.60	0.80	0.55	0.70	0.45	0.70	0.40	0.65
Pulimentado	0.55	0.75	0.45	0.65	0.45	0.65	0.40	0.60
Con exceso de alquitrán	0.50	0.60	0.35	0.60	0.30	0.60	0.25	0.55
Adoquín								
Nuevo, liso	0.75	0.95	0.60	0.85	0.50	0.75	0.45	0.70
Pulimentado por el tráfico	0.60	0.80	0.55	0.75	0.40	0.70	0.40	0.60
Piedra compacta								
Nuevo, liso	0.75	1.00	0.70	0.90	0.65	0.90	0.60	0.85
Pulimentado por el tráfico	0.50	0.70	0.45	0.65	0.30	0.50	0.25	0.50
Grava								
Apisonada, con riego asfáltico	0.55	0.85	0.50	0.80	0.40	0.80	0.40	0.60
Suelta	0.40	0.70	0.40	0.70	0.45	0.75	0.45	0.75
Escoria								
Compactadas	0.50	0.70	0.50	0.70	0.65	0.75	0.65	0.75
Piedra								
Machacada	0.55	0.75	0.55	0.75	0.55	0.75	0.55	0.75
Reja metálica								
Con ranuras	0.70	0.90	0.35	0.75	0.25	0.45	0.20	0.35

Cuadro 6.1: Tabla de coeficientes de rozamiento del neumático con el suelo

Posición	Departamento	Muertes		Heridos	
		Total	%	Total	%
1	Valle del Cauca	975	14	5.718	14
2	Antioquia	854	12	5.702	14
3	Bogotá, D.C.	527	8	8.256	21
4	Cundinamarca	494	7	2.568	6
5	Tolima	313	5	2.325	6
6	Santander	309	4	2.570	7
7	Cesar	285	4	927	2
8	Huila	249	4	1177	3
9	Atlántico	235	3	1.911	5
10	Cauca	219	3	978	2
<b>Total 10 departamentos</b>		4.460	65	32.132	69
<b>Total Nacional</b>		<b>6.879</b>	<b>100</b>	<b>39.537</b>	<b>100</b>

Figura 6.5: Muertes por accidente de tránsito según departamento de mayor índice de accidentalidad

La anterior tabla es la determinada por las diferentes categorías de velocidades expresadas en los neumáticos con una letra mayúscula.

	<b>Velocidad Máx</b>	<b>Tipo de auto</b>
L	120 km/h	Fuera de carrera y camiones ligeros
M	130 km/h	Llanta de repuesto temporal
N	140 km/h	Llanta de repuesto temporal
Q	160 km/h	Invierno 4x4
R	170 km/h	Camioneta de trabajo pesado/ camion ligero
S	180 km/h	Sedan familiar y vans
T	190 km/h	Sedan familiar y vans
H	210 km/h	Sedanes deportivos y cupés
V	240 km/h	Carros deportivos
Z	240+ km/h	Carros deportivos
W	270 km/h	Carros deportivos exóticos
Y	300 km/h	Carros deportivos exóticos
(Y)	300+ km/h	Carros deportivos exóticos

Cuadro 6.2: Velocidades de referencia neumática: [13]

Tipo de carro	peso (Km)		Alto	Ancho	Largo
	Con carga/pasajeros	Sin carga/pasajeros			
carro	1170	1800	1.50	1.46	4.29
Camioneta	1380	2610	1.69	1.8	5.23
Minivan	1980	3200	1.89	1.63	3.08
van	2300	3850	2.19	1.64	4.04
Aerovan	2566	4100	2.4	2.0	6.1
Buseta (20)	8000	13600	2.5	2.1	6.60
Buseta (40)	17000	28000	3.0	2.5	14.0
Camión Pequeño	3500	8000	2.30	2.4	6.10
Camión grande	8000	16000	4.0	2,60	10.8
Dobletroque	11000	28000	4.20	2.70	12.20
Camión 4 ejes	22000	39000	4.30	2.80	12.20
Tractomula	18000	52000	4.40	2.60	18.5

Cuadro 6.3: Tabla de pesos y dimensiones de los automotores

Tabla de dimensiones de diferentes tipos de automotores.

La siguiente tabla muestra los índice de carga con relación a la capacidad máxima de peso resistido:

<b>Índice de carga</b>	<b>carga en kilogramos por llanta</b>	<b>Índice de carga</b>	<b>carga en kilogramos por llanta</b>
65	290	91	615
66	300	92	630
67	307	93	650
68	315	94	670
69	325	95	590
70	335	96	710
71	345	97	730
72	355	98	750
73	365	99	775
74	375	100	800
75	387	101	825
76	400	102	850
77	412	103	875
78	425	104	900
79	437	105	925
80	450	106	950
81	462	107	975
82	475	108	1000
83	487	109	1030
84	500	110	1060
85	515	111	1090
86	530	112	1120
87	545	113	1150
88	560	114	1180
89	580	115	1215
90	600	116	1250

Índice de carga según referencia neumática tomada de: [13]

Anexo las imágenes del resto de curvas a las que se le realizó el análisis para cubrir el total de la vía y su respectiva tabla de peraltes sobre cada curva.

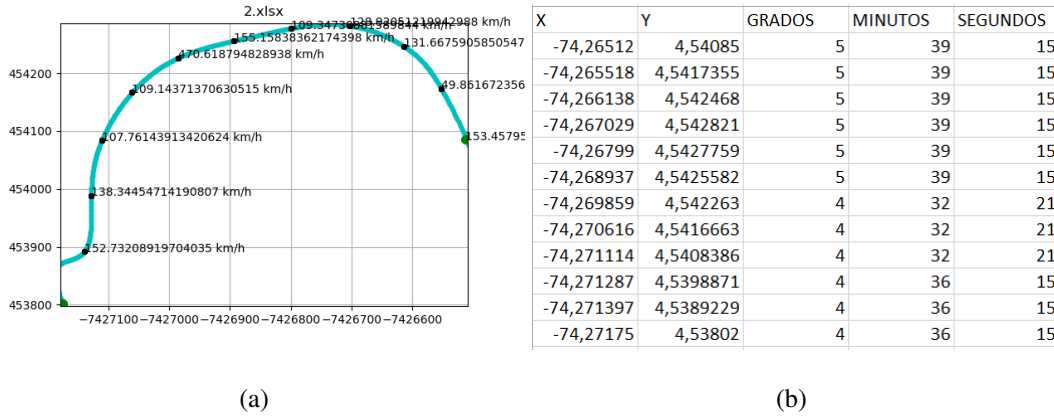


Figura 6.6: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 2

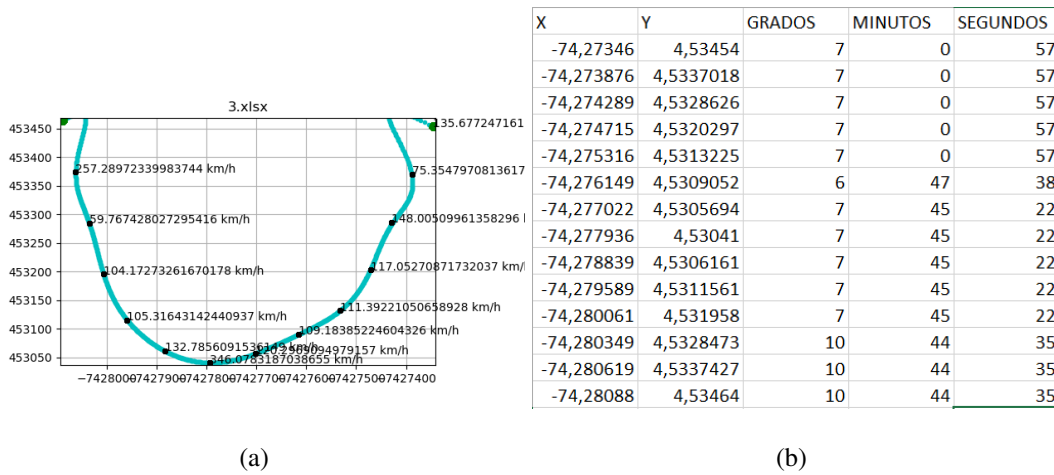
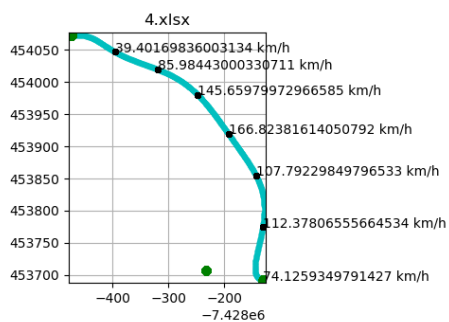


Figura 6.7: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 3



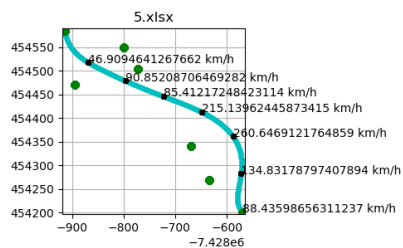


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,2813	4,53692	10	44	35
-74,28131	4,5377409	10	44	35
-74,28143	4,5385459	10	44	35
-74,281924	4,5391952	6	58	6
-74,282475	4,5398033	6	58	6
-74,283185	4,5401967	6	58	6
-74,283959	4,5404711	6	58	6
-74,28474	4,54072	6	58	6
-74,28474	4,54072	6	58	6

(b)

Figura 6.8: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 4

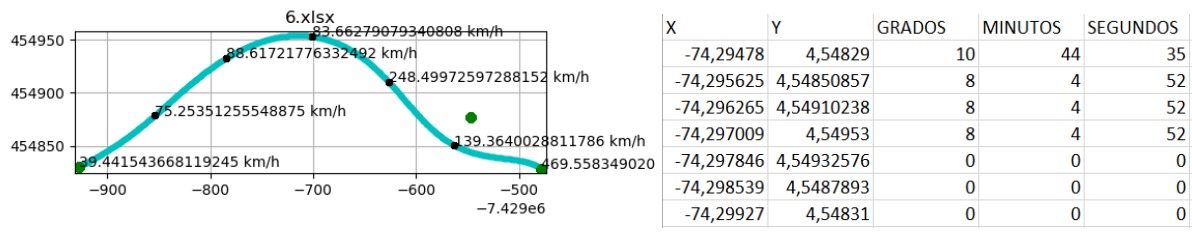


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,28569	4,54201	10	18	48
-74,285726	4,54282349	10	18	48
-74,285879	4,54361173	10	18	48
-74,286484	4,54412899	10	18	48
-74,287227	4,54446278	10	18	48
-74,28797	4,54479515	10	18	48
-74,288685	4,54518153	9	14	29
-74,28914	4,54585	4	9	31

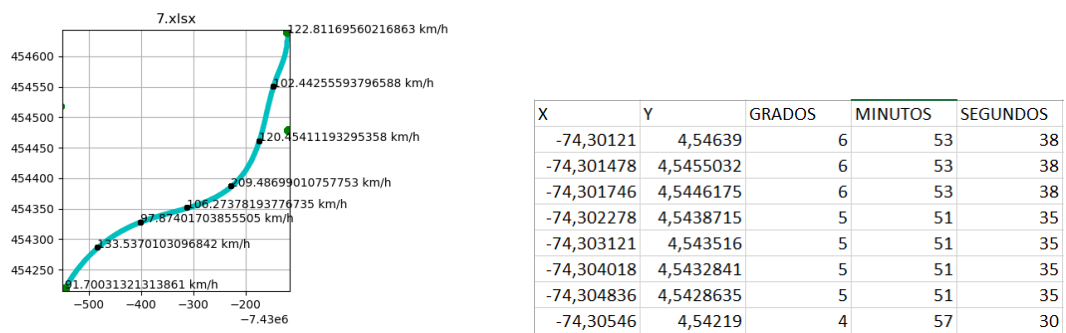
(b)

Figura 6.9: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 5



(a)

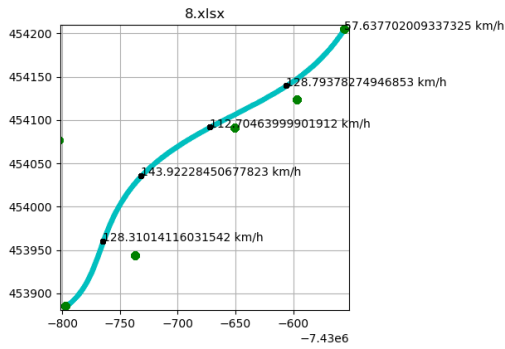
Figura 6.10: Ruta Bogotá - Fusagasugá , curva 6 .



(a)

(b)

Figura 6.11: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 7

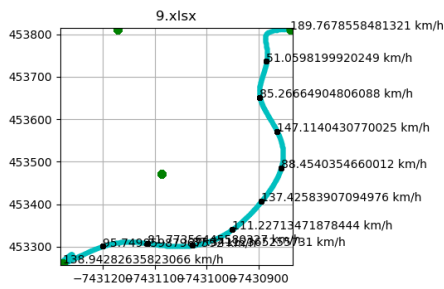


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,30556	4,54205	5	42	46
-74,30606	4,5414004	5	42	46
-74,306724	4,5409184	8	3	26
-74,307317	4,5403574	4	51	52
-74,307646	4,5396052	4	51	52
-74,30797	4,53885	4	51	52

(b)

Figura 6.12: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 8

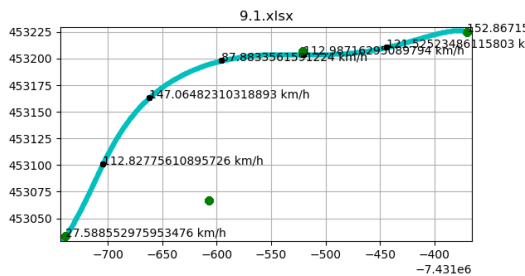


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,30839	4,53811	7	38	22
-74,308843	4,53736444	7	38	22
-74,308972	4,53651487	7	38	22
-74,308641	4,53571154	7	48	47
-74,308563	4,53485921	7	48	47
-74,308938	4,53407879	7	48	47
-74,309501	4,53341165	8	3	26
-74,310273	4,53303291	8	3	26
-74,311138	4,53308157	8	3	26
-74,311997	4,53301445	2	34	42
-74,31277	4,53261	2	34	42

(b)

Figura 6.13: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 9

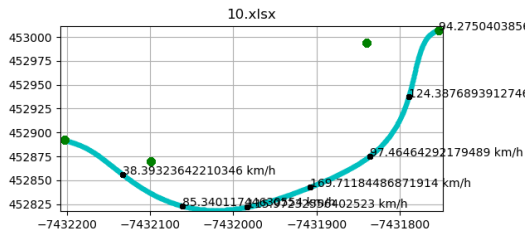


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,3137	4,53225	2	34	42
-74,314443	4,53210659	2	34	42
-74,3152	4,53204153	2	34	42
-74,315957	4,53198166	2	34	42
-74,316622	4,53163194	8	19	2
-74,317048	4,53100813	10	44	35
-74,31739	4,53033	10	44	35
-74,31739	4,53033	10	44	35

(b)

Figura 6.14: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 10

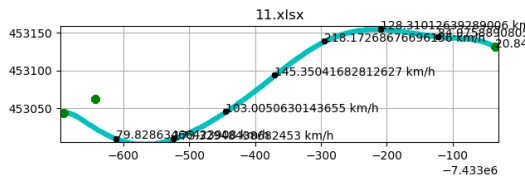


-74,31753	4,53007	8	19	2
-74,317897	4,5293738	8	19	2
-74,318366	4,5287529	10	44	35
-74,31908	4,5284291	10	44	35
-74,319836	4,5282206	7	35	0
-74,320615	4,5282321	7	35	0
-74,321329	4,5285614	7	35	0
-74,32203	4,52892	7	35	0

(a)

(b)

Figura 6.15: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 11

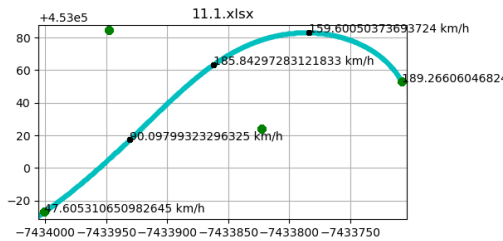


X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,33035	4,53131	5	51	35
-74,33122	4,5314491	5	51	35
-74,33209	4,5315467	5	51	35
-74,33295	4,5313869	5	51	35
-74,33371	4,5309363	5	51	35
-74,33444	4,5304559	5	51	35
-74,33524	4,5300937	10	18	48
-74,33611	4,5300952	10	18	48
-74,33691	4,53044	10	18	48

(a)

(b)

Figura 6.16: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 12

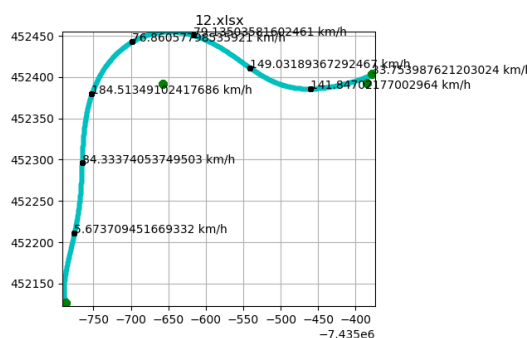


X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,33708	4,53053	10	18	48
-74,337841	4,53083117	10	18	48
-74,338622	4,5306348	10	18	48
-74,33931	4,5301733	10	18	48
-74,34001	4,52973	3	7	31

(a)

(b)

Figura 6.17: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 13

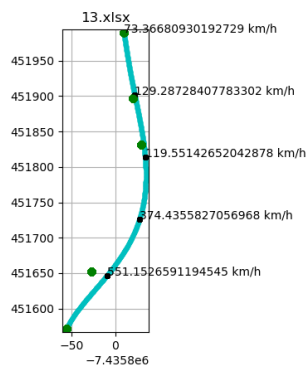


X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,35378	4,52404	8	35	40
-74,354605	4,52386	8	35	40
-74,355409	4,5241132	8	35	40
-74,35616	4,5245064	10	44	35
-74,356982	4,5244319	10	44	35
-74,357522	4,5238007	10	44	35
-74,357654	4,5229599	10	44	35
-74,357756	4,5221142	10	44	35
-74,35787	4,52127	10	44	35

(a)

(b)

Figura 6.18: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 14

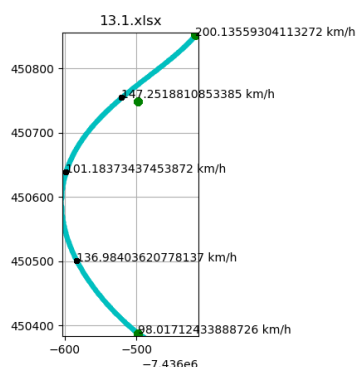


X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,3579	4,5199	6	30	39
-74,357777	4,519022	6	30	39
-74,357657	4,5181438	6	30	39
-74,357722	4,5172654	6	49	15
-74,358096	4,5164652	6	49	15
-74,35856	4,51571	6	49	15

(a)

(b)

Figura 6.19: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 15

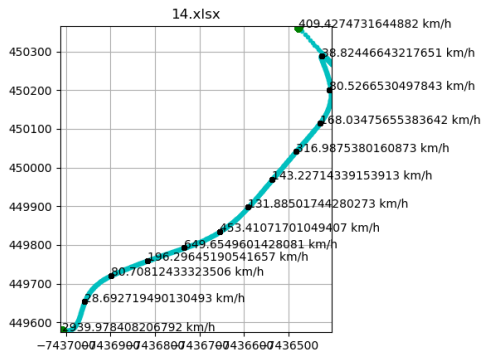


X	Y	GRADOS	MINUTOS
-74,36418	4,50852	4	17
-74,365212	4,50754782	4	17
-74,365988	4,50638843	4	17
-74,365834	4,50500945	5	18
-74,36498	4,50388	5	18
-74,36498	4,50388	5	18

(a)

(b)

Figura 6.20: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 16

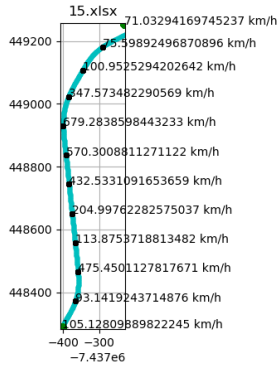


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,36477	4,50362	6	49	15
-74,364254	4,50288374	6	49	15
-74,364074	4,50201059	6	49	15
-74,364292	4,50114715	6	49	15
-74,364825	4,50042053	6	49	15
-74,365361	4,49969647	6	49	15
-74,365903	4,49897677	3	52	17
-74,366544	4,49834845	3	52	17
-74,367338	4,49792829	3	52	17
-74,368174	4,49759268	3	52	17
-74,368987	4,49721239	3	52	17
-74,369579	4,49653878	7	9	43
-74,37008	4,49579	7	9	43
-74,37008	4,49579	7	9	43

(b)

Figura 6.21: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 17

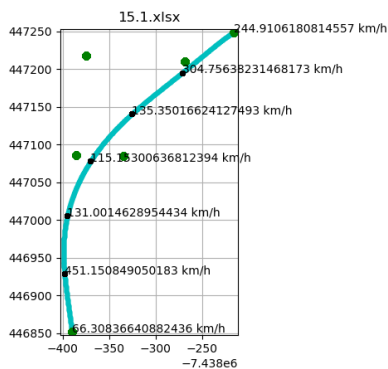


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,37231	4,49254	0	0	0
-74,372905	4,49181972	0	0	0
-74,373462	4,49107096	0	0	0
-74,373854	4,49022546	0	0	0
-74,373998	4,48930509	4	38	44
-74,373922	4,48837436	4	38	44
-74,373836	4,48744403	4	38	44
-74,373751	4,4865137	4	38	44
-74,373665	4,48558337	4	38	44
-74,373585	4,48465255	4	38	44
-74,373659	4,48372569	6	36	40
-74,37403	4,48287	6	36	40

(b)

Figura 6.22: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 18

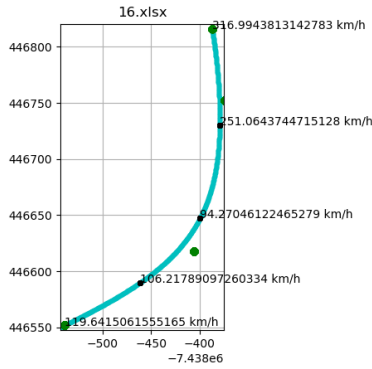


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38216	4,47249	6	8	20
-74,382714	4,4719536	6	8	20
-74,383257	4,471406	6	8	20
-74,3837	4,4707809	6	8	20
-74,383949	4,4700548	6	8	20
-74,383978	4,4692872	6	8	20
-74,3839	4,46852	6	8	20
-74,3839	4,46852	6	8	20

(b)

Figura 6.23: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 19

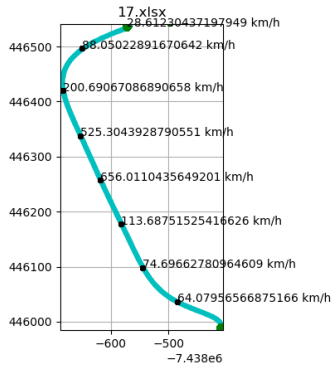


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38387	4,46816	8	57	9
-74,38379	4,4673018	8	57	9
-74,383993	4,46647568	8	57	9
-74,384615	4,46589765	8	57	9
-74,38539	4,46552	8	57	9

(b)

Figura 6.24: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 20

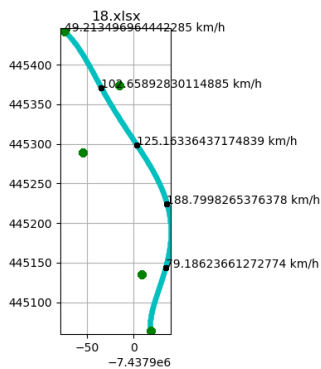


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38572	4,46537	12	56	30
-74,386498	4,4649659	12	56	30
-74,386835	4,4642008	12	56	30
-74,386532	4,4633802	12	56	30
-74,386184	4,4625748	12	56	30
-74,38582	4,4617763	12	56	30
-74,385446	4,4609843	7	0	57
-74,38484	4,4603607	7	0	57
-74,3841	4,45989	7	0	57

(b)

Figura 6.25: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 21

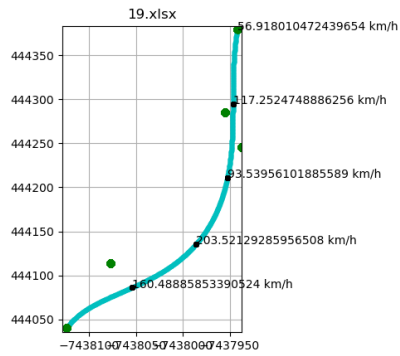


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,37974	4,45442	7	9	43
-74,379348	4,4537076	7	9	43
-74,378968	4,4529883	7	9	43
-74,378645	4,4522458	7	9	43
-74,37866	4,4514374	7	9	43
-74,37882	4,45064	7	9	43

(b)

Figura 6.26: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 22

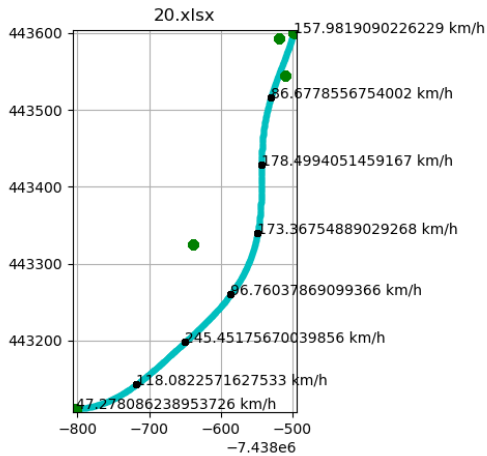


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,37942	4,44379	9	32	57
-74,379464	4,44294982	9	32	57
-74,379524	4,44211111	9	32	57
-74,379859	4,44135596	9	32	57
-74,380539	4,44086461	9	32	57
-74,38124	4,4404	9	32	57

(b)

Figura 6.27: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 23



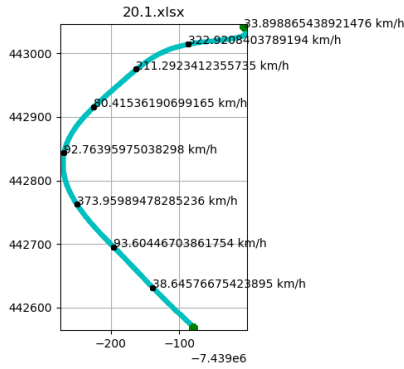
(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38499	4,436	8	45	1
-74,3853	4,4351631	8	45	1
-74,38543	4,4342837	8	45	1
-74,38549	4,4333931	9	10	2
-74,38586	4,4326036	9	10	2
-74,3865	4,4319797	3	9	15
-74,38718	4,431425	3	9	15
-74,38802	4,43111	3	9	15

(b)

Figura 6.28: Ruta Bogotá - Fusagasugá , curva 24 .



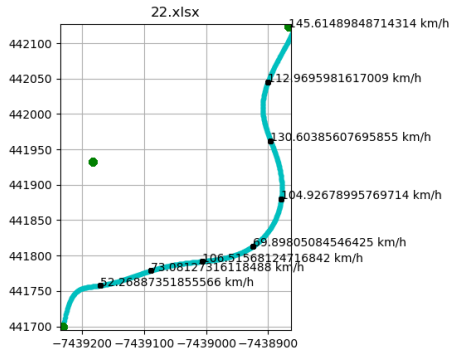


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,39006	4,43042	11	56	12
-74,390876	4,43014783	11	56	12
-74,391631	4,4297518	11	56	12
-74,392254	4,42915932	11	56	12
-74,392688	4,428435	11	56	12
-74,392496	4,42762715	11	56	12
-74,391958	4,42695644	5	6	57
-74,391386	4,42631408	5	6	57
-74,390794	4,42569006	5	6	57

(b)

Figura 6.29: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 25

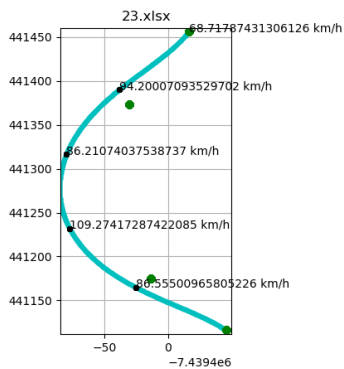


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,3897	4,42511	5	6	57
-74,388948	4,42482131	5	6	57
-74,388257	4,42442719	5	6	57
-74,38794	4,42370865	5	6	57
-74,388147	4,42293652	7	9	43
-74,38839	4,42217	7	9	43

(b)

Figura 6.30: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 26

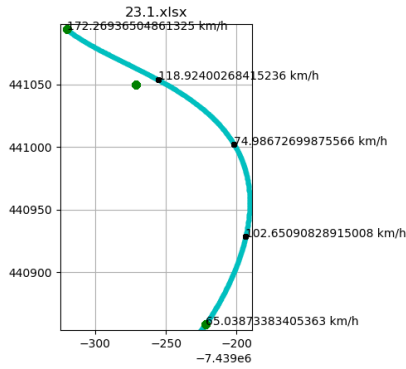


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38867	4,42123	13	1	18
-74,389002	4,42045072	13	1	18
-74,388957	4,41962032	13	1	18
-74,388786	4,41879989	13	1	18
-74,389244	4,41813074	13	15	46
-74,390059	4,41791794	13	15	46
-74,390897	4,41778571	13	15	46
-74,391715	4,41757739	13	15	46
-74,39231	4,41699	13	15	46

(b)

Figura 6.31: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 27

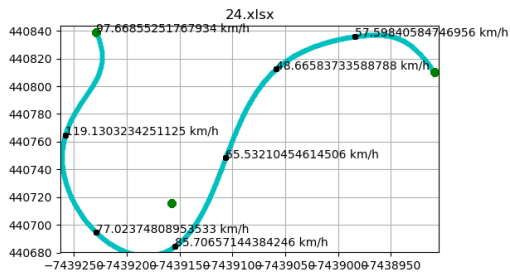


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,39384	4,41456	9	32	57
-74,394384	4,4138999	9	32	57
-74,394796	4,41316156	9	32	57
-74,394768	4,41231737	12	47	21
-74,394252	4,41164927	12	47	21
-74,39355	4,41116	12	47	21

(b)

Figura 6.32: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 28

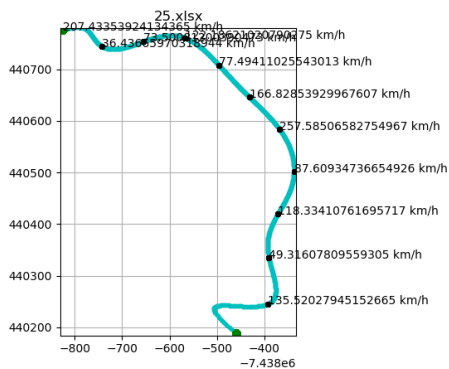


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,39229	4,40839	12	47	21
-74,392582	4,4076477	12	47	21
-74,392289	4,4069463	12	47	21
-74,391541	4,4068479	12	47	21
-74,391065	4,4074848	12	36	44
-74,390589	4,4081238	12	36	44
-74,389845	4,4083591	12	36	44
-74,38909	4,4081	13	46	23

(b)

Figura 6.33: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 29

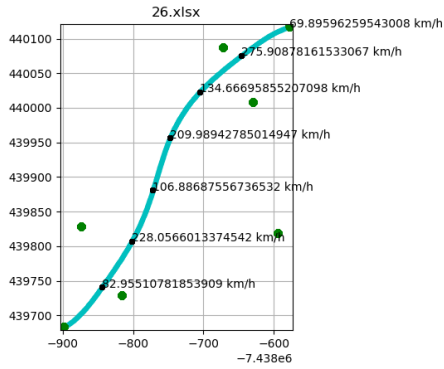


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38826	4,40776	13	46	23
-74,387424	4,40744359	13	46	23
-74,386547	4,40754196	13	46	23
-74,38567	4,40760569	13	46	23
-74,384957	4,40708137	17	54	11
-74,384312	4,40646044	14	19	26
-74,383673	4,40583336	14	19	23
-74,383369	4,40501669	14	19	23
-74,383711	4,40419953	11	56	12
-74,383898	4,40334051	11	56	12
-74,383919	4,40245609	11	56	12
-74,38459	4,40189	11	56	12

(b)

Figura 6.34: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 30

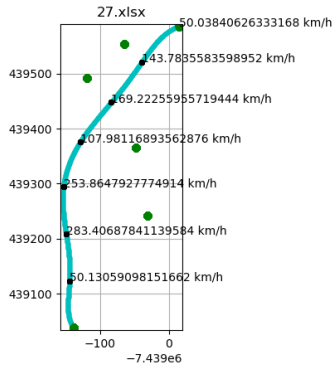


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38578	4,40117	11	56	12
-74,38646	4,4007565	11	56	12
-74,387056	4,4002294	11	56	12
-74,387476	4,3995672	11	56	12
-74,38772	4,3988094	16	25	13
-74,38802	4,3980738	15	16	44
-74,388444	4,3974102	15	16	44
-74,38899	4,39683	15	16	44

(b)

Figura 6.35: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 31

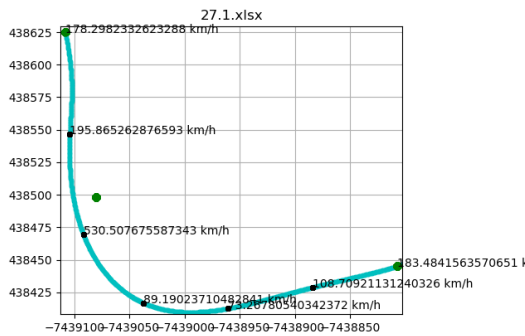


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38985	4,39586	6	13	52
-74,390395	4,39520794	6	13	52
-74,390838	4,3944773	6	13	52
-74,391289	4,39375164	6	13	52
-74,391528	4,39293851	9	32	57
-74,39149	4,3920856	9	32	57
-74,391441	4,39123234	9	32	57
-74,39138	4,39038	9	32	57

(b)

Figura 6.36: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 32

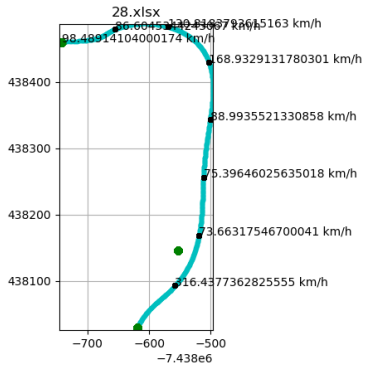


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,39108	4,38625	8	57	9
-74,391039	4,38546683	8	57	9
-74,390918	4,38469668	8	57	9
-74,390371	4,38416853	8	57	9
-74,389605	4,38412651	8	57	9
-74,388837	4,38428861	8	57	9
-74,38807	4,38445	8	57	9
-74,38807	4,38445	8	57	9

(b)

Figura 6.37: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 33

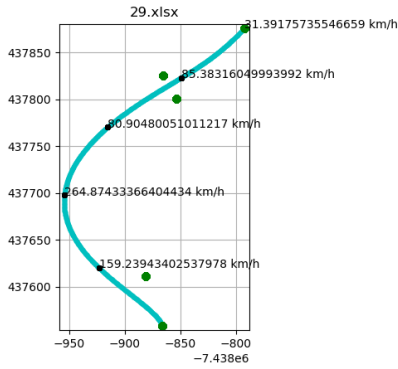


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38741	4,3846	13	38	31
-74,386554	4,38479161	13	38	31
-74,385693	4,38482928	13	38	31
-74,385025	4,38429056	13	38	31
-74,385006	4,38343104	13	38	31
-74,385116	4,38256077	12	27	20
-74,385187	4,38168661	12	27	20
-74,385577	4,3809268	12	27	20
-74,38619	4,3803	12	27	20

(b)

Figura 6.38: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 34

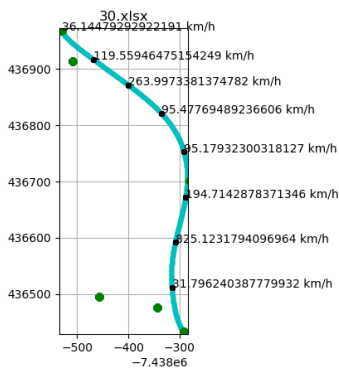


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,38792	4,37876	0	0	0
-74,388492	4,37822955	0	0	0
-74,389152	4,37770306	0	0	0
-74,389541	4,37697566	11	38	44
-74,389231	4,37620169	11	38	44
-74,38866	4,37558	11	38	44

(b)

Figura 6.39: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 35

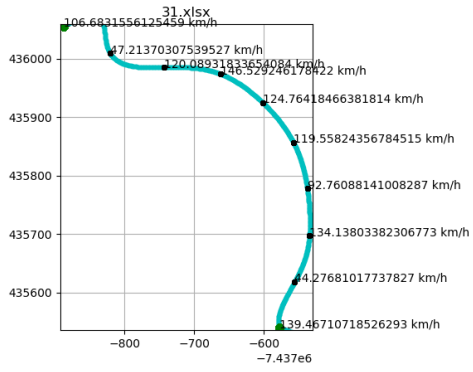


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,3853	4,36969	8	11	6
-74,384675	4,3691691	8	11	6
-74,383993	4,3687131	8	11	6
-74,383351	4,3682109	8	11	6
-74,382913	4,3675285	8	11	6
-74,382883	4,3667173	8	11	6
-74,383084	4,3659228	16	9	24
-74,383148	4,3651143	16	9	24
-74,38291	4,36433	16	9	24

(b)

Figura 6.40: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 36

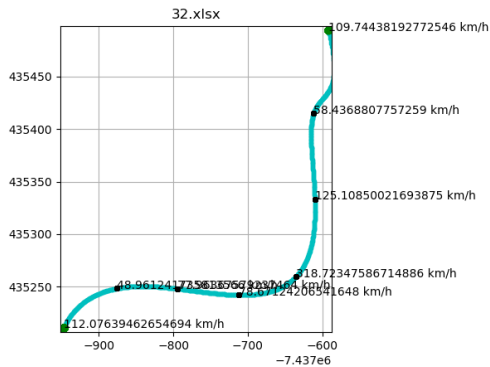


(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,37887	4,36055	7	32	20
-74,378202	4,36008616	7	32	20
-74,377426	4,35984898	11	56	12
-74,37662	4,35973535	11	56	12
-74,37602	4,35924853	11	56	12
-74,37558	4,35856602	11	56	12
-74,375381	4,35777911	4	37	14
-74,37535	4,35697094	4	37	14
-74,375561	4,35618446	4	37	14
-74,37578	4,3554	4	37	14
-74,37578	4,3554	4	37	14

(b)

Figura 6.41: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 37



(a)

X	Y	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
-74,37592	4,35494	11	7	47
-74,376116	4,3541485	11	7	47
-74,3761	4,3533313	11	7	47
-74,376356	4,3525942	11	7	47
-74,377125	4,35242	14	49	4
-74,37794	4,3524791	14	49	4
-74,378756	4,3524823	14	49	4
-74,37947	4,35211	14	49	4

(b)

Figura 6.42: Ruta Bogotá - Fusagasugá, curva 38