	<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
	<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
	<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
		<b>PAGINA: 1 de 6</b>

26.

<b>FECHA</b>	martes, 19 de junio de 2018
--------------	-----------------------------

Señores  
**UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA**  
 BIBLIOTECA  
 Ciudad

<b>UNIDAD REGIONAL</b>	Sede Fusagasugá
<b>TIPO DE DOCUMENTO</b>	Tesis
<b>FACULTAD</b>	Educación
<b>NIVEL ACADÉMICO DE FORMACIÓN O PROCESO</b>	Pregrado
<b>PROGRAMA ACADÉMICO</b>	Licenciatura en Matemáticas

El Autor(Es):

<b>APELLIDOS COMPLETOS</b>	<b>NOMBRES COMPLETOS</b>	<b>No. DOCUMENTO DE IDENTIFICACIÓN</b>
López Prieto	Leidy Estefanía	1070752847

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
 Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
 www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
 NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad  
 Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*



Director(Es) y/o Asesor(Es) del documento:

<b>APELLIDOS COMPLETOS</b>	<b>NOMBRES COMPLETOS</b>
González Galeano	Andrey Alain

#### **TÍTULO DEL DOCUMENTO**

Sistemas dinámicos aplicados al estudio poblacional de la Eisenia Foetida y el análisis de efectos del humus en un cultivo de habichuela.

#### **SUBTÍTULO**

(Aplica solo para Tesis, Artículos Científicos, Disertaciones, Objetos Virtuales de Aprendizaje)

#### **TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Aplica para Tesis/Trabajo de Grado/Pasantía

Licenciada en matemáticas

#### **AÑO DE EDICIÓN DEL DOCUMENTO**

2018

#### **NÚMERO DE PÁGINAS**

90

#### **DESCRIPTORES O PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS** (Usar 6 descriptores o palabras claves)

<b>ESPAÑOL</b>	<b>INGLÉS</b>
1. Comportamiento poblacional	Population behavior
2. Eisenia Foetida	Eisenia Foetida
3. Humus	Humus
4. Sistemas dinámicos	Dynamic systems
5.	
6.	



<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAr113</b>
<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
	<b>PAGINA: 3 de 6</b>

**RESUMEN DEL CONTENIDO EN ESPAÑOL E INGLÉS**  
(Máximo 250 palabras – 1530 caracteres, aplica para resumen en español):

**RESUMEN**

La presente investigación fue una aplicación de las ciencias exactas en agropecuarias, se realizó un experimento en el que se implementó un lombricultivo tomando como base una población de lombriz roja californiana (*Esenia Foetida*) bajo condiciones semicontroladas; ya que constantemente se analizaron variables como temperatura, humedad y PH, estos se mantuvieron dentro de los rangos ideales para el pleno desarrollo de la especie en cuestión. La población dividida en dos muestras y dos lechos se sometieron a conteos, cada 4 y 13 semanas respectivamente; gracias a algunos datos experimentales, y parte de la bibliografía consultada se construyeron tablas en Excel que permitieron inferir un comportamiento exponencial de la población el cual se comparó con el modelo logístico continuo.

El modelo logístico continuo mostró un gran acercamiento al comportamiento de la población, y por tal motivo fue el implementado en el presente estudio. Una vez inferida la capacidad de carga de cada lecho y muestra se procedió a resolver la ecuación diferencial, cuya solución es conocida como la función logística. Por otro lado se logró la optimización del abono producido por estos anélidos tomando como referencia datos existentes en manuales de lombricultura; este sustrato fue puesto a prueba junto al abono químico y un testigo en un cultivo de habichuela, mediante un diseño experimental de bloques completamente al azar con tres tratamientos y tres repeticiones por cada uno, obteniendo el humus los mejores resultados.

**ABSTRACT**

The present investigation was an application of the exact sciences in the agricultural, an experiment was carried out, in this a vermiculture was implemented based on a population of California red worm (*Esenia Foetida*) under semi-controlled conditions; since variables such as temperature, humidity and PH were constantly analyzed, these remained within the ideal ranges for the full development of the species in question. The population divided into two samples and two beds were counted, every 4 and 13 weeks respectively. Thanks to some experimental data, and part of the bibliography consulted, tables were constructed in Excel that allowed to infer an exponential population behavior of the population, this was compared with the continuous logistic model.

The continuous logistic model showed a great approach to the behavior of the population, and for this reason it was implemented in the present study. When the load capacity of each bed and sample was found, the differential equation was solved, whose solution is known as the logistic function. On the other hand, the optimization of the fertilizer produced by these annelids was achieved taking as reference existing data in vermiculture manuals; this substrate was tested together with chemical fertilizer and a "witness" in a bean crop, by means of an experimental design of completely randomized blocks with three treatments and three repetitions for each, obtaining the humus the best results.



### AUTORIZACION DE PUBLICACIÓN

Por medio del presente escrito autorizo (Autorizamos) a la Universidad de Cundinamarca para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mí (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que, en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autoriza a la Universidad de Cundinamarca, a los usuarios de la Biblioteca de la Universidad; así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado una alianza, son:

Marque con una "X":

<b>AUTORIZO (AUTORIZAMOS)</b>	<b>SI</b>	<b>NO</b>
1. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer.		X
2. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet.	X	
3. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previa alianza perfeccionada con la Universidad de Cundinamarca para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones.	X	
4. La inclusión en el Repositorio Institucional.	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

Para el caso de las Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, de manera complementaria, garantizo(garantizamos) en mi(nuestra) calidad de estudiante(s) y por ende autor(es) exclusivo(s), que la Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi(nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y



<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAR113</b>
<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
	<b>PAGINA: 5 de 6</b>

demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestra) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaremos (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “*Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*”, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad de Cundinamarca está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

**NOTA:** (Para Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía):

**Información Confidencial:**

Esta Tesis, Trabajo de Grado o Pasantía, contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de la investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. **SI \_\_\_ NO \_\_\_X\_\_\_**.

En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

### LICENCIA DE PUBLICACIÓN

Como titular(es) del derecho de autor, confiero(erimos) a la Universidad de Cundinamarca una licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integrará en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

a) Estará vigente a partir de la fecha de inclusión en el repositorio, por un plazo de 5 años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del autor. El autor podrá dar por terminada la licencia solicitándolo a la Universidad por escrito. (Para el caso de los Recursos Educativos Digitales, la Licencia de Publicación será permanente).

b) Autoriza a la Universidad de Cundinamarca a publicar la obra en formato y/o soporte digital, conociendo que, dado que se publica en Internet, por este hecho circula con un alcance mundial.

c) Los titulares aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto, renuncian a recibir beneficio alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente licencia y de la licencia de uso con que se publica.

Diagonal 18 No. 20-29 Fusagasugá – Cundinamarca  
Teléfono (091) 8281483 Línea Gratuita 018000976000  
www.ucundinamarca.edu.co E-mail: info@ucundinamarca.edu.co  
NIT: 890.680.062-2

*Documento controlado por el Sistema de Gestión de la Calidad  
Asegúrese que corresponde a la última versión consultando el Portal Institucional*



<b>MACROPROCESO DE APOYO</b>	<b>CÓDIGO: AAAR113</b>
<b>PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO</b>	<b>VERSIÓN: 3</b>
<b>DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	<b>VIGENCIA: 2017-11-16</b>
	<b>PAGINA: 6 de 6</b>

d) El(Los) Autor(es), garantizo(amos) que el documento en cuestión, es producto de mi(nuestra) plena autoría, de mi(nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy(somos) el(los) único(s) titular(es) de la misma. Además, aseguro(aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad de Cundinamarca por tales aspectos.

e) En todo caso la Universidad de Cundinamarca se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del autor y la fecha de publicación.

f) Los titulares autorizan a la Universidad para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión.

g) Los titulares aceptan que la Universidad de Cundinamarca pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

h) Los titulares autorizan que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados en los literales anteriores bajo los límites definidos por la universidad en el "Manual del Repositorio Institucional AAAM003"

i) Para el caso de los Recursos Educativos Digitales producidos por la Oficina de Educación Virtual, sus contenidos de publicación se rigen bajo la Licencia Creative Commons: Atribución- No comercial- Compartir Igual.



j) Para el caso de los Artículos Científicos y Revistas, sus contenidos se rigen bajo la Licencia Creative Commons Atribución- No comercial- Sin derivar.



**Nota:**

Si el documento se basa en un trabajo que ha sido patrocinado o apoyado por una entidad, con excepción de Universidad de Cundinamarca, los autores garantizan que se ha cumplido con los derechos y obligaciones requeridos por el respectivo contrato o acuerdo.

La obra que se integrará en el Repositorio Institucional, está en el(los) siguiente(s) archivo(s).



**MACROPROCESO DE APOYO  
PROCESO GESTIÓN APOYO ACADÉMICO  
DESCRIPCIÓN, AUTORIZACIÓN Y LICENCIA DEL  
REPOSITORIO INSTITUCIONAL**

**CÓDIGO: AAAr113  
VERSIÓN: 3  
VIGENCIA: 2017-11-16  
PAGINA: 7 de 7**

<b>Nombre completo del Archivo Incluida su Extensión (Ej. PerezJuan2017.pdf)</b>	<b>Tipo de documento (ej. Texto, imagen, video, etc.)</b>
1. SistemasdinamicosyEiseniaFoetida.pdf	Texto con imágenes
2.	
3.	
4.	

En constancia de lo anterior, Firmo (amos) el presente documento:

<b>APELLIDOS Y NOMBRES COMPLETOS</b>	<b>FIRMA (autógrafa)</b>
López Prieto Leidy Estefanía	

12.1.50

*Ni la institución ni ningún otro ente o persona ajena a las descritas en esta investigación, serán responsables de las ideas aquí expuestas.*  
*Artículos 9 y 10 ley 23 de 1982.*



SISTEMAS DINÁMICOS APLICADOS AL ESTUDIO POBLACIONAL DE LA  
EISENIA FOETIDA Y EL ANÁLISIS DE EFECTOS DEL HUMUS EN UN  
CULTIVO DE HABICHUELA

LEIDY ESTEFANÍA LÓPEZ PRIETO

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
FUSAGASUGÁ-COLOMBIA  
2018

SISTEMAS DINÁMICOS APLICADOS AL ESTUDIO POBLACIONAL DE LA  
EISENIA FOETIDA Y EL ANÁLISIS DE EFECTOS DEL HUMUS EN UN  
CULTIVO DE HABICHUELA

LEIDY ESTEFANÍA LÓPEZ PRIETO

ASESOR:  
ANDREY GONZALEZ GALEANO

UNIVERSIDAD DE CUNDINAMARCA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
FUSAGASUGÁ-COLOMBIA  
2018

## AGRADECIMIENTOS

Primeramente quiero agradecer a Dios por haberme mostrado el camino que me llevó a elegir esta hermosa carrera y por permitirme culminar esta importante etapa de mi vida.

Agradezco a mis padres Jaime López y Hermina Prieto por su apoyo incondicional, por ser el motor que me motiva a levantarme cada día, porque representan mi felicidad y porque soy el reflejo de su amor, compasión y demás valores humanos.

A mi hermana Yesika López a quien debo gran parte de este trabajo, mi compañera de lucha, a quien admiro infinitamente.

Al profesor Carlos Enrique Restrepo por su amistad, por haberme permitido trabajar con él, pues fue quien me acompañó durante bastante tiempo como tutor principal además de haber sido el pionero de la idea de investigación. Por haber depositado su confianza en mí y creer en mis capacidades para llevar a cabalidad el presente proyecto.

Al profesor Javier Mauricio Sierra por su amistad, disposición, por creer en mí, por motivarme a seguir adelante y por su inmensa colaboración durante todo el proceso.

Al profesor Andrey Gonzáles por asumir el rol de tutor principal para dar culminación a la investigación, por su infinita colaboración y disposición, por su nobleza y sencillez.

A mis grandes amigos Edwin, Leonel, Ruby y Mayerly por ser mi fortaleza en los momentos difíciles, por su compañía, por sus sabios consejos y sobre todo por la alegría que traen a mi vida.

## DEDICATORIA

A mi prima Angie Andrea Sastre López, que en paz descanse. A quien dedico mis triunfos por ella sigo en pie, siempre fue y será mi motivación para seguir y nunca rendirme.

A mi hermana Yesika Eliana López Prieto, por ella este trabajo tiene sentido, mi compañera de vida, de alegrías y de estudio; a quien debo mucho del conocimiento que adquirí durante este proceso.

# Índice

<b>1. RESUMEN</b>	<b>10</b>
<b>2. INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
<b>3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>13</b>
3.1. PREGUNTA . . . . .	13
<b>4. JUSTIFICACIÓN</b>	<b>14</b>
<b>5. OBJETIVOS</b>	<b>15</b>
5.1. GENERAL . . . . .	15
5.2. ESPECÍFICOS . . . . .	15
<b>6. MARCO CONCEPTUAL</b>	<b>16</b>
<b>7. MARCO DE ANTECEDENTES</b>	<b>18</b>
7.1. ESTADO DEL ARTE . . . . .	19
<b>8. MARCO TEÓRICO</b>	<b>25</b>
8.1. LOMBRIZ ROJA CALIFORNIANA (Eisenia Foetida) . . . . .	25
8.1.1. Un poco de historia . . . . .	25
8.1.2. Clasificación zoológica y algunos datos de interés . . . . .	25
8.1.3. Reproducción y ciclo de vida . . . . .	26
8.1.4. Hábitat . . . . .	27
8.1.5. Enemigos . . . . .	28
8.1.6. Humus . . . . .	28
8.2. SISTEMAS DINÁMICOS . . . . .	29
8.2.1. Tiempo discreto . . . . .	29
8.2.2. Tiempo continuo . . . . .	30
8.2.3. Tasa de crecimiento poblacional . . . . .	33
8.2.4. Crecimiento exponencial . . . . .	33
8.2.5. Atractores y repulsores locales . . . . .	35
8.2.6. Modelo logístico en tiempo discreto . . . . .	35
8.2.7. Modelo logístico en tiempo continuo . . . . .	36
<b>9. DISEÑO METODOLÓGICO</b>	<b>38</b>
9.0.1. Ubicación . . . . .	38
9.0.2. Población . . . . .	38
9.0.3. Técnicas y métodos para la recolección de datos . . . . .	38
9.0.4. Métodos de análisis . . . . .	39
9.0.5. Infraestructura y equipos . . . . .	40
9.0.6. Método y técnica de investigación . . . . .	41

9.0.7. Metodología . . . . .	41
<b>10.DESARROLLO DEL PROYECTO</b>	<b>43</b>
10.1. CONTEOS DE POBLACIÓN . . . . .	43
10.2. ANÁLISIS POBLACIONAL Y ECUACIONES . . . . .	47
10.2.1. Análisis poblacional con 7 individuos adultos . . . . .	47
10.2.2. Análisis poblacional con 15 individuos adultos . . . . .	52
10.2.3. Análisis poblacional con 200 individuos adultos . . . . .	57
10.3. MODELO MATEMÁTICO . . . . .	63
10.3.1. Población de crecimiento exponencial continuo . . . . .	63
10.3.2. Modelo de crecimiento logístico . . . . .	67
10.3.3. Capacidad de carga . . . . .	70
10.3.4. Puntos de equilibrio ( $\bar{x}$ ) . . . . .	73
10.3.5. Atractores y repulsores . . . . .	75
10.3.6. Función logística continua . . . . .	77
10.3.7. Relación modelo de crecimiento logístico continuo - modelo de crecimiento exponencial . . . . .	80
10.3.8. Relación conteos-modelo logístico continuo . . . . .	83
10.4. OPTIMIZACIÓN DEL HUMUS . . . . .	84
10.5. EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DEL HUMUS . . . . .	84
10.5.1. Primer cultivo (en su totalidad testigo) . . . . .	84
10.5.2. Segundo cultivo (Diseño experimental) . . . . .	85
<b>11.RESULTADOS</b>	<b>86</b>
<b>12.CONCLUSIONES</b>	<b>87</b>
<b>13.RECOMENDACIONES</b>	<b>88</b>
<b>14.REFERENCIAS</b>	<b>89</b>

## Índice de figuras

1.	Sistema digestivo . . . . .	26
2.	Ciclo de vida . . . . .	27
3.	Lanzamiento de una pelota . . . . .	31
4.	Crecimiento exponencial de bacterias . . . . .	33
5.	Trayecto fusagasugá-San Bernardo . . . . .	38
6.	Conteo de población . . . . .	39
7.	Diseño experimental . . . . .	39
8.	Muestra: Lombrices por cocón . . . . .	43
9.	Tabla de eclosión de cocones . . . . .	44
10.	Crecimiento poblacional, 7 lombrices (3-19 semanas) . . . . .	47
11.	Crecimiento poblacional, 7 lombrices (20-35 semanas) . . . . .	49
12.	Crecimiento poblacional, 7 lombrices (36-51 semanas) . . . . .	50
13.	Crecimiento poblacional, 15 lombrices (3-19 semanas) . . . . .	52
14.	Crecimiento poblacional, 15 lombrices (20-35 semanas) . . . . .	54
15.	Crecimiento poblacional, 15 lombrices (36-51 semanas) . . . . .	55
16.	Crecimiento poblacional, 200 lombrices (3-19 semanas) . . . . .	57
17.	Crecimiento poblacional, 200 lombrices (20-35 semanas) . . . . .	59
18.	Crecimiento poblacional, 200 lombrices (36-51 semanas) . . . . .	60
19.	Función logística 7L . . . . .	77
20.	Función logística 15L . . . . .	78
21.	Función logística 200L . . . . .	79
22.	Relación 7 individuos . . . . .	80
23.	Relación 15 individuos . . . . .	81
24.	Relación 200 individuos . . . . .	82

## Índice de cuadros

1.	Listado de antecedentes . . . . .	18
2.	Clasificación zoológica . . . . .	25
3.	Análisis químico de una muestra de Humus . . . . .	29
4.	Variable discreta y continua . . . . .	33
5.	Individuos por cocón . . . . .	44
6.	Conteos de población (Eisenia Foetida) . . . . .	45
7.	Muestras de PH más representativas durante el proceso. . . . .	64
8.	Muestras de temperatura más representativas durante el proceso. . . . .	64
9.	Muestras de humedad más representativas durante el proceso. . . . .	64
10.	Especies encontradas en las trampas de caída (pitfall) . . . . .	65
11.	Producción tratamiento-repetición . . . . .	85



# 1. RESUMEN

La presente investigación fue una aplicación de las ciencias exactas en agropecuarias, se realizó un experimento en el que se implementó un lombricultivo tomando como base una población de lombriz roja californiana (*Eisenia Foetida*) bajo condiciones semicontroladas; ya que constantemente se analizaron variables como temperatura, humedad y PH, estos se mantuvieron dentro de los rangos ideales para el pleno desarrollo de la especie en cuestión. La población dividida en dos muestras y dos lechos se sometieron a conteos, cada 4 y 13 semanas respectivamente; gracias a algunos datos experimentales, y parte de la bibliografía consultada se construyeron tablas en Excel que permitieron inferir un comportamiento exponencial de la población el cual se comparó con el modelo logístico continuo.

El modelo logístico continuo mostró un gran acercamiento al comportamiento de la población, y por tal motivo fue el implementado en el presente estudio. Una vez inferida la capacidad de carga de cada lecho y muestra se procedió a resolver la ecuación diferencial, cuya solución es conocida como la función logística. Por otro lado se logró la optimización del abono producido por estos anélidos tomando como referencia datos existentes en manuales de lombricultura; este sustrato fue puesto a prueba junto al abono químico y un testigo en un cultivo de habichuela, mediante un diseño experimental de bloques completamente al azar con tres tratamientos y tres repeticiones por cada uno, obteniendo el humus los mejores resultados.

**Palabras clave:** Comportamiento poblacional, *Eisenia Foetida*, humus, sistemas dinámicos.

## ABSTRACT

The present investigation was an application of the exact sciences in the agricultural, an experiment was carried out, in this a vermiculture was implemented based on a population of California red worm (*Esenia Foetida*) under semi-controlled conditions; since variables such as temperature, humidity and PH were constantly analyzed, these remained within the ideal ranges for the full development of the species in question. The population divided into two samples and two beds were counted, every 4 and 13 weeks respectively. Thanks to some experimental data, and part of the bibliography consulted, tables were constructed in Excel that allowed to infer an exponential population behavior of the population, this was compared with the continuous logistic model.

The continuous logistic model showed a great approach to the behavior of the population, and for this reason it was implemented in the present study. When the load capacity of each bed and sample was found, the differential equation was solved, whose solution is known as the logistic function. On the other hand, the optimization of the fertilizer produced by these annelids was achieved taking as reference existing data in vermiculture manuals; this substrate was tested together with chemical fertilizer and a “witness” in a bean crop, by means of an experimental design of completely randomized blocks with three treatments and three repetitions for each, obtaining the humus the best results.

**keywords:** Population behavior, *Eisenia Foetida*, humus, dynamic systems.

## 2. INTRODUCCIÓN

En los últimos años el deterioro de suelos del campo colombiano ha venido incrementando debido a los malos manejos agrícolas y el uso excesivo de productos químicos, pues estos degradan la materia orgánica dejando la tierra cada vez más inerte.

Sin embargo, existen alternativas orgánicas que cumplen un rol similar al de los abonos químicos pero son amigables con el medio ambiente, ya que devuelven nutrientes al suelo que contribuyen a su restauración; este es el caso del humus de lombriz. La *Eisenia foetida* o lombriz roja californiana es uno de los anélidos más usados para el proceso de compostaje, ya que es capaz de resistir altas densidades poblacionales y producir grandes cantidades de abono en muy poco tiempo.

Dada esta situación la presente investigación busca implementar desde las ciencias exactas un sistema matemático de naturaleza dinámica, que permita modelar el comportamiento poblacional de la *Eisenia Foetida*, garantizando las condiciones óptimas de vida de dicho anélido para optimizar su producción de humus y aplicarlo en un cultivo de habichuela, verificando mediante un diseño experimental de bloques completamente al azar su efectividad.

La investigación se lleva a cabo en el municipio de Pandi Cundinamarca, teniendo como base un terreno de cuarenta y nueve metros cuadrados, dos lechos y dos muestras de lombrices alimentadas con residuos orgánicos bajo condiciones semicontroladas, ya que el PH, humedad y temperatura se mantuvieron dentro de los rangos óptimos para el pleno desarrollo de la especie en cuestión. La metodología de investigación recae en la investigación cuantitativa del tipo experimental ya que los datos analizados son cuantificables y utiliza principios encontrados en el método científico como observación, sistematización, medición, experimentación y formulación de hipótesis.

El modelo matemático implementado se ajusta a la dinámica poblacional y utilizando la capacidad de alojamiento es posible optimizar la producción de abono, este beneficia altamente al cultivo implementado. Es recomendable el uso de herramientas computacionales para facilitar y agilizar el proceso de análisis de cada una de las etapas de los individuos estudiados.

### 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Muchas de las investigaciones realizadas en cuanto a ciencias exactas se refiere, son enfocadas netamente a dar solución a algoritmos que enriquecen el discurso teórico de esta ciencia; son pocas aquellas que dirigen su mirada a solucionar problemas de la vida cotidiana, apoyadas en datos experimentales que van tomando forma gracias a las matemáticas; es por ello que se han catalogado como carentes de aplicabilidad.

Luego de haber esbozado un anteproyecto basado en un modelo predador presa, y tomando por objetos de estudio el pepino cohombro conocido como *Cucumis Sativus* y *Frankiniella Occidentallis* también llamado trips, se concluyó que el sistema dinámico a implementar poseía serios problemas en cuanto a la variación de la población, ya que se estaba trabajando en un sistema abierto sujeto a la inmigración y migración de la plaga.

Dado lo anterior y con el firme propósito de realizar un proyecto que contribuya al ámbito agrario, la presente investigación gira en torno al uso de la teoría de sistemas dinámicos, enfocado especialmente en el modelo de crecimiento logístico continuo, que permiten inferir el comportamiento poblacional de la lombriz roja californiana (*Eisenia Foetida*), para luego optimizar el abono orgánico (Humus) producido por esta especie el cual es aplicado en un cultivo de habichuela. Dicho sustrato ayuda a contrarrestar el efecto del uso inadecuado y excesivo de abonos químicos altamente tóxicos.

#### 3.1. PREGUNTA

¿Como mostrar una aplicabilidad de las ciencias exactas en las agropecuarias, al implementar el modelo de crecimiento logístico continuo para predecir el comportamiento poblacional de la *Eisenia Foetida* bajo condiciones semicontroladas, optimizando su producción de humus y evaluando su calidad en un cultivo de habichuela.?

## 4. JUSTIFICACIÓN

La universidad de Cundinamarca sede Fusagasugá tiene como zona de impacto directo la región del Sumapaz, dada su ubicación y la procedencia de sus estudiantes. En dicha región se presentan problemáticas tales como el uso excesivo e inadecuado de productos químicos en el cuidado de sus cultivos, debido a esto surge la necesidad de aportar ideas que permitan dar solución a dicha situación, además de enriquecer el discurso teórico abordado por diferentes autores, proponer alternativas científicas y tecnológicas que sean replicables con el fin de optimizar el aprovechamiento de los recursos naturales, minimizando el impacto sobre el entorno y fomentando el bienestar económico y cultural de los pobladores de la región.

La lombriz roja californiana es uno de los anélidos más utilizados, para el proceso de compostaje, por su capacidad reproductiva e inmunidad a las enfermedades, es una especie que se adapta con facilidad en lechos de diferentes tamaños en donde la temperatura se oscila entre los  $14^{\circ}\text{C}$  y  $40^{\circ}\text{C}$ ; la calidad de abono que producen contiene más oxígeno, fósforo, potasio y calcio, lo que es esencial para la restauración de suelos.

Por su parte la teoría de los sistemas dinámicos es una herramienta que proporciona un modelo matemático para describir formalmente el comportamiento o evolución de una población o algún tipo de crecimiento con determinadas propiedades. Por estas razones se elige el modelo de crecimiento continuo para el presente estudio, ya que permite conocer el comportamiento poblacional de la *Eisenia foetida*. Una vez conocido el comportamiento de la población se obtiene la capacidad de alojamiento la cual conlleva a la optimización del humus producido por esta especie para luego evaluar su efectividad en un cultivo de habichuela.

Se elige dicha temática debido a que es la agricultura uno de los escenarios más importantes en el mundo, pero tristemente es ignorado y ha ido en creciente deterioro debido a malos manejos agrícolas; de igual forma se quiere mostrar que el campo de las ciencias exactas es tan amplio que es posible lograr interdisciplinariedad con cualquier área o ciencia, en este caso las agropecuarias, ya que por muchos años las matemáticas han sido tildadas como carentes de aplicabilidad.

## 5. OBJETIVOS

### 5.1. GENERAL

Mostrar una aplicabilidad de las ciencias exactas en las agropecuarias, al implementar el modelo de crecimiento logístico continuo para predecir el comportamiento poblacional de la *Eisenia Foetida* bajo condiciones semicontroladas, optimizando su producción de humus y evaluando su calidad en un cultivo de habichuela.

### 5.2. ESPECÍFICOS

- Implementar el modelo de crecimiento logístico continuo para predecir el comportamiento poblacional de la *Eisenia Foetida* o también conocida como lombriz roja californiana.
- Establecer las condiciones ambientales óptimas para este anélido con el firme propósito de optimizar su producción de humus.
- Realizar un diseño experimental de bloques completamente al azar en un cultivo de habichuela, observando las diferencias de fertilizantes de carácter químico y orgánico evaluando la calidad del humus.

## 6. MARCO CONCEPTUAL

### Eisenia Foetida

“Es una especie de lombriz de tierra del género Eisenia, esta clasificada en el reino animal como anélido terrestre de la clase de los oligoquetos, siendo su habitad un ambiente humedo, no aceptando la luz. Este anélido es hermafrodita insuficiente, siendo bisexual que necesita aparearse para reproducirse, dotado de 5 corazones y 6 pares de riñones.”<sup>1</sup>

### Humus

“Es una sustancia ligno proteica bastante estable a la descomposición, es un compuesto predominante de la materia orgánica de los suelos, esta compuesto por los restos posmortales vegetales y animales que se encuentran en el suelo y que están sometidos constantemente a procesos de descomposición, transformación y resíntesis.”<sup>2</sup>

### Sistema dinámico

“Es un sistema cuyos parámetros internos (variables de estado) siguen una serie de reglas temporales. se llaman sistemas porque están descritos por un conjunto de ecuaciones, y dinámico porque sus parámetros varían con respecto a alguna variable que generalmente es el tiempo”<sup>3</sup>, para su estudio se hace necesario una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento de determinada población así como el espacio en donde se realizara dicho estudio; se dividen en sistemas discretos y continuos.

### Sistema discreto

En un sistema dinámico discreto el tiempo fluye en pasos 1, 2, 3,..., n.

### Sistema continuo

En un sistema dinámico continuo el tiempo fluye continuamente desde  $-\infty$  a  $+\infty$  y pasa por todo punto de este intervalo.

---

<sup>1</sup>MEJIA ARAYA, Pedro. *Manual de lombricultura*. Camino Villarrica Loncoche Chile. Agroflor lombricultura. s.f. p. 6.

<sup>2</sup>Ibid., p. 34

<sup>3</sup>MANSO MARTOS, Ignacio. *Simulación numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a trozos*. Sevilla España. Universidad de Sevilla, Escuela técnica superior de ingeniería. 2012. p3

## Optimización

Es la selección del mejor elemento (con respecto a algún criterio) de un conjunto de elementos disponibles.

*La optimización es el proceso de ajustar las entradas a las características de un dispositivo, proceso matemático o experimento para encontrar la salida o resultado mínimo o máximo* <sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>VAZQUEZ PEREZ, Rafael. *Introducción a la optimización*. sl. Inteligencia Artificial II. sf. p.6



## 7. MARCO DE ANTECEDENTES

En la esta sección es posible apreciar una gama de conocimiento hallado en diferentes fuentes bibliográficas cuya temática gira en torno al comportamiento poblacional de la eisenia foétida, sistemas dinámicos y sus aplicaciones.

Aunque es poca la información que se encontró al respecto fue la necesaria y suficiente para enriquecer el discurso teórico y direccionar la investigación hasta tal punto de poder comparar datos y sacar a grosso modo conclusiones que se utilizaron para dar veracidad y sustento de la presente investigación.

<b>Año</b>	<b>Lugar</b>	<b>Autor</b>	<b>Palabras clave</b>
2004	Universidad autónoma agraria Antonio Narro México	Fidel Maximiano Peña Ramos	Comportamiento poblacional, simulación.
2005	Universidad de Cundinamarca Fusagasugá Colombia	Dolly Mónica Sánchez Barbosa	Prolificidad, Eisenia Foetida, Glossoscolex sp, lombricompuesto.
2009	Costa Rica	Lolita Durán, Carlos Henríquez	Eisenia Foetida, vermicompost, lombricompost, abonos orgánicos, reproducción de la lombriz roja.
2011	Madrid España	Alfredo Cano Canela	Población, Lotka-Volterra, especies, modelo.
2017	Universidad autónoma agraria Antonio Narro México	Ana Minerva Nuñez Díaz	Eisenia Foetida, sustrato, dinámica poblacional.
2017	Universidad de Córdoba Colombia	C Martínez Bravo, L Maza Angulo, Y Arroyo González, M Mesa Martínez, J Castro Carmo- na, Vergara Gar- ray	Cocón, estiércol, reproducción, sustratos.

Cuadro 1: Listado de antecedentes

## 7.1. ESTADO DEL ARTE

**Un modelo de simulación para estimar la dinámica de una población ideal de Eisenia Foetida (lombriz de tierra, roja californiana).**

Investigación realizada en la universidad Autónoma agraria Antonio Narro por Peña (2004), quien decide profundizar en temáticas como la dinámica de una población ideal de Eisenia Foetida con la finalidad de obtener el título de ingeniero en agrobiología. Peña Ramos aplica un modelo de simulación para estimar el comportamiento de la población ya nombrada teniendo como objetivo profundizar en temas como lo son fecundidad, natalidad, mortalidad supervivencia y tasa intrínseca de crecimiento, cuyos valores idealizados se infirieron de tablas de textos como el manual de lombricultura escrito por Carlo Ferruzzi (2001).

Inicia su investigación con una amplia gama de información sobre los anélidos estudiados, enfatizando en sus estadios de desarrollo cocón, juvenil, sub-adulto y adulto; también se enfoca en la parte histórica de los análisis de sistemas y un vasto marco referencial. Este autor no desarrolla ningún trabajo de campo o experimental, principalmente se dedica a la parte teórica y computacional ya que implementa para el desarrollo de su trabajo de grado un simulador llamado STELLA 2.0 en donde asumen como parámetros constantes PH, humedad, y temperatura.

Su modelo esta diseñado por etapas; etapa 1 identificación de datos empíricos publicados por Ferruzzi, etapa 2 encontrar el modelo poblacional al final de cada 13 semanas, etapa 3 diagrama de simulación. Se presentan gráficos explicativos por cada estadio sin tener en cuenta la capacidad de sostenimiento del ecosistema. Entre los conclusiones se resaltan que el modelo presentó predicciones confiables en los estadios juvenil, sub-adulto y adulto al compararlos con los datos de Ferruzzi pero aun así se requiere un mayor ajuste.

Este ha sido uno de los estudios más cercanos al propósito de la investigación que trata de fundamentar el presente marco referencial.

**Comparación de la prolificidad, producción y calidad del lombricompuesto de la lombriz iridiscente caqueteña (*Glossoscolex Sp*) y roja californiana (*Eisenia Foétida*) utilizando como sustrato ovinaza en el municipio de Armero Guayabal (Tolima)**

Sánchez (2005) Realiza una investigación para optar por el título de zootecnista en la Universidad de Cundinamarca sede Fusagasugá, evaluando la prolificidad, producción y calidad de dos especies de anélidos tales como la lombriz roja californiana (*Eisenia Foétida*) e Iridiscente Caqueteña (*glossoscolex sp*). Estudio en el cual utiliza ovinaza como sustrato durante un periodo de cuatro meses, el proceso se desarrolla en el municipio de Armero Guayabal en la granja de la universidad del Tolima. La autora da inicio a su investigación realizando un recorrido por la historia y características de las lombrices, así como la descripción de las condiciones de vida necesarias para un pleno desarrollo de la población, resaltando la importancia de las especies nativas como lo es la Iridiscente Caqueteña. Profundiza en las características del humus y su uso en la agricultura colombiana.

Para evaluar la producción y calidad del lombricompuesto utiliza 4000 individuos de cada especie (8000 lombrices) que divide en 32 cajones para una densidad de 250 por cada uno de ellos, durante el proceso se incorpora estiércol ovino como sustrato, el cual es sometido a dos condiciones ambientales interior (bajo techo) y exterior (intemperie) y cuyo resultado final se basa en pesar la cantidad de sustrato compostado ignorando el número de anélidos.

Para evaluar el crecimiento de la población en otro lecho divide 32 recipientes de icopor y coloca 320 anélidos de cada una de las especies (640 lombrices), es decir una densidad de 20 por cajón, siendo todos ellos adultos y de igual forma los somete a las dos condiciones ambientales nombradas anteriormente. Realiza un único conteo de la población (adultas, juveniles y capullos) y con ayuda de métodos estadísticos llega a la conclusión de que la *Eisenia Foétida* posee mayor capacidad reproductiva sin importar el ambiente.

Finalmente demuestra mediante un análisis del compuesto orgánico (análisis de laboratorio del humus obtenido) que es la lombriz roja californiana quien alimentada ya sea a la intemperie o bajo techo, composta abonos de mayor calidad y por lo tanto mayor capacidad para restaurar terrenos pobres de materia orgánica.

## **Crecimiento y reproducción de la lombriz roja (*eisenia foetida*) en cinco sustratos orgánicos.**

Duran y Henríquez (2009) realizan la publicación de una nota técnica acerca de un experimento en el cual evalúan el crecimiento poblacional y reproducción de la lombriz roja californiana en sustratos como estiércol vacuno, broza de café, residuos de banano, restos de follaje de ornamentales y residuos de origen doméstico durante un periodo de tres meses.

Los autores afirman que diariamente se genera aproximadamente un 55% de material biodegradable derivado de diversas actividades humanas, de igual forma aseguran que una de las opciones existentes para el tratamiento de este tipo de residuos es la lombricultura; además de que esta labor genera ingresos. Para este experimento se utilizaron 20000 individuos adultos organizados en 5 tratamientos con 4 repeticiones completamente al azar que es lo que se conoce como un diseño experimental; se controló la humedad utilizando el método propuesto por Ferruzi (1986) conocido como la prueba de puño.

Se realizan conteos de capsulas para inferir el índice de reproducción, se pesan y clasifican los anélidos por estadios de desarrollo a los 45 días y al final del experimento cuando se obtiene los datos de estos conteos y pesos, se realiza un análisis estadísticos en donde el dato más importante es la varianza. Al llegar a los 90 días se evidenció que los residuos de cocina obtuvieron el mayor peso en las lombrices; lo cual es inversamente proporcional al índice de reproducción ya que fueron estos residuos que junto a los de banano presentaron los menores valores.

Debido a esto se concluye que el crecimiento y reproducción de la lombriz roja están relacionados con el tipo de sustrato en el cual vive y se desarrolla, de igual forma se encuentra que las lombrices que tienen mayor peso poseen menor índice de reproducción. Finalmente se recomienda complementar la información con análisis bioquímicos de los sustratos.

## Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional.

Cano (2011) Realiza un trabajo investigativo para optar por el título de máster de matemáticas avanzadas en la universidad Nacional de educación a distancia (UNED) Madrid España. Con su trabajo pretende ofrecer una visión de los sistemas de Lotka-Volterra aplicados al estudio de poblaciones biológicas .

Se basa en una amplia gama de conocimientos, explicaciones y ejemplos claros comprendidos en una guía estilo libro. Comienza con el estudio de modelos con una sola especie en el cual propone como ejemplo la especie humana ya que carece de depredadores naturales y su supervivencia no depende (al menos exclusivamente) de la existencia de presas sino de la abundancia y escases. Dentro de este mismo capítulo habla sobre el modelo exponencial de la forma  $x(t) = x_0 e^{rt}$ , sostiene que un modelo de este tipo es muy simple para describir la población humana, pero que es interesante para estudios de corto periodo con animales no sujetos a depredación, también explica claramente la ecuación logística para un modelo discreto. Usa gráficos y tablas de tal manera que el lector se lleva una idea del comportamiento de cada modelo.

Los demás capítulos tratan de modelos de Lotka-Volterra con dos especies, ecuaciones no lineales para dos especies , ecuaciones de Lotka-Volterra para más de dos especies y un sistema de Lotka-Volterra no autónomo. Es un texto muy completo con un lenguaje claro, empieza por algunas definiciones para contextualizar al lector. Finalmente crea un apéndice de códigos para el software Mathematica de cada una de las figuras expuestas.

## **Monitoreo de la dinámica poblacional de la lombriz de tierra roja californiana (*Eisenia Foétida*) en cuatro sustratos orgánicos.**

Núñez (2017) realiza una investigación bajo la modalidad de tesis para obtener el título de ingeniera agrícola y ambiental de la universidad autónoma agraria Antonio Narro de México. El principal objetivo de esta investigación se basa en evaluar la dinámica poblacional de la *Eisenia Foétida* en cuatro sustratos orgánicos como residuos de maguey, estiércol bovino, paja de frijol y mantillo de mezquite.

Al igual que los anteriores estudios, esta autora también realiza una excelente recopilación de información sobre las características y etapas de desarrollo de dicho anélido. Su trabajo principalmente se desarrolla al inocular dos lombrices en recipientes de unicel (desechables) para un total de 20 muestras las cuales fueron ubicadas completamente al azar mediante un diseño experimental de cuatro tratamientos con cinco repeticiones por cada uno.

Los resultados obtenidos se incorporan en el paquete SAS 9.1 para su respectivo análisis; se evalúan la cantidad de individuos en estado cocón, los juveniles y adultos. Se realizaron conteos de población cada semana vertiendo cada población en sus diversas etapas en nuevos recipientes con las mismas características anteriores.

Los resultados arrojados muestran que los residuos de maguey son el sustrato con mayores resultados aunque no alcanza los esperados en cuanto a población se refiere, ya que durante el estudio no se tienen en cuenta las condiciones ambientales tales como temperatura, humedad y pH para lograr un ambiente con condiciones semicontroladas.

## **Evaluación reproductiva de la lombriz roja californiana *Eisenia Foetida* alimentada con diferentes sustratos en el trópico bajo colombiano.**

Martínez, Maza, Arroyo, Et al (2017) Conforman un grupo de investigación en producción animal tropical, de la facultad de medicina veterinaria y zootecnia de la universidad de Córdoba y realizan un estudio con el objetivo de evaluar las características reproductivas de la lombriz roja californiana (*Eisenia Foetida*) utilizando diferentes tipos de sustrato como alimentación, dichos sustratos son: bovinaza, ovinaza, equinaza y conejaza.

Sostienen que los residuos orgánicos como estiércol de animales se ha convertido en un problema para el medio ambiente, ya terminan en ríos contaminando las aguas y es por esta razón que deciden utilizarlos como sustrato para contrarrestar este efecto y contribuir a la naturaleza.

En este estudio se evalúa el crecimiento poblacional de anélidos jóvenes y adulto así como el número de cocones cuyo análisis realiza mediante un diseño experimental dividiendo las poblaciones de la siguiente manera. Para evaluar el número de cocones se trabajó con un total 120 lombrices adultas de la variedad roja californiana, las cuales fueron divididas en 4 diferentes tratamientos (estiércol bovino, ovino, equino y conejo) cada uno con 30 lombrices, para el crecimiento de la población se utilizaron en total 180 lombrices, 45 por cada tratamiento finalmente para evaluar el número de crías se utilizaron 120 cocones sembrados en vasos desechables que contenían 30 lombrices en los diferentes sustratos.

Para evaluar el crecimiento poblacional realizaron conteos a los 60, 90 y 120 días. Una vez inferidos los datos de las variables se llevó a cabo un análisis de varianza con la finalidad de determinar diferencias estadísticas cuyos datos se incorporan en el programa SAS (2007).

Finalmente el grupo de investigación concluye que los sustratos utilizados no tuvieron efecto sobre el número promedio de cocones por lombriz, La ovinaza tuvo el mejor desempeño en relación al número medio de lombrices jóvenes al día 60, pero el menor número de lombrices adultas al día 90. En términos generales el número de lombrices jóvenes y adultas fueron similares al final del experimento y como última conclusión; el nacimiento de crías de *Eisenia foetida* osciló entre 1 y 2 crías y no se encontraron diferencias estadísticas significativas entre las medias de los sustratos evaluados.

## 8. MARCO TEÓRICO

### 8.1. LOMBRIZ ROJA CALIFORNIANA (*Eisenia Foetida*)

#### 8.1.1. Un poco de historia

*“Hace más de tres mil años A.C la civilización de los Sumerios dieron importancia a las lombrices, establecían la calidad de los suelos de cultivo sobre la base de la densidad de lombrices que encontraban al excavar un hueco en la tierra. Por su parte en el antiguo Egipto se consideraba a la lombriz como animal enormemente valioso tanto así que se llegó a diosificar. Ello llegaba al extremo, en que se tenían previstos castigos muy rigurosos, incluso la pena de muerte para quien intentara exportar fuera del reino una sola lombriz. Uno de los acontecimientos anuales que se producía en el antiguo Egipto era el desbordamiento de las aguas del río Nilo, las que al retirarse dejaban sobre el suelo una capa de limo el cual bajo el trabajo de una variedad muy activa de lombrices, era humificado y lograba que el nivel de fertilidad de esas tierras fuera realmente excepcional.”*<sup>5</sup>

Aunque es comúnmente conocida como lombriz roja californiana su origen no reside en este lugar sino en Eurasia; adquiere ese nombre ya que fue en California en donde se le otorgó mayor importancia y se empezó a implementar su cuidado con fines lucrativos y en beneficio del medio ambiente, aproximadamente a partir de los años 50.

#### 8.1.2. Clasificación zoológica y algunos datos de interés

<b>Reino</b>	Animal
<b>Tipo</b>	Anélido
<b>Clase</b>	Oligoqueto
<b>Orden</b>	Opisthoro
<b>Familia</b>	Lombricidae
<b>Género</b>	<i>Eisenia</i>
<b>Especie</b>	<i>Eisenia Foetida</i>

Cuadro 2: Clasificación zoológica

- Es uno de los seres más numerosos que pueblan el suelo.
- Pueden sobrevivir hasta en una densidad de 50.000 por metro cuadrado.

---

<sup>5</sup>MEJIA ARAYA. Op. cit., p. 4.



- Mide de 6 a 8 centímetros.
- A pesar de ser ciega es sensible a la luz, la exposición por más de 3 minutos causa la muerte.
- Puede alcanzar un peso hasta de 1,4 gramos.
- Diariamente come una cantidad de tierra igual a su peso.
- El 60 % de lo que consume se convierte en humus.
- Vive entre 4,5 y 6 años.
- Son inmunes a las enfermedades y tienen una alta capacidad de regeneración.
- Su sistema digestivo está compuesto por:

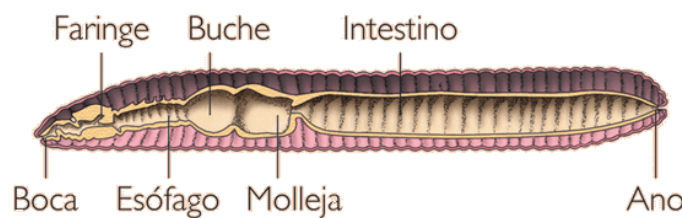


Figura 1: Sistema digestivo

Aguiar, K. 2010. Sistema digestivo. Ilustración. Recuperado de:  
<http://karenaguilar06.blogspot.com.co/2010/11/patrones-del-aparato-digestivo-en-los.html>

### 8.1.3. Reproducción y ciclo de vida

La *Eisenia Foetida* madura sexualmente entre el segundo y tercer mes de vida, y es su clitelium el que indica esta madurez. Esta especie se reproduce principalmente cuando la temperatura está entre los 14°C y 27°C, siendo la adecuada 21°C, una vez son adultas se reproducen durante toda su vida. Luego de aparearse entre los 7 y 10 días cada lombriz deposita una capsula también conocida como cocon (huevo) de color amarillento, para hacerlo sube a la superficie ya que esta frecuenta los cincuenta primeros centímetros de profundidad cuando no se alimenta. Luego de 21 días aproximadamente de cada cocon nacen en promedio de 2 a 4 lombrices; “al nacer el grupo de pequeñas lombrices es de color blanco. A los 5 o 6 días adquieren una tonalidad rosa y ya a los 15 a 20 días se parecen fenotípicamente sus progenitores”<sup>6</sup>

<sup>6</sup>FERRUZZI, Carlo. *Manual de lombricultura*. Madrid España. Ediciones mundi-prensa. 2001. p. 16.

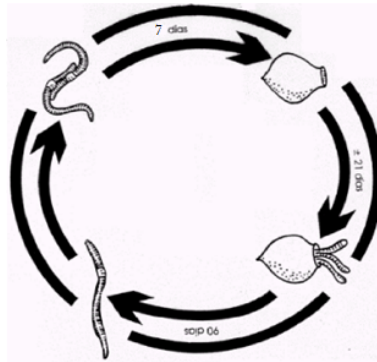


Figura 2: Ciclo de vida

Mendoza, L. 2008. Ciclo de vida. Ilustración. Manual de lombricultura. p.23.

#### 8.1.4. Hábitat

Los lechos pueden ser contruidos usando materiales del medio verificando que la profundidad de estos esté entre los 12cm y 40cm siendo el ideal entre 15cm y 20cm. Este debe poseer un desnivel con la finalidad de obtener lixiviados. En lo posible tratar que los lechos no estén expuestos a la luz directa del sol y a la lluvia, es decir se puede techar el lugar donde estén ubicados.

Las condiciones en las que se mantiene el lecho donde estén las lombrices es de vital importancia para su crecimiento y reproducción. El alimento que se les proporciona debe estar libre de olores, moscas y cualquier otra plaga que sea perjudicial para la especie en cuestión; puede usarse desde desechos domésticos (cocina), papel, aserrín, hasta estiércol preferiblemente de animales herbívoros. Se coloca cada vez que el anterior vaya desapareciendo para evitar olores, nunca se debe colocar el alimento de tal forma que cubra toda la superficie del lecho y tampoco apilar montañas de este mismo.

Es recomendable constantemente realizar pruebas de PH para verificar la acidez o alcalinidad de la cama, el rango ideal es entre 7-9, puede medirse usando cintas indicadoras; de igual forma se debe tener en cuenta la humedad, esta se puede medir usando un termohigrómetro cuya medida optima oscila entre el 60 % y 85 %; o con la conocida prueba de puño, la cual consiste de apretar con nuestra mano una porción de tierra hasta verificar que unas cuantas gotas salen de esta (solo unas cuantas gotas). El riego debe ser fino, es decir, no debe regarse a chorro; es perjudicial para la Eisenia Foetida el exceso de humedad como también la falta de esta, por eso se recomienda continuas observaciones.

En cuanto a la temperatura se refiere, la ideal varia entre los 14° y 27°, también puede medirse usando un termohigrómetro.

### 8.1.5. Enemigos

- Ratas
- Serpientes
- Sapos
- Pájaros y gallinas
- Cienpies
- Gorgojos
- Hormigas

### 8.1.6. Humus

El término humus se designa a la civilización griega cuyo significado es cimiento. Es la capa superior del suelo que se encuentra compuesta de material orgánico en descomposición

*“La cosecha consiste en separar las lombrices de la lombricomposta o vermicomposta obtenida y esta se logra debido a que las lombrices ingieren grandes cantidades de materia orgánica descompuesta. De esta ingesta, hasta el 60 % se excreta en forma de humus de lombriz, que constituye un sustrato ideal para la proliferación de microorganismos útiles. Las lombrices transforman los minerales no asimilables presentes en los desechos, en nitratos y fosfatos directamente en asimilables por las plantas”.<sup>7</sup>*

El humus de color café y no sufre procesos de fermentación ni putrefacción. La recolección de este sustrato no posee una fecha específica o estándar aunque en algunos textos se dice que entre los 3 y 6 meses pero en realidad esto depende de las condiciones en las que se encuentren los anélidos, y por lo general puede llevar hasta más de un año este proceso, algunas de las señales que nos pueden indicar cuando hay que recoger el humus de lombriz son

- Cuando la comida ha desaparecido, esto sucede cuando hay una gran cantidad de lombrices.
- Cuando se evidencia más humus que comida, se observa en el lecho un sustrato fino y sin olor.

---

<sup>7</sup>MENDOZA GÓMEZ, Lennis. *Manual de lombricultura*. Chiapas México. Colegio de estudios científicos y tecnológicos. Secretaría de educación pública. 2008. p. 33.

- Cuando no hay más espacio para poner comida.<sup>8</sup>

En cuanto al método para separar el sustrato de los anélidos es muy sencillo

*“solo hay que dejarlas uno o dos días sin alimento (no agregar alimento), y después poner alimento nuevo a un lado del lugar donde se encuentran. las lombrices en busca de alimento irán a su nuevo lugar rápidamente (el 50 % de las lombrices llegará en solo unas horas). Pero quedarán en el lombricompost los capullos y las pequeñas lombrices, para que lleguen a trasladarse las pequeñas lombrices y las que nacerán después es necesario esperar al menos 30 días.”<sup>9</sup>*

<b>Nitrógeno</b>	5 %
<b>Fósforo</b>	5 %
<b>Potasio</b>	5 %
<b>Calcio</b>	4 %
<b>Carga bacteriana</b>	2 billones por gramo
<b>PH</b>	7 y 7.5

Cuadro 3: Análisis químico de una muestra de Humus

## 8.2. SISTEMAS DINÁMICOS

Es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo; a través de él se intenta predecir que sucederá después, muchos de los sucesos que se dan a nuestro alrededor son posibles de modelar usando sistemas dinámicos. Estos se dividen en discretos y continuos.

### 8.2.1. Tiempo discreto

Cuando se habla de tiempo discreto se refiere a una secuencia de tiempo separada por unidades, o pequeños trozos; algunas veces se elige un intervalo de tiempo constante y los puntos son equidistantes. Por ejemplo: un año, un día, 3 años, 6 meses, etc. Un ejemplo muy sencillo y el cual podemos encontrar en el texto “introduction to dynamical system”<sup>10</sup> se basa en el estado de una cuenta bancaria y el incremento del

<sup>8</sup>RODRÍGUEZ, Rogelio. *Lombricultura casera*. [en línea.] 24 mayo 2015 [revizado 28 Octubre 2017]. Disponible en internet <http://lombricultura-casera.com/cada-cuando-hay-que-recoger-el-humus-de-lombriz/>

<sup>9</sup>MENDOZA GÓMEZ. Op.cit., p. 34

<sup>10</sup>SCHEINERMAN, Edward R. *Invitation to dynamical systems*. s.l. Department of Mathematical Sciences The Johns Hopkins University. 1996. p. 2.

dinero de dicha cuenta dado por los intereses.

Si abrimos una cuenta bancaria con un monto de \$100 a un interés de 6% anual, la ecuación que nos representa el crecimiento de esta cuenta es:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= 1,06x(k) \\x(0) &= x_0 \\x_0 &= 100\end{aligned}$$

Se hace necesario colocar esa última restricción ya que la ecuación por sí sola no permite inferir el estado inicial de la cuenta bancaria. Veamos algunos valores futuros dados en años de dicha cuenta.

• Un año es  $x(1) = 1,06x(0)$ , como  $x(0) = 100$  entonces

$$\begin{aligned}x(1) &= 1,06(100) \\&= 106\end{aligned}$$

• Dos años es  $x(2) = 1,06x(1)$ , como  $x(1) = 106$  entonces

$$\begin{aligned}x(2) &= 1,06(106) \\&= 112,36 \\&\vdots\end{aligned}$$

•  $k$  años es  $x(k) = (1,06)^k(100)$ , es decir

$$x(k) = (1,06)^k x_0$$

Esta última ecuación es la fórmula general para  $x(k)$ , ya que cumple que  $x(0) = x_0$  y que  $x(k+1) = 1,06x(k)$

### 8.2.2. Tiempo continuo

En este caso el tiempo progresa continuamente, los intervalos tienden a ser demasiado pequeños; por ejemplo cada minuto, cada segundo, cada milésima de segundo (cuanto más continuo mejor); sea  $t$  el tiempo,  $t$  puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado  $t_\alpha \leq t \leq t_\beta$ . Veamos otro ejemplo tomado del libro *Invitation to dynamical systems*



Figura 3: Lanzamiento de una pelota

Anónimo. 2010. Lanzamiento vertical hacia arriba. Ilustración. Recuperado de:  
<http://laaceleracion.blogspot.com.co/2010/06/lanzamiento-vertical-hacia-arriba-se.html>

“Imaginemos que se lanza una pelota hacia arriba. En este ejemplo preguntarse por cual será su estado inmediatamente siguiente es complicado debido a que los intervalos de tiempo son continuos; además porque este no solo depende del tiempo sino de la velocidad y la aceleración, lo cual es posible expresarse de la siguiente manera”<sup>11</sup>

$$x = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}$$

donde  $h$  es altura y  $v$  es velocidad.

Sabemos que  $v = \frac{dh}{dt}$  ( $t =$  tiempo), y que por la acción de la gravedad la aceleración  $\frac{dv}{dt} = -g$  ( $g$  es positiva)

$$\begin{aligned} h'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -g \end{aligned}$$

Llevándolo a notación matricial tenemos

$$\begin{pmatrix} h'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

---

<sup>11</sup>Ibid., p. 3-4.

Esta notación es de la forma  $f(x) = Ax + b$ ; esta es por lo general la forma de todos los sistemas dinámicos en tiempo continuo.

Supongamos que la pelota comienza a una altura  $h_0$  con una velocidad ascendente de  $v_0$

$$x_0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Por física sabemos que las ecuaciones de velocidad y distancia (en este caso altura) están dadas por:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) &= v_0 - gt \end{aligned}$$

las cuales describen el movimiento de la pelota.

Si  $t = 0$  las ecuaciones están dadas:

$$\begin{aligned} h(t) &= h_0 \\ v(t) &= v_0 \end{aligned}$$

Ahora si derivamos  $h(t)$  y  $v(t)$  tenemos

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{d}{dt}[h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2] \\ &= v_0 - gt \\ &= v(t) \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{d}{dt}[v_0 - gt] \\ &= -g \end{aligned}$$

Lo que permite verificar las ecuaciones anteriormente mencionadas.

Observemos la siguiente tabla la cual nos muestra las diferencias entre variable discreta y continua.

Discreto	Continuo
Valor observable	El valor puede no ser observable
Puede ser medida con exactitud	Nunca puede ser medida con exactitud
Instantes espaciados de tiempo	cualquier instante de tiempo

Cuadro 4: Variable discreta y continua

### 8.2.3. Tasa de crecimiento poblacional

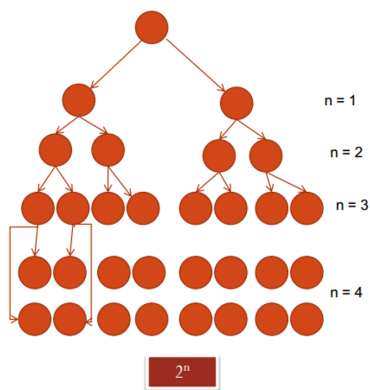
Es la medida del aumento o disminución de la población en un determinado periodo de tiempo. No debe confundirse con la tasa de natalidad; ya que la tasa de crecimiento poblacional se refiere a la natalidad menos la mortalidad.

### 8.2.4. Crecimiento exponencial

ejemplo tomado del libro Introduction to mathematical systems <sup>12</sup>

#### Microbios

Las bacterias son microorganismos cuyo crecimiento poblacional se comporta de manera exponencial



En donde n = al número de generaciones

Figura 4: Crecimiento exponencial de bacterias

Anónimo. 2016. Crecimiento exponencial a partir de una célula madre. Ilustración. Recuperado de: <https://microbiosparapincipiantes.wordpress.com/2016/08/02/como-se-reproducen-las-bacterias/>

En este ejemplo podemos encontrar los nacimientos ( $b$ ) y la velocidad con la que mueren las bacterias ( $p$ ), es decir, la población de bacterias esta creciendo a una tasa  $(b - p) = r$

<sup>12</sup>SCHEINERMAN. Op. cit., p. 16-17.



Si se hay una cantidad de  $x$  de bacterias en un frasco, la velocidad de crecimiento de estas esta dada por:  $(b - p)x = rx = \frac{dx}{dt}$ . Al iniciar con  $x_0$  bacterias en  $t = 0$ , entonces  $x(t) = e^{rt}x_0$ .

Dado que el número de bacterias será muy grande el modelo planteado anteriormente a largo plazo no es realista

Si la tasa de natalidad está dada por  $bx$ , suponiendo que la tasa de mortalidad es  $px$ .

Si hay  $x$  bacterias, estas están disminuyendo en número a una velocidad  $(px)x = px^2$ , de esta forma la dinámica del sistema estría dada por:  $\frac{dx}{dt} = bx - px^2$

### Equilibrio

¿Es posible encontrar un  $x^*$  tal que  $bx^* - px^{*2} = 0$  ?

Esto es equivalente a decir que la población no aumenta ni disminuye, es decir,  $\frac{dx}{dt} = 0$   
 $\frac{dx}{dt} = bx - px^2 = 0$ , en esta ecuación es posible si  $x = 0$  ó  $x = \frac{b}{p}$ .

En  $x^* = 0$ , es obvio que hay un equilibrio, pues dado que no hay bacterias, nadie puede nacer y nadie puede morir. En un lapso de tiempo muy largo “para siempre” tampoco habrán bacterias en el frasco debido al grado de contaminación que hay en este.

Supongamos un grado de contaminación no muy alto y que hay una cantidad de bacterias  $x$  en el frasco ( $x > 0$  y  $x < \frac{b}{p}$ ) se tiene que  $\frac{dx}{dt} = bx - px^2 > 0$ , lo que esto nos muestra es que el número de bacterias empieza a aumentar tan pronto como el frasco es contaminado.

por otro lado si  $x^* = \frac{b}{p}$  el nacimiento de las bacterias se esta dando a una tasa de  $\frac{b^2}{p}$  que viene de

$$bx = b\left(\frac{b}{p}\right) = \frac{b^2}{p} \text{ en el caso de que } x^* = x$$

y la muerte a una tasa de  $\frac{b^2}{p}$  que viene de

$$px^2 = p\left(\frac{b}{p}\right)^2 = \frac{b^2}{p} \text{ en el caso de que } x^* = x$$

Esto indica que la tasa de mortalidad y natalidad están exactamente en equilibrio, ahora veamos que sucede si  $x^*$  esta por encima o por debajo de  $\frac{b}{p}$ . Si  $x$  esta por encima  $\frac{dx}{dt}$  es negativa ya r el grado de contaminación del frasco es tal alto que el número de bacterias empieza a disminuir hasta llegar al equilibrio  $\frac{b}{p}$ .

Ahora si esta por debajo  $\frac{dx}{dt}$  es positiva, asi que la poblacion crecerá hasta llegar a el punto de equilibrio  $\frac{b}{p}$ . por tanto  $\frac{b}{p}$  es un equilibrio estable.

### 8.2.5. Atractores y repulsores locales

**Atractor:** es un valor hacia el cual tiende un sistema después de un tiempo infinito y con determinadas condiciones iniciales. Se encuentra dentro del grupo de puntos críticos y es también conocido como punto fijo.

**Repulsor:** es un punto del sistema que no es atractor, es decir, las trayectorias que inician cercanas a este punto divergen conforme pasa el tiempo. Al igual que en el caso anterior este valor es un punto crítico del sistema.

### 8.2.6. Modelo logístico en tiempo discreto

El modelo de tiempo discreto más popular para una sola especie es la ecuación logística discreta

$$x(t+1) = x(t) \left[ 1 + r \left( 1 - \frac{x(t)}{k} \right) \right]$$

Donde  $r$  es el parámetro de crecimiento y  $k$  la capacidad de alojamiento; ambas son constante positivas.

“ La ecuación logística discreta tiene la característica biológica poco realista de que a menos que se restrinja el tamaño de la población inicial y el parámetro de crecimiento, pueden aparecer tamaños de población negativos. Un ejemplo de ecuación que tiene las mismas propiedades que la ecuación logística pero que no admite poblaciones negativas, es la Curva de Ricker”<sup>13</sup>

$$x(t+1) = x(t)e^{r(1-\frac{x(t)}{k})}$$

**Teorema 1** *Sea  $f$  una función que describe el comportamiento de un sistema y sea  $\bar{x}$  un punto crítico del sistema*

- *si  $|f'(\bar{x})| < 1$  entonces  $\bar{x}$  es un atractor local.*
- *si  $|f'(\bar{x})| > 1$  entonces  $\bar{x}$  es un repulsor local.*

---

<sup>13</sup>COLIN W, Clark. *Mathematical Bioeconomics: the optimal management of renewable resources*. Estados Unidos de América. Wiley & Sons, Inc. Segunda Edición. 1990. p. 11.

### 8.2.7. Modelo logístico en tiempo continuo

“Esta es la famosa ecuación logística primero propuesta como modelo de población por P.F Verhulst en 1838. La constante  $r$  asumida como positiva es llamada la tasa intrínseca de crecimiento. La constante positiva  $k$  es usualmente referida como la capacidad de carga ambiental o nivel de saturación ”<sup>14</sup>

$$x'(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) \quad (1)$$

con  $x(0) = x_0$

#### Puntos de equilibrio

Consiste en encontrar todas las soluciones constantes de la ecuación (1), esto es aquellas cuya derivada es cero.

$$rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) = 0$$

Existen dos puntos que cumplen con esta igualdad; el primero es  $x(t) = 0$  y  $x(t) = k$  veamos

cuando  $x(t) = 0$

$$r0 \left(1 - \frac{0}{k}\right) = 0$$

$$0 = 0$$

Ahora cuando  $x(t) = k$

$$rk \left(1 - \frac{k}{k}\right) = 0$$

$$rk(1 - 1) = 0$$

$$rk(0) = 0$$

$$0 = 0$$

---

<sup>14</sup>RUIZ, Juan. *Modelos Biológicos*. España. Departamento de Matemáticas. Universidad de Alcalá de Henares. Sf. p. 11.

## Atractores y repulsores

**Teorema 2** Sea  $f$  una función que describe el comportamiento de un sistema y sea  $\bar{x}$  un punto crítico del sistema

- si  $f'(\bar{x}) < 0$  entonces  $\bar{x}$  es un atractor local.
- si  $f'(\bar{x}) > 0$  entonces  $\bar{x}$  es un repulsor local.

Sacando la segunda derivada de (1)

$$= r \left( 1 - \frac{x(t)}{k} \right) + rx(t) \left( \frac{-1}{k} \right) \quad (2)$$

Así evaluando los puntos de equilibrio  $x(t) = 0$  y  $x(t) = k$  tenemos

$$\bar{x} = 0$$

$$r \left( 1 - \frac{0}{k} \right) + r(0) \left( \frac{-1}{k} \right) = r$$

como  $r > 0$  según el teorema  $\bar{x}$  es un repulsor local.

ahora  $\bar{x} = k$

$$r \left( 1 - \frac{k}{k} \right) + rk \left( \frac{-1}{k} \right) = -r$$

como  $r < 0$  según el teorema  $\bar{x}$  es un atractor local.

## 9. DISEÑO METODOLÓGICO

### 9.0.1. Ubicación

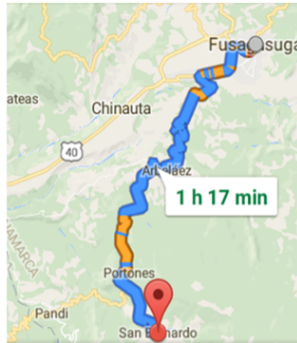


Figura 5: Trayecto fusagasugá-San Bernardo

Goole Maps. 2017. Trayecto Fusagasugá a San Bernardo. Mapa.

El presente proyecto se desarrolló en frontera con el municipio de San Bernardo Cundinamarca, en la vereda buenos Aires bajo (Pandi). Se encuentra ubicada a 99 km de la capital de la publica, se caracteriza por ser despensa agrícola del Sumapaz, debido a la fertilidad de las tierras y su variedad de climas. La temperatura oscila entre 21 °C y 27°C, en este entorno existe un buen aprovechamiento del terreno, es tierra fértil la cual posee una buena cubierta vegetal rodeada de flora y fauna variada.

### 9.0.2. Población

Para la realización del presente trabajo se contó una población inicial de 200 lombrices de la especie roja californiana (*Eisenia Foetida*), todas ellas adultas.

### 9.0.3. Técnicas y métodos para la recolección de datos

Para la recolección de los datos con respecto al lombricultivo se hizo necesario llevar registros escritos y fotográficos de medición del PH, temperatura, humedad y crecimiento poblacional. Se realizaron conteos a la población y observaciones de su comportamiento.

En cuanto al cultivo de habichuela se llevaron de igual forma registros escritos y fotográficos de toma de altura, porcentaje germinación, cosecha recolectada y la realización de un diseño experimental basado el la efectividad de fertilizantes de carácter químico y orgánico.



Figura 6: Conteo de población

López, E. 2017. Conteo de población. Fotografía

#### 9.0.4. Métodos de análisis

Para el análisis de la información fue necesario utilizar sistemas dinámicos basados en el modelo logístico continuo, métodos estadísticos tales como los análisis de dispersión, diseño experimental de bloques completamente al azar con tres tratamientos y tres repeticiones.

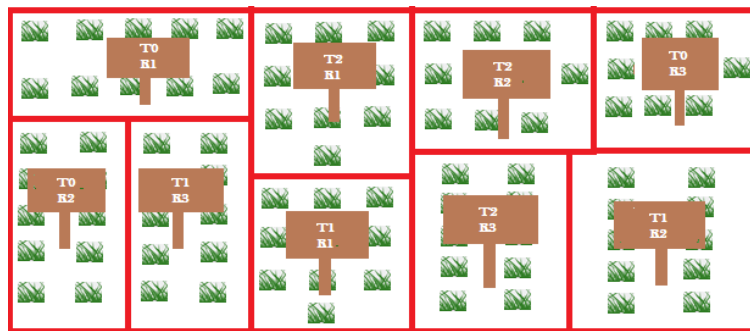


Figura 7: Diseño experimental

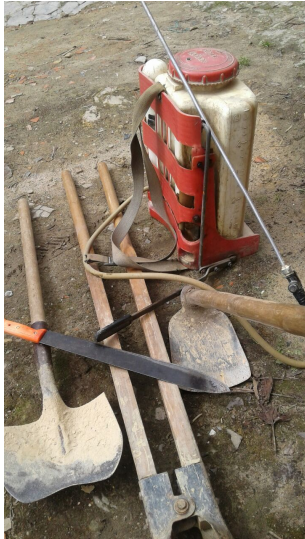
López, E. 2017. Diseño experimental. Ilustración.

Tratamientos.

- **T0:** siembra directa (testigo) sin aplicación alguna de fertilizante.
- **T1:** Aplicación del humus de la lombriz roja californiana como fertilizante.
- **T2:** Aplicación de un fertilizante químico.

### 9.0.5. Infraestructura y equipos

Para la realización del proyecto se contó con herramientas para labrar el campo tales como azadón, pala, hoyadora, machete y maquina fumigadora; 200 lombrices de la especie roja californiana, terreno de  $49m^2$ , termohigrómetro que permite medir la temperatura y humedad, cintas indicadoras de PH, Hortalizas para la elaboración de extractos como ají, ajo y ajenojo.



López, E. 2017.  
Herramientas para labrar  
el campo. Fotografía



López, E. 2017. Terreno utilizado.  
Fotografía



López, E. 2017. Población empleada.  
Fotografía



López, E. 2017. Termohigrómetro.  
Fotografía



López, E. 2017. Cintas Indicadoras de PH. Fotografía



López, E. 2017. Elaboración de extractos. Fotografía



López, E. 2017. Muestras y lechos. Fotografía

#### **9.0.6. Método y técnica de investigación**

La metodología se basó en una investigación Cuantitativa ya que se analiza y predice el comportamiento de la población y porque los datos analizados son cuantificables; es del tipo experimental ya que se estuvo inmerso en el proceso, creando las condiciones óptimas rigurosamente controladas para la especie en estudio, así mismo se analizó el impacto que tienen los abonos orgánicos producidos por la especie en cuestión en uno de los cultivos más representativos de la región.

#### **9.0.7. Metodología**

Como primera medida se sembró un cultivo de habichuela a el cual no se le realizó aplicación alguna de fungicidas, pero si se llevó un debido manejo de éste; se realizaron labores como: tutorado, colgadas, desyerbadas, toma de altura, porcentaje de germinación, riego, aporcar, observación de plagas-enfermedades y recolección de cosecha. Como segunda medida se implementó un lombricultivo con el fin de aprovechar el abono producido por dicho anélido . Se tomó como base dos camas de lombrices y dos muestras poblacionales alimentadas con residuos orgánicos (desperdicios); con la finalidad de realizar análisis a partir de sistemas dinámicos. En cuanto a la temperatura, humedad relativa y la acides del sustrato (PH), se mantuvieron dentro de los rangos ideales para el pleno desarrollo del lombricultivo debido a esto se toma como única variable la población.



Se mantuvo una alimentación estable, aparte de ello se realizaron conteos de la población cada tres meses para las camas y cada mes para las muestras.

Alternamente con el desarrollo del criadero de *Eisenia Foetida* se implementó un segundo cultivo de habichuela, una vez finalizó el anterior, para esto se realizó un diseño experimental de bloques completos al azar (DBCA) con tres tratamientos y tres repeticiones por tratamiento; además se llevó un debido control de plagas y enfermedades con extractos naturales. Se fertilizó el terreno con el humus producidos por dichos anélidos y un fertilizante químico con el fin de conocer el efecto de estos sobre las plantas estudiadas y sus ventajas y desventajas.

## 10. DESARROLLO DEL PROYECTO

### 10.1. CONTEOS DE POBLACIÓN

Teniendo en cuenta la información inferida de los textos (Manuales de lombricultura) y un experimento realizado el cual consiste en extirpar una muestra de catorce cocones, con la finalidad de hallar el número de individuos por cada uno de ellos; se puede inferir que el promedio de lombrices que nacen por cocón es equivalente a tres.

Observemos los datos arrojados por la muestra.

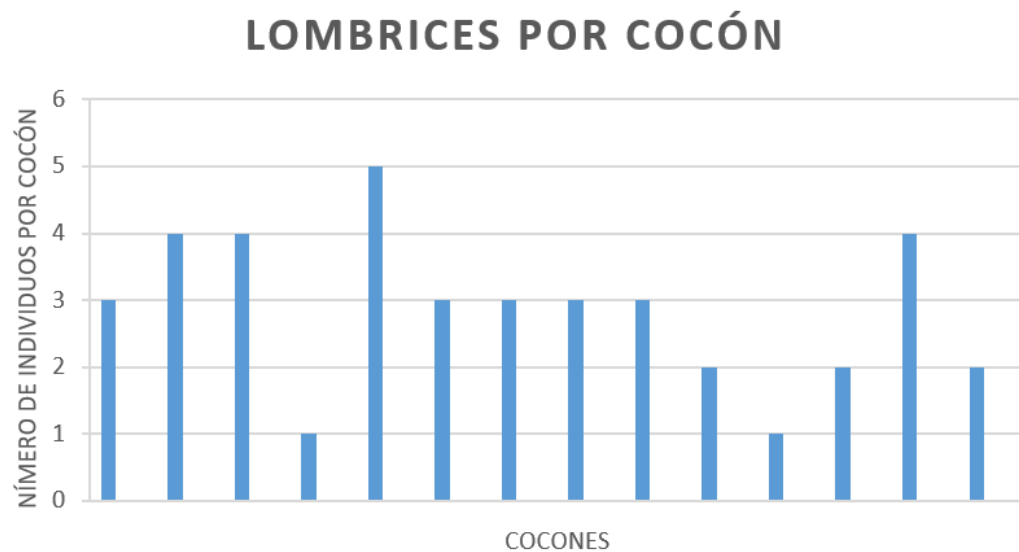


Figura 8: Muestra: Lombrices por cocón

López, E. 2017. Lombrices por cocón. Gráfico

Valor	Frecuencia
1	2
2	3
3	5
4	3
5	1

Cuadro 5: Individuos por cocón

Promedio:  $2,857 \simeq 3$

De igual forma se conoce que el periodo de incubación es de 21 días en promedio dependiendo de las condiciones ambientales.

Dado que las variables humedad, temperatura y PH de los lechos estudiados tienden a ser contantes el promedio de incubación se mantiene.

El tiempo intermedio entre cada uno de los conteos para las camas 1 y 2 fue de tres meses o noventa días (entre 12 y 13 semanas) y el de las muestras un mes, lo que en semanas equivale cercanamente a cuatro, pero no todos los cocones depositados por los anélidos en este tiempo habrían eclosionado, para inferir mejor este fenómeno obsérvese la siguiente tabla.

SEMANAS DE DEPOSITO DE COCÓN											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SEMANA DE ECLOSIÓN											
4	5	6	7	8	9	10	11	12	---	---	---

Figura 9: Tabla de eclosión de cocones

López, E. 2017. Eclosión. Tabla.

Lo que muestra que pasados los tres meses hay eclosionados los huevos hasta la novena semana, y pasado un mes hay eclosionados los huevos de la semana 1

Obsérvese los datos arrojados de los conteos de la población.

<b>Cama o lecho</b>	<b>Conteo</b>	<b>tiempo</b>	<b>Dato anterior</b>	<b>Dato arrojado</b>
Cama 1	Cuenta 1	3 meses	200 lombrices adultas	219 lombrices adultas y 1874 jóvenes y bebes.
Cama 1	Cuenta 2	3 meses	142 lombrices adultas y 672 jóvenes y bebes	310 lombrices adultas y 5671 jóvenes y bebes.
Cama 2	Cuenta 1	3 meses	77 lombrices adultas y 1202 jóvenes y bebes	329 lombrices adultas y 1090 jóvenes y bebes.
Muestra 1	Cuenta 1	1 mes	7 lombrices adultas	7 lombrices adultas y 11 jóvenes y bebes.
Muestra 1	Cuenta 2	1 meses	7 lombrices adultas y 11 jóvenes y bebes	15 lombrices adultas y 171 jóvenes y bebes.
Muestra 2	Cuenta 1	1 mes	15 lombrices adultas	14 lombrices adultas y 19 jóvenes y bebes.
Muestra 2	Cuenta 2	1 mes	14 lombrices adultas y 19 jóvenes y bebes	17 lombrices adultas y 249 jóvenes y bebes.

Cuadro 6: Conteos de población (Eisenia Foetida)

Según la teoría e información que se presentó en los capítulos anteriores (marco teórico, marco de antecedentes) y los conteos de la población, se tomó por verídico que una lombriz deposita un cocón semanalmente (7 días), estos eclosionan a los 21 días; además que de cada cocón nacen 3 lombrices en promedio y que a los 90 días (3 meses) son adultas estando listas para reproducirse. Teniendo en cuenta estos datos se elaboran tablas en excel del crecimiento poblacional tomando como base el diferente números de individuos iniciales especificados en los conteos anteriores. Datos cuyo comportamiento nos lleva a un análisis de población que se evidencia mediante ecuaciones como se observa a continuación.

## 10.2. ANÁLISIS POBLACIONAL Y ECUACIONES

En esta sección es posible observar el análisis del comportamiento poblacional de la lombriz roja californiana, con diferentes cantidades de anélidos iniciales: 7, 15 y 200 individuos todos ellos adultos; datos que fueron inferidos de tablas elaboradas en Excel a partir de la información de los capítulos anteriores. De estos análisis se observa que el comportamiento de la población varía dependiendo de el tiempo que dure en el lecho, respondiendo a diferentes tipos de comportamiento como lo es lineal (de 3 a 19 semanas), cuadrático (de 20 a 35 semanas) y exponencial (de 36 a 51 semanas); pero que al juntar estos tiempos (3-51 semanas) el comportamiento se resume a una función exponencial. Veamos

### 10.2.1. Análisis poblacional con 7 individuos adultos

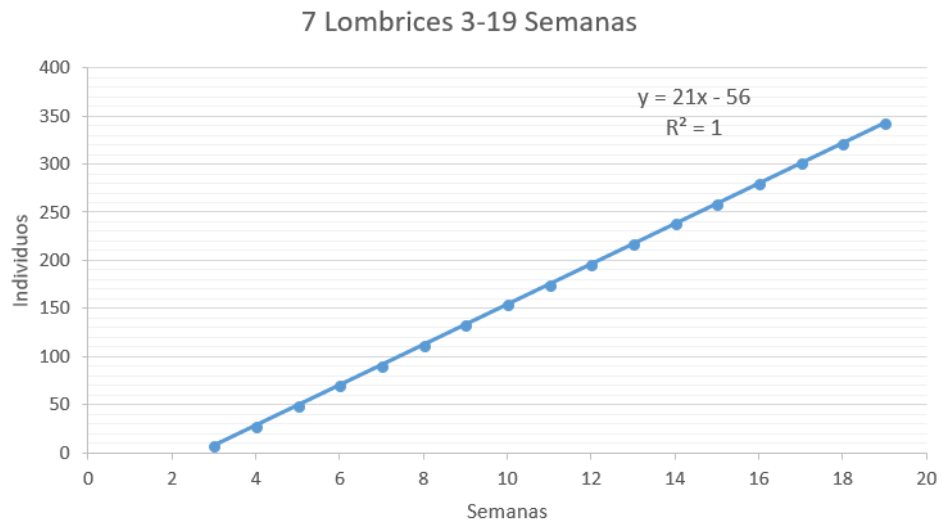
Tiempo en semanas	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Huevos por semana	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total lombrices adultas	7	7	7	7	7	7	7	7	7
Nuevas Lombrices Jovenes y bebes	0	21	21	21	21	21	21	21	21
Total Lombrices Jovenes y bebes	0	21	42	63	84	105	126	147	168
Número total de lombrices	7	28	49	70	91	112	133	154	175
<b>NOTA</b>		Eclosionan huevos de la semana 1	Eclosionan huevos de la semana 2	Eclosionan huevos de la semana 3	Eclosionan huevos de la semana 4	Eclosionan huevos de la semana 5	Eclosionan huevos de la semana 6	Eclosionan huevos de la semana 7	Eclosionan huevos de la semana 8

Tiempo en semanas	12	13	14	15	16	17	18	19
Huevos por semana	7	7	7	7	7	28	49	70
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	21	21	21	21
Total lombrices adultas	7	7	7	7	28	49	70	91
Nuevas Lombrices Jovenes y bebes	21	21	21	21	21	21	21	21
Total Lombrices Jovenes y bebes	189	210	231	252	252	252	252	252
Número total de lombrices	196	217	238	259	280	301	322	343
<b>NOTA</b>	Eclosionan huevos de la semana 9	Eclosionan huevos de la semana 10	Eclosionan huevos de la semana 11	Eclosionan huevos de la semana 12	crecen las nacidas en la semana 4 y Eclosionan huevos de la semana	crecen las nacidas en la semana 5 y Eclosionan huevos de la semana	crecen las nacidas en la semana 6 y Eclosionan huevos de la semana	crecen las nacidas en la semana 7 y Eclosionan huevos de la semana

Figura 10: Crecimiento poblacional, 7 lombrices (3-19 semanas)

López, E. 2017. 3-19 semanas (7 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento lineal con ecuación  $21x - 56$  y  $R^2 = 1$  que indica el máximo ajuste.

Tomando las 16 semanas siguientes (20-35)

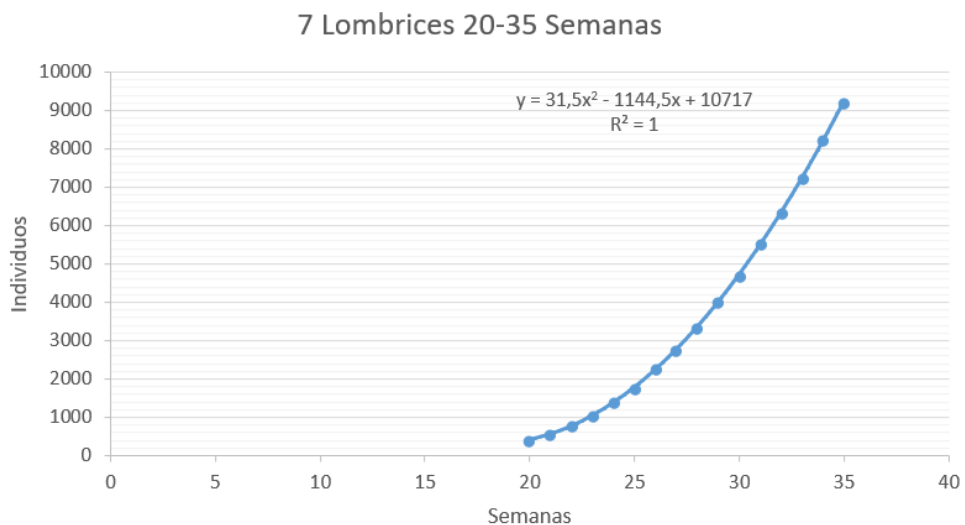
<b>Tiempo en semanas</b>	20	21	22	23	24	25	26	27
<b>Huevos por semana</b>	91	112	133	154	175	196	217	238
<b>Nuevas lombrices adultas</b>	21	21	21	21	21	21	21	21
<b>Total lombrices adultas</b>	112	133	154	175	196	217	238	259
<b>Nuevas lombrices Jovenes y bebes</b>	84	147	210	273	336	399	462	525
<b>Total lombrices Jovenes y bebes</b>	315	441	630	882	1197	1575	2016	2520
<b>Número total de lombrices</b>	427	574	784	1057	1393	1792	2254	2779
<b>NOTA</b>	crecen las nacidas en la semana 8 y Eclosionan huevos de la semana 17	crecen las nacidas en la semana 9 y Eclosionan huevos de la semana 18	crecen las nacidas en la semana 10 y Eclosionan huevos de la semana 19	crecen las nacidas en la semana 11 y Eclosionan huevos de la semana 20	crecen las nacidas en la semana 12 y Eclosionan huevos de la semana 21	crecen las nacidas en la semana 13 y Eclosionan huevos de la semana 22	crecen las nacidas en la semana 14 y Eclosionan huevos de la semana 23	crecen las nacidas en la semana 15 y Eclosionan huevos de la semana 24

Tiempo en semanas	28	29	30	31	32	33	34	35
Huevos por semana	259	280	301	322	343	427	584	794
Nuevas lombrices adultas	21	21	21	21	84	157	210	273
Total lombrices adultas	280	301	322	343	427	584	794	1067
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	558	651	714	777	840	903	966	1029
Total lombrices Jovenes y bebes	3087	3717	4410	5166	5922	6668	7424	8180
Número total de lombrices	3367	4018	4732	5509	6349	7252	8218	9247
NOTA	crecen las nacidas en la semana 16 y Eclosionan huevos de la semana 25	crecen las nacidas en la semana 17 y Eclosionan huevos de la semana 26	crecen las nacidas en la semana 18 y Eclosionan huevos de la semana 27	crecen las nacidas en la semana 19 y Eclosionan huevos de la semana 28	crecen las nacidas en la semana 20 y Eclosionan huevos de la semana 29	crecen las nacidas en la semana 21 y Eclosionan huevos de la semana 30	crecen las nacidas en la semana 22 y Eclosionan huevos de la semana 31	crecen las nacidas en la semana 23 y Eclosionan huevos de la semana 32

Figura 11: Crecimiento poblacional, 7 lombrices (20-35 semanas)

López, E. 2017. 20-35 semanas (7 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento polinómico de orden dos, con ecuación  $y = 31,5x^2 - 1144,5x + 10717$  y  $R^2 = 1$  que indica el máximo ajuste.



Finalmente para completar 51 semanas (casi un año) se toman las 16 semanas siguientes (36-51)

Tiempo en semanas	36	37	38	39	40	41	42	43
Huevos por semana	1067	1403	1802	2264	2789	3347	3998	4712
Nuevas lombrices adultas	336	399	462	525	558	651	714	777
Total lombrices adultas	1403	1802	2264	2789	3347	3998	4712	5489
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	1281	1752	2382	3201	4209	5406	6792	8367
Total lombrices Jovenes y bebes	9125	10478	12398	15074	18725	23480	29558	37148
Número total de lombrices	10528	12280	14662	17863	22072	27478	34270	42637
NOTA	crecen las nacidas en la semana 24 y Eclosionan huevos de la semana 33	crecen las nacidas en la semana 25 y Eclosionan huevos de la semana 34	crecen las nacidas en la semana 26 y Eclosionan huevos de la semana 35	crecen las nacidas en la semana 27 y Eclosionan huevos de la semana 36	crecen las nacidas en la semana 28 y Eclosionan huevos de la semana 37	crecen las nacidas en la semana 29 y Eclosionan huevos de la semana 38	crecen las nacidas en la semana 30 y Eclosionan huevos de la semana 39	crecen las nacidas en la semana 31 y Eclosionan huevos de la semana 40

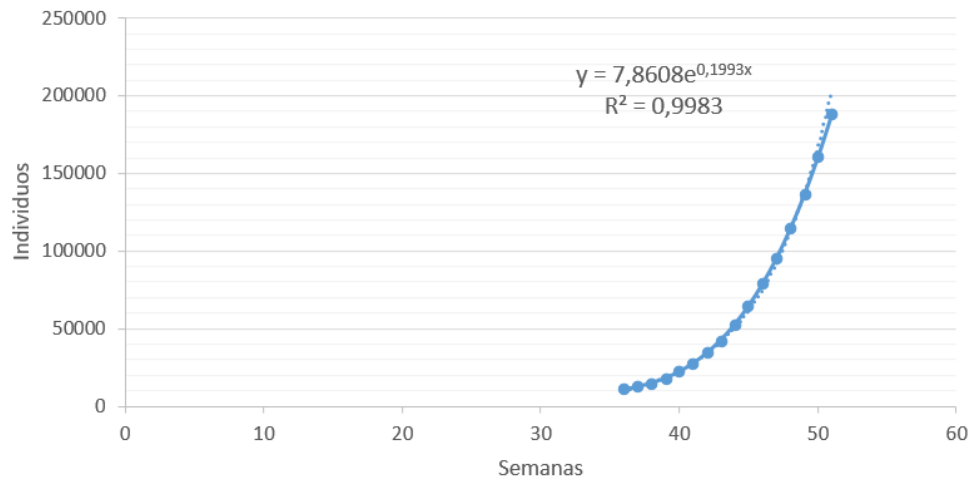
Tiempo en semanas	44	45	46	47	48	49	50	51
Huevos por semana	5489	6329	7232	8198	9227	10508	12260	14642
Nuevas lombrices adultas	840	903	966	1029	1281	1752	2382	3201
Total lombrices adultas	6329	7232	8198	9227	10508	12260	14642	17843
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	10041	11994	14136	16467	18987	21696	24594	27681
Total lombrices Jovenes y bebes	46349	57440	70610	86048	103754	123698	145910	170390
Número total de lombrices	52678	64672	78808	95275	114262	135958	160552	188233
NOTA	crecen las nacidas en la semana 32 y Eclosionan huevos de la semana 41	crecen las nacidas en la semana 33 y Eclosionan huevos de la semana 42	crecen las nacidas en la semana 34 y Eclosionan huevos de la semana 43	crecen las nacidas en la semana 35 y Eclosionan huevos de la semana 44	crecen las nacidas en la semana 36 y Eclosionan huevos de la semana 45	crecen las nacidas en la semana 37 y Eclosionan huevos de la semana 46	crecen las nacidas en la semana 38 y Eclosionan huevos de la semana 47	crecen las nacidas en la semana 39 y Eclosionan huevos de la semana 48

Figura 12: Crecimiento poblacional, 7 lombrices (36-51 semanas)

López, E. 2017. 36-51 semanas (7 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.

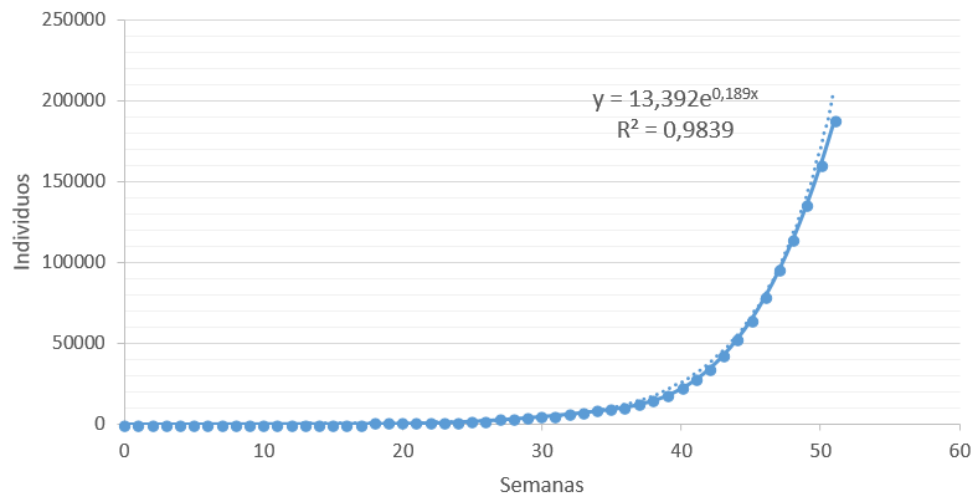
### 7 Lombrices 36-51 SEMANAS



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento exponencial, con ecuación  $y = 7,8608e^{0,1993x}$  y  $R^2 = 0,9983$  que indica que el ajuste es bueno, ya que es muy cercano a 1.

De manera general al juntar todos los gráfico la población de lombrices con cantidad inicial 7 adultas, tiene el siguiente comportamiento

### 7 Lombrices 0-51 Semanas



Del gráfico se puede inferir que al tomar todos los datos de 3 a 51 semanas y analizarlos con gráficos de dispersión en excel, muestra que el comportamiento de la población se asemeja a una ecuación exponencial dada por  $y = 13,392e^{0,189x}$  con  $R^2 = 0,9839$  lo que reitera que es una buen ajuste.

### 10.2.2. Análisis poblacional con 15 individuos adultos

Tiempo en semanas	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Huevos por semana	15	15	15	15	15	15	15	15	15
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total lombrices adultas	15	15	15	15	15	15	15	15	15
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	0	45	45	45	45	45	45	45	45
Total lombrices Jovenes y bebes	0	45	90	135	180	225	270	315	360
Número total de lombrices	15	60	105	150	195	240	285	330	375
<b>NOTA</b>		Eclosionan huevos de la semana 1	Eclosionan huevos de la semana 2	Eclosionan huevos de la semana 3	Eclosionan huevos de la semana 4	Eclosionan huevos de la semana 5	Eclosionan huevos de la semana 6	Eclosionan huevos de la semana 7	Eclosionan huevos de la semana 8

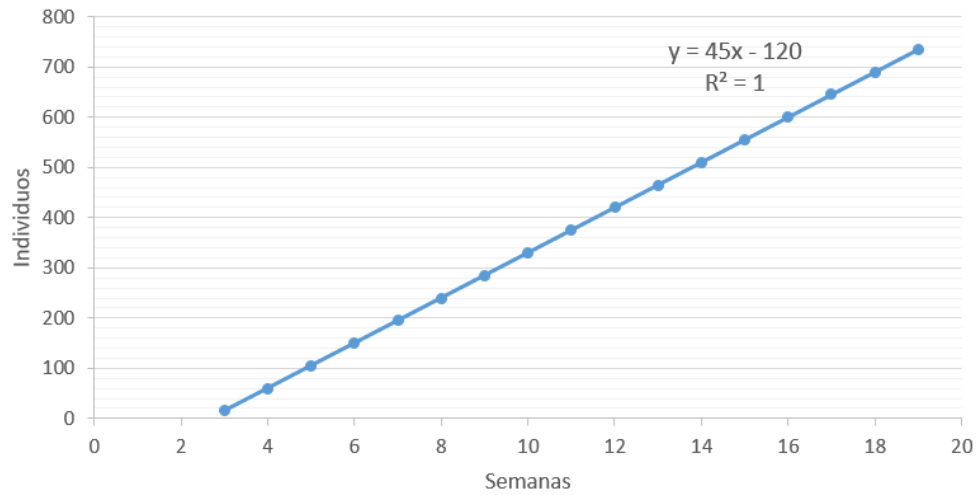
Tiempo en semanas	12	13	14	15	16	17	18	19
Huevos por semana	15	15	15	15	15	60	105	150
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	45	45	45	45
Total lombrices adultas	15	15	15	15	60	105	150	195
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	45	45	45	45	45	45	45	45
Total lombrices Jovenes y bebes	405	450	495	540	540	540	540	540
Número total de lombrices	420	465	510	555	600	645	690	735
<b>NOTA</b>	Eclosionan huevos de la semana 9	Eclosionan huevos de la semana 10	Eclosionan huevos de la semana 11	Eclosionan huevos de la semana 12	crecen las nacidas en la semana 4 y Eclosionan huevos de la semana 13	crecen las nacidas en la semana 5 y Eclosionan huevos de la semana 14	crecen las nacidas en la semana 6 y Eclosionan huevos de la semana 15	crecen las nacidas en la semana 7 y Eclosionan huevos de la semana 16

Figura 13: Crecimiento poblacional, 15 lombrices (3-19 semanas)

López, E. 2017. 3-19 semanas (15 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.

### 15 Lombrices 3-19 Semanas



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento lineal con ecuación  $y = 45x - 120$  y  $R^2 = 1$  que indica el máximo ajuste.

tomando las 16 semanas siguientes (20-35)

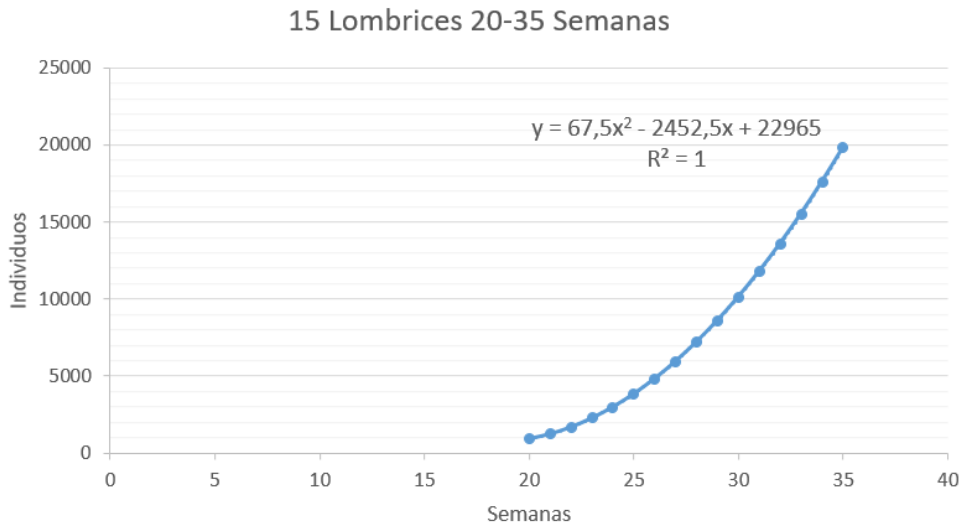
<b>Tiempo en semanas</b>	20	21	22	23	24	25	26	27
<b>Huevos por semana</b>	195	240	285	330	375	420	465	510
<b>Nuevas lombrices adultas</b>	45	45	45	45	45	45	45	45
<b>Total lombrices adultas</b>	240	285	330	375	420	465	510	555
<b>Nuevas lombrices Jovenes y bebes</b>	180	315	450	585	720	855	990	1125
<b>Total lombrices Jovenes y bebes</b>	675	945	1350	1890	2565	3375	4320	5400
<b>Número total de lombrices</b>	915	1230	1680	2265	2985	3840	4830	5955
<b>NOTA</b>	crecen las nacidas en la semana 8 y Eclosionan huevos de la semana 17	crecen las nacidas en la semana 9 y Eclosionan huevos de la semana 18	crecen las nacidas en la semana 10 y Eclosionan huevos de la semana 19	crecen las nacidas en la semana 11 y Eclosionan huevos de la semana 20	crecen las nacidas en la semana 12 y Eclosionan huevos de la semana 21	crecen las nacidas en la semana 13 y Eclosionan huevos de la semana 22	crecen las nacidas en la semana 14 y Eclosionan huevos de la semana 23	crecen las nacidas en la semana 15 y Eclosionan huevos de la semana 24

Tiempo en semanas	28	29	30	31	32	33	34	35
Huevos por semana	555	600	645	690	735	915	1230	1680
Nuevas lombrices adultas	45	45	45	45	180	315	450	585
Total lombrices adultas	600	645	690	735	915	1230	1680	2265
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	1260	1395	1530	1665	1800	1935	2070	2205
Total lombrices Jovenes y bebes	6615	7965	9450	11070	12690	14310	15930	17550
Número total de lombrices	7215	8610	10140	11805	13605	15540	17610	19815
<b>NOTA</b>	crecen las nacidas en la semana 16 y Eclosionan huevos de la semana 25	crecen las nacidas en la semana 17 y Eclosionan huevos de la semana 26	crecen las nacidas en la semana 18 y Eclosionan huevos de la semana 27	crecen las nacidas en la semana 19 y Eclosionan huevos de la semana 28	crecen las nacidas en la semana 20 y Eclosionan huevos de la semana 29	crecen las nacidas en la semana 21 y Eclosionan huevos de la semana 30	crecen las nacidas en la semana 22 y Eclosionan huevos de la semana 31	crecen las nacidas en la semana 23 y Eclosionan huevos de la semana 32

Figura 14: Crecimiento poblacional, 15 lombrices (20-35 semanas)

López, E. 2017. 20-35 semanas (15 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento polinómico de orden dos, con ecuación  $y = 67,5x^2 - 2452,5x + 22965$  y  $R^2 = 1$  que indica el máximo ajuste.

Finalmente para completar 51 semanas (casi un año) se toman las 16 semanas siguientes (36-51)

Tiempo en semanas	36	37	38	39	40	41	42	43
Huevos por semana	2265	2985	3840	4830	5955	7215	8610	10140
Nuevas lombrices adultas	720	855	990	1125	1260	1395	1530	1665
Total lombrices adultas	2985	3840	4830	5955	7215	8610	10140	11805
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	2745	3690	5040	6795	8955	11520	14490	17865
Total lombrices Jovenes y bebes	19575	22410	26460	32130	39825	49950	62910	79110
Número total de lombrices	22560	26250	31290	38085	47040	58560	73050	90915
NOTA	crecen las nacidas en la semana 24 y Eclosionan huevos de la semana 33	crecen las nacidas en la semana 25 y Eclosionan huevos de la semana 34	crecen las nacidas en la semana 26 y Eclosionan huevos de la semana 35	crecen las nacidas en la semana 27 y Eclosionan huevos de la semana 36	crecen las nacidas en la semana 28 y Eclosionan huevos de la semana 37	crecen las nacidas en la semana 29 y Eclosionan huevos de la semana 38	crecen las nacidas en la semana 30 y Eclosionan huevos de la semana 39	crecen las nacidas en la semana 31 y Eclosionan huevos de la semana 40

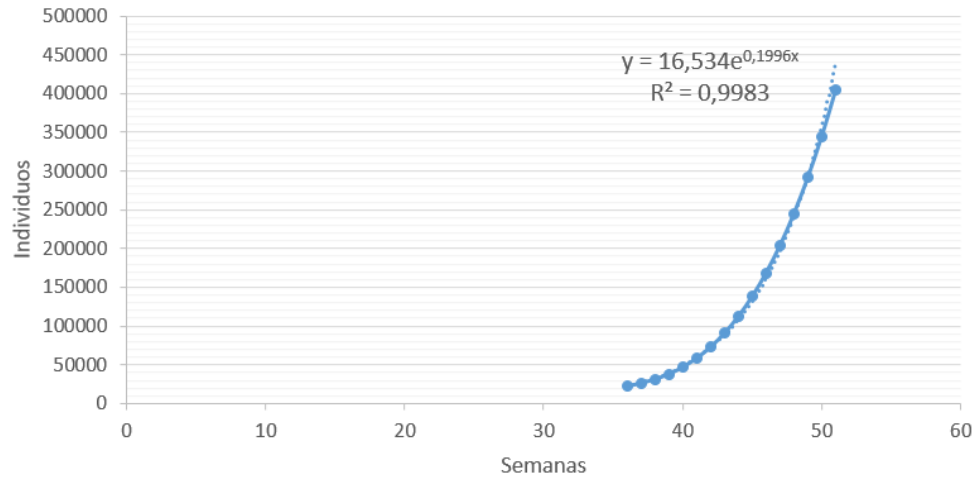
Tiempo en semanas	44	45	46	47	48	49	50	51
Huevos por semana	11805	13605	15540	17610	19815	22560	26250	31290
Nuevas lombrices adultas	1800	1935	2070	2205	2745	3690	5040	6795
Total lombrices adultas	13605	15540	17610	19815	22560	26250	31290	38085
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	21645	25830	30420	35415	40815	46620	52830	59445
Total lombrices Jovenes y bebes	98955	122850	151200	184410	222480	265410	313200	365850
Número total de lombrices	112560	138390	168810	204225	245040	291660	344490	403935
NOTA	crecen las nacidas en la semana 32 y Eclosionan huevos de la semana 41	crecen las nacidas en la semana 33 y Eclosionan huevos de la semana 42	crecen las nacidas en la semana 34 y Eclosionan huevos de la semana 43	crecen las nacidas en la semana 35 y Eclosionan huevos de la semana 44	crecen las nacidas en la semana 36 y Eclosionan huevos de la semana 45	crecen las nacidas en la semana 37 y Eclosionan huevos de la semana 46	crecen las nacidas en la semana 38 y Eclosionan huevos de la semana 47	crecen las nacidas en la semana 39 y Eclosionan huevos de la semana 48

Figura 15: Crecimiento poblacional, 15 lombrices (36-51 semanas)

López, E. 2017. 36-51 semanas (15 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.

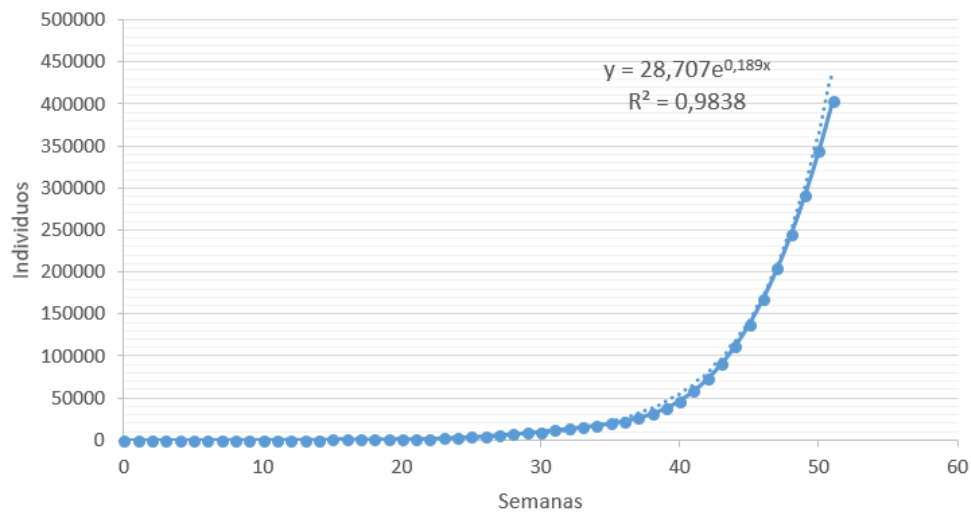
15 Lombrices 36-51 Semanas



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento exponencial, con ecuación  $y = 16,534e^{0,1996x}$  y  $R^2 = 0,9983$  que indica que el ajuste es bueno, ya que es muy cercano a 1.

De manera general al juntar todos los gráfico la población de lombrices con cantidad inicial 15 adultas, tiene el siguiente comportamiento

15 Lombrices 0-51 Semanas



Del gráfico se puede inferir que al tomar todos los datos de 3 a 51 semanas y analizarlos con gráficos de dispersión en excel, muestra que el comportamiento de la población se asemeja a una ecuación exponencial dada por  $y = 28,707e^{0,189x}$  con  $R^2 = 0,9838$  lo que reitera que es una buen ajuste.

### 10.2.3. Análisis poblacional con 200 individuos adultos

Tiempo en semanas	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Huevos por semana	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total lombrices adultas	200	200	200	200	200	200	200	200	200
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	0	600	600	600	600	600	600	600	600
Total lombrices Jovenes y bebes	0	600	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800
Número total de lombrices	200	800	1400	2000	2600	3200	3800	4400	5000
NOTA		Eclosionan huevos de la semana 1	Eclosionan huevos de la semana 2	Eclosionan huevos de la semana 3	Eclosionan huevos de la semana 4	Eclosionan huevos de la semana 5	Eclosionan huevos de la semana 6	Eclosionan huevos de la semana 7	Eclosionan huevos de la semana 8

Tiempo en semanas	12	13	14	15	16	17	18	19
Huevos por semana	200	200	200	200	200	800	1400	2000
Nuevas lombrices adultas	0	0	0	0	600	600	600	600
Total lombrices adultas	200	200	200	200	800	1400	2000	2600
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	600	600	600	600	600	600	600	600
Total lombrices Jovenes y bebes	5400	6000	6600	7200	7200	7200	7200	7200
Número total de lombrices	5600	6200	6800	7400	8000	8600	9200	9800
NOTA	Eclosionan huevos de la semana 9	Eclosionan huevos de la semana 10	Eclosionan huevos de la semana 11	Eclosionan huevos de la semana 12	crecen las nacidas en la semana 4 y Eclosionan huevos de la semana 13	crecen las nacidas en la semana 5 y Eclosionan huevos de la semana 14	crecen las nacidas en la semana 6 y Eclosionan huevos de la semana 15	crecen las nacidas en la semana 7 y Eclosionan huevos de la semana 16

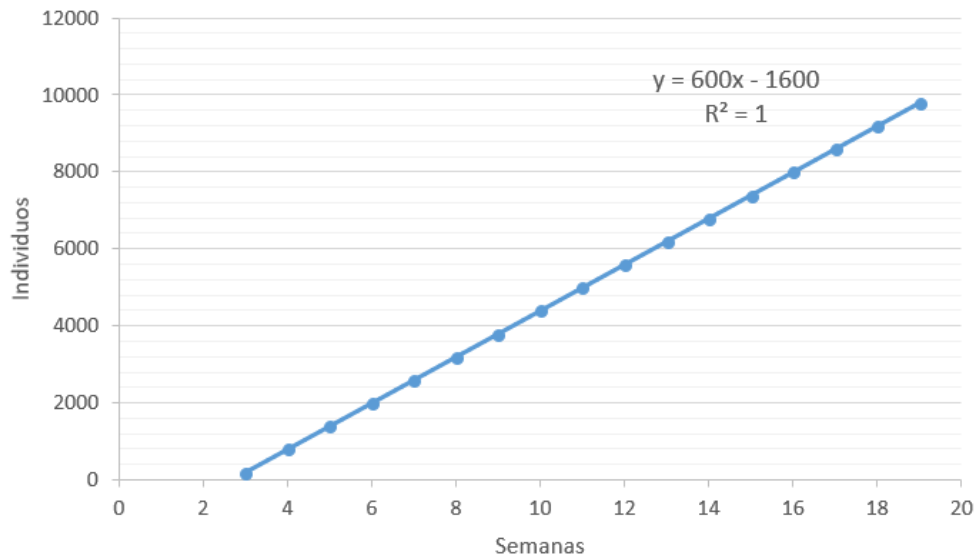
Figura 16: Crecimiento poblacional, 200 lombrices (3-19 semanas)

López, E. 2017. 3-19 semanas (200 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.



200 Lombrices 3-19 Semanas



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento lineal con ecuación  $y = 600x - 1600$  y  $R^2 = 1$  que indica el máximo ajuste.

tomando las 16 semanas siguientes (20-35)

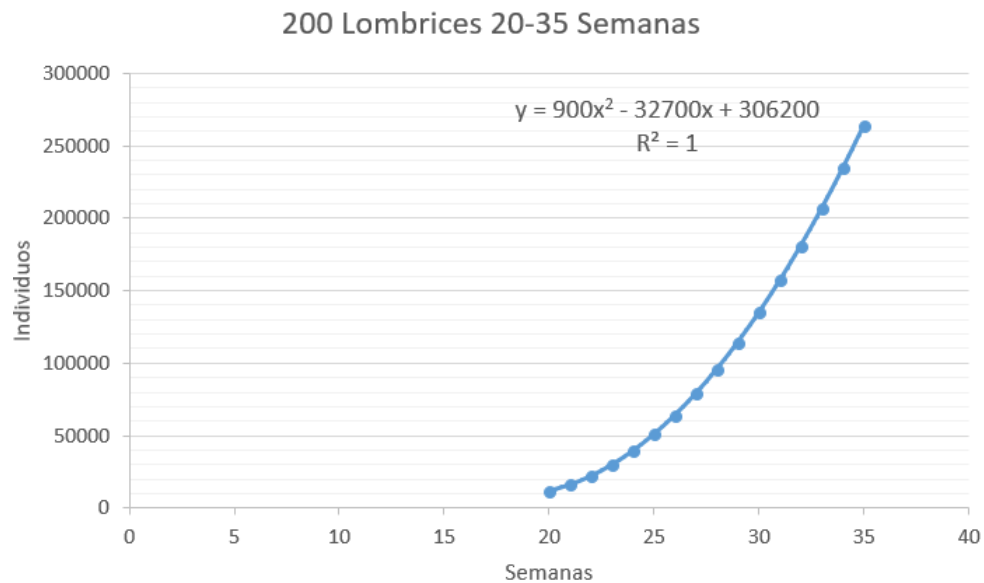
<b>Tiempo en semanas</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>	<b>24</b>	<b>25</b>	<b>26</b>	<b>27</b>
<b>Huevos por semana</b>	2600	3200	3800	4400	5000	5600	6200	6800
<b>Nuevas lombrices adultas</b>	600	600	600	600	600	600	600	600
<b>Total lombrices adultas</b>	3200	3800	4400	5000	5600	6200	6800	7400
<b>Nuevas lombrices Jovenes y bebes</b>	2400	4200	6000	7800	9600	11400	13200	15000
<b>Total lombrices Jovenes y bebes</b>	9000	12600	18000	25200	34200	45000	57600	72000
<b>Número total de lombrices</b>	12200	16400	22400	30200	39800	51200	64400	79400
<b>NOTA</b>	crecen las nacidas en la semana 8 y Eclosionan huevos de la semana 17	crecen las nacidas en la semana 9 y Eclosionan huevos de la semana 18	crecen las nacidas en la semana 10 y Eclosionan huevos de la semana 19	crecen las nacidas en la semana 11 y Eclosionan huevos de la semana 20	crecen las nacidas en la semana 12 y Eclosionan huevos de la semana 21	crecen las nacidas en la semana 13 y Eclosionan huevos de la semana 22	crecen las nacidas en la semana 14 y Eclosionan huevos de la semana 23	crecen las nacidas en la semana 15 y Eclosionan huevos de la semana 24

Tiempo en semanas	28	29	30	31	32	33	34	35
Huevos por semana	7400	8000	8600	9200	9800	12200	16400	22400
Nuevas lombrices adultas	600	600	600	600	2400	4200	6000	7800
Total lombrices adultas	8000	8600	9200	9800	12200	16400	22400	30200
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	16800	18600	20400	22200	24000	25800	27600	29400
Total lombrices Jovenes y bebes	88200	106200	126000	147600	169200	190800	212400	234000
Número total de lombrices	96200	114800	135200	157400	181400	207200	234800	264200
<b>NOTA</b>	crecen las nacidas en la semana 16 y Eclosionan huevos de la semana 25	crecen las nacidas en la semana 17 y Eclosionan huevos de la semana 26	crecen las nacidas en la semana 18 y Eclosionan huevos de la semana 27	crecen las nacidas en la semana 19 y Eclosionan huevos de la semana 28	crecen las nacidas en la semana 20 y Eclosionan huevos de la semana 29	crecen las nacidas en la semana 21 y Eclosionan huevos de la semana 30	crecen las nacidas en la semana 22 y Eclosionan huevos de la semana 31	crecen las nacidas en la semana 23 y Eclosionan huevos de la semana 32

Figura 17: Crecimiento poblacional, 200 lombrices (20-35 semanas)

López, E. 2017. 20-35 semanas (200 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento polinómico de orden dos, con ecuación  $y = 900x^2 - 32700x + 306200$  y  $R^2 = 1$  que indica el máximo ajuste.

Finalmente para completar 51 semanas (casi un año) se toman las 16 semanas siguientes (36-51)

Tiempo en semanas	36	37	38	39	40	41	42	43
Huevos por semana	30200	39800	51200	64400	79400	96200	114800	135200
Nuevas lombrices adultas	9600	11400	13200	15000	16800	18600	20400	22200
Total lombrices adultas	39800	51200	64400	79400	96200	114800	135200	157400
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	36600	49200	67200	90600	119400	153600	193200	238200
Total lombrices Jovenes y bebes	261000	298800	352800	428400	531000	666000	839800	1055800
Número total de lombrices	300800	350000	417200	507800	627200	780800	974000	1213200
<b>NOTA</b>	crecen las nacidas en la semana 24 y Eclosionan huevos de la semana 33	crecen las nacidas en la semana 25 y Eclosionan huevos de la semana 34	crecen las nacidas en la semana 26 y Eclosionan huevos de la semana 35	crecen las nacidas en la semana 27 y Eclosionan huevos de la semana 36	crecen las nacidas en la semana 28 y Eclosionan huevos de la semana 37	crecen las nacidas en la semana 29 y Eclosionan huevos de la semana 38	crecen las nacidas en la semana 30 y Eclosionan huevos de la semana 39	crecen las nacidas en la semana 31 y Eclosionan huevos de la semana 40

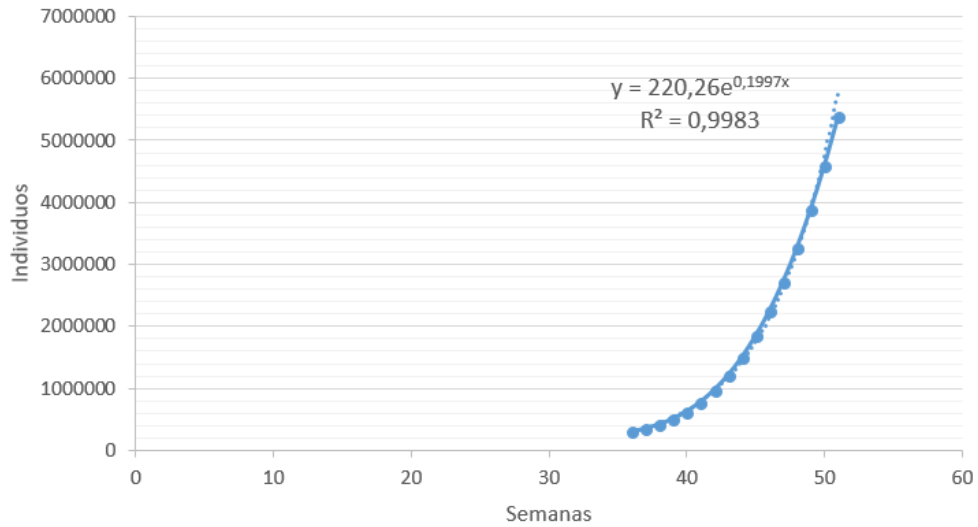
Tiempo en semanas	44	45	46	47	48	49	50	51
Huevos por semana	157400	181400	207200	234800	264200	300800	350000	417200
Nuevas lombrices adultas	24000	25800	27600	29400	36600	49200	67200	90600
Total lombrices adultas	181400	207200	234800	264200	300800	350000	417200	507800
Nuevas lombrices Jovenes y bebes	288600	344400	405600	472200	544200	621600	704400	792600
Total lombrices Jovenes y bebes	1320400	1639000	2017000	2459800	2967400	3539800	4177000	4879000
Número total de lombrices	1501800	1846200	2251800	2724000	3268200	3889800	4594200	5386800
<b>NOTA</b>	crecen las nacidas en la semana 32 y Eclosionan huevos de la semana 41	crecen las nacidas en la semana 33 y Eclosionan huevos de la semana 42	crecen las nacidas en la semana 34 y Eclosionan huevos de la semana 43	crecen las nacidas en la semana 35 y Eclosionan huevos de la semana 44	crecen las nacidas en la semana 36 y Eclosionan huevos de la semana 45	crecen las nacidas en la semana 37 y Eclosionan huevos de la semana 46	crecen las nacidas en la semana 38 y Eclosionan huevos de la semana 47	crecen las nacidas en la semana 39 y Eclosionan huevos de la semana 48

Figura 18: Crecimiento poblacional, 200 lombrices (36-51 semanas)

López, E. 2017. 36-51 semanas (200 L). Tabla

Tomando los datos de la tabla y usando el programa Excel y su herramienta de gráficos de dispersión y líneas de tendencia observamos el siguiente comportamiento.

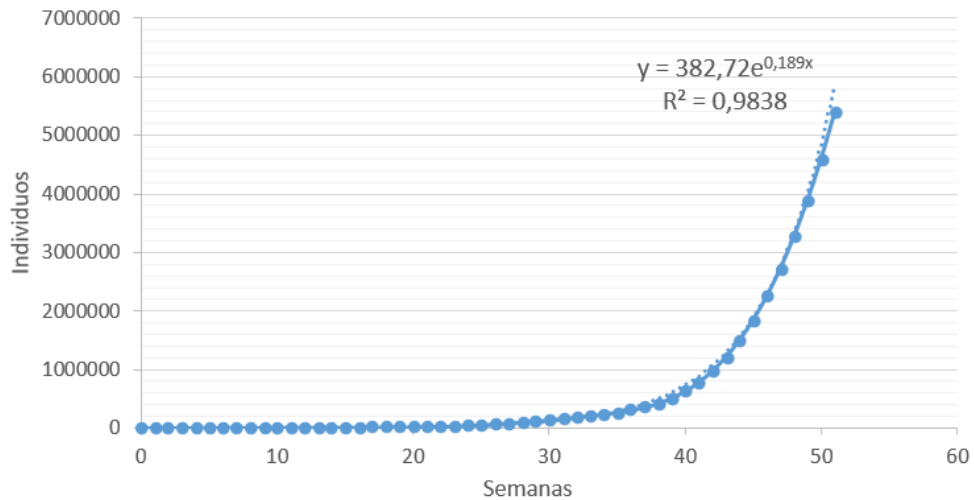
200 Lombrices 36-51 Semanas



Del gráfico se puede inferir que la población en este lapso de tiempo, tiene un comportamiento exponencial, con ecuación  $y = 220,26e^{0,1997x}$  y  $R^2 = 0,9983$  que indica que el ajuste es bueno, ya que es muy cercano a 1.

De manera general al juntar todos los gráfico la población de lombrices con cantidad inicial 200 adultas, tiene el siguiente comportamiento

200 Lombrices 0-51 Semanas



Del gráfico se puede inferir que al tomar todos los datos de 3 a 51 semanas y analizarlos con gráficos de dispersión en excel, muestra que el comportamiento de la población se asemeja a una ecuación exponencial dada por  $y = 382,72e^{0,189x}$  con  $R^2 = 0,9838$  lo que reitera que es una buen ajuste.

Se puede notar que en los análisis anteriores (7,15 y 200 lombrices adultas iniciales) la población inicialmente tiene un comportamiento constante (0 a 3 semanas), lineal (3 a 19 semanas), cuadrático (20 a 35 semana) y exponencial (36 a 51); pero al realizar el análisis completo de toda la población (0 -51 semanas) el comportamiento se resume en una ecuación exponencial.

Esto implica que la población no muestra siempre el mismo comportamiento, este varia así como los anélidos se van haciendo adultos. Aún así las ecuación exponenciales que representan su comportamiento poseen un  $R^2$  muy cercano a 1, lo que implica que es una buena aproximación.

## 10.3. MODELO MATEMÁTICO

En esta sección se expone el modelo de crecimiento logístico continuo el cual fue implementado basado en los análisis de datos de las tablas y gráficos anteriores. Se pretende hallar una ecuación que permita inferir el crecimiento poblacional de la lombriz roja californiana con diferente cantidad de anélidos iniciales y diferente capacidad de alojamiento sin variaciones en el PH, humedad y temperatura, es decir, bajo condiciones semicontroladas.

### 10.3.1. Población de crecimiento exponencial continuo

De los análisis anteriores se tienen las ecuaciones.

☛ 7 Lombrices (0-51 semanas)

$$x(t) = 13,392e^{0,189t} \quad (3)$$

☛ 15 Lombrices (0-51 semanas)

$$x(t) = 28,707e^{0,189t} \quad (4)$$

☛ 200 Lombrices (0-51 semanas)

$$x(t) = 382,72e^{0,189t} \quad (5)$$

Según estas ecuaciones se puede afirmar que el crecimiento poblacional de la Eisenia Foétida responde a una función exponencial de la forma  $x(t) = x_0e^{rt}$  donde

$x_0$  es la población inicial.

$r$  es el parámetro real.

$t$  es la variable (tiempo en semanas).

Este comportamiento recibe el nombre de crecimiento exponencial continuo.

Se toma solo la variable población ya que el PH, humedad y temperatura se encuentran dentro de los rangos ideales para el pleno desarrollo de la especie en estudio, estos fueron medidos usando cintas indicadoras de PH y un termohigrómetro (mide humedad y temperatura). En cuanto a los depredadores se verificó por medio de trampas de caída (pitfall) que los insectos que allí se encontraron no causan daño alguno a la Eisenia Foetida, Veamos.

<i>PH</i>	14/04/2017	08/06/2017	27/06/2017	10/07/2017	07/09/2017
Cama 1	9	8	-	7	8
Cama 2	-	9	-	7	8
Muestra 1	-	-	7	7	9
Muestra 2	-	-	-	7	9

Cuadro 7: Muestras de PH más representativas durante el proceso.

Rango normal de PH = 7-9

<b>Temperatura</b>	19/08/2017	21/08/2017	04/09/2017
Cama 1	20,9 °C (7:01pm)	-	19,5 °C (7:50am)
Cama 2	20,4 °C (7:04pm)	-	19,2 °C (8:02am)
Muestra 1	-	17,7 °C (7:30am)	-
Muestra 2	-	17,6 °C (7:43am)	-

Cuadro 8: Muestras de temperatura más representativas durante el proceso.

Rango ideal de temperatura = 14 °C - 27 °C

<b>Humedad</b>	19/08/2017	21/08/2017	04/09/2017
Cama 1	72 % (7:01pm)	-	74 % (7:50am)
Cama 2	75 % (7:04pm)	-	76 % (8:02am)
Muestra 1	-	79 % (7:30am)	-
Muestra 2	-	82 % (7:43am)	-

Cuadro 9: Muestras de humedad más representativas durante el proceso.

Rango ideal de Humedad = 60 % - 85 %

Punto cardinal	Especies encontradas
N	Grillos y mosquitos
S	Mosquitos
E	Lombrices, babosas y tijeretas
O	Babosas y mosquitos

Cuadro 10: Especies encontradas en las trampas de caída (pitfall)

Veamos que  $x_0 e^{rt}$  es solución de la ecuación diferencial  $x'(t) = rx(t)$  con condición inicial  $x(0) = x_0$

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r$$

integrando respecto a  $t$

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int r dt$$

$$\ln(x(t)) = rt + c$$

aplicando la función exponencial a ambos lados de la igualdad

$$x(t) = e^{rt+c}$$

$$x(t) = e^{rt} e^c$$

evaluemos la función en  $t = 0$

$$x(0) = e^{r \cdot 0} e^c$$

$$x(0) = e^c$$

como inicialmente se dijo que  $x(0) = x_0$  entonces

$$x_0 = e^c$$



como en nuestras ecuaciones  $r = 0,189$  entonces de manera general el comportamiento poblacional de la especie estudiada es

$$x'(t) = 0,189x(t)$$

con diferentes condiciones iniciales

☛  $x(0) = 13,392$

☛  $x(0) = 28,707$

☛  $x(0) = 382,72$

La ecuación encontrada tiene la forma  $x' = rx + b$  con el caso particular de que  $b = 0$  y su solución representada como  $x(t) = x_0e^{rt}$  según la teoría de los sistemas dinámicos tiene el siguiente análisis.

- ☛ Si  $r < 0$  entonces  $e^{rt}$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  por tanto  $x(t) = x_0e^{rt} \rightarrow 0$  independientemente del valor de  $x_0$ .
- ☛ Si  $r > 0$  entonces  $e^{rt}$  tiende a infinito, a menos que  $x_0 = 0$  así lo escribimos de la forma  $|x(t)| \rightarrow \infty$  cuando  $t$  crece indefinidamente.
- ☛ Si  $r = 0$  entonces  $x(t) = x_0$ .

Dado que en la ecuación obtenida el  $r$  es mayor que cero, implica que nuestra población crecerá indefinidamente, y la tasa de crecimiento per-capita será siempre la misma sin importar el tamaño de la población.

Pero en nuestra vida real esto no sucede; las poblaciones pueden comportarse por un tiempo de manera exponencial, pero empiezan a verse limitadas al haber limitaciones en los recursos, pues no existen recursos ilimitados.

### 10.3.2. Modelo de crecimiento logístico

La tasa de crecimiento per-capita (por individuo) se reduce cada vez más cuando la población se acerca a su capacidad de sostenibilidad según los recursos; también conocida como capacidad de carga ( $k$ ).

Este modelo es representado por la ecuación (1)

donde  $x(0) = x_0$  y  $0 < x(t) < k$

### Solución de la ecuación logística

A continuación se da solución a la ecuación (1), al dividir esta en  $x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)$  se tiene

$$\frac{1}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)} x'(t) = r$$

aplicando fracciones parciales

$$\frac{A}{x(t)} + \frac{B}{1 - \frac{x(t)}{k}} = \frac{1}{x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right)} \quad (6)$$

así

$$A - \frac{A}{k}x(t) + Bx(t) = 1 \quad (7)$$

nótese que si  $x(t)$  es cero, entonces

$$A = 1$$

reemplazando el valor anterior en (7)

$$1 - \frac{1}{k}x(t) + Bx(t) = 1$$
$$-\frac{1}{k} + B = 0$$

de este modo

$$B = \frac{1}{k}$$

reemplazando los valores de A y B en la ecuación (6)

$$\left( \frac{1}{x(t)} + \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{x(t)}{k}} \right) x'(t) = r$$
$$\frac{1}{x(t)} x'(t) - \frac{\frac{-1}{k}}{1 - \frac{x(t)}{k}} x'(t) = r$$
$$\frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{\frac{-x'(t)}{k}}{1 - \frac{x(t)}{k}} = r$$

integrando respecto a  $t$

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt - \int \frac{\frac{-x'(t)}{k}}{1 - \frac{x(t)}{k}} dt = \int r dt$$
$$\ln(x(t)) - \ln\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) + c_1 = rt + c_2$$

restando  $c_1$  a ambos lados de la igualdad

$$\ln(x(t)) - \ln\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) = rt + c_2 - c_1$$

si  $c_2 - c_1 = c$  entonces

$$\ln(x(t)) - \ln\left(1 - \frac{x(t)}{k}\right) = rt + c$$

aplicando propiedades de logaritmo

$$\ln \left( \frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{k}} \right) = rt + c$$

ahora aplicando la función exponencial

$$\frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{k}} = e^{rt+c}$$

$$\frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{k}} = e^{rt} e^c \tag{8}$$

como  $x(0) = x_0$

$$\frac{x_0}{1 - \frac{x_0}{k}} = e^c$$

reemplazando este valor en (8)

$$\frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{k}} = e^{rt} \frac{x_0}{1 - \frac{x_0}{k}}$$

como  $\frac{x_0}{1 - \frac{x_0}{k}} = \frac{x_0 k}{k - x_0}$

$$\frac{x(t)}{1 - \frac{x(t)}{k}} = e^{rt} \frac{x_0 k}{k - x_0}$$

sacando el recíproco

$$\frac{1 - \frac{x(t)}{k}}{x(t)} = \frac{1}{e^{rt} \frac{x_0 k}{k - x_0}}$$
$$\frac{1 - \frac{x(t)}{k}}{x(t)} = e^{-rt} \frac{k - x_0}{x_0 k}$$

dividiendo la parte izquierda entre  $x(t)$

$$\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{k} = e^{-rt} \frac{k - x_0}{x_0 k}$$
$$\frac{1}{x(t)} = e^{-rt} \frac{k - x_0}{x_0 k} + \frac{1}{k}$$

nuevamente sacando el recíproco

$$x(t) = \frac{1}{e^{-rt} \frac{k-x_0}{x_0 k} + \frac{1}{k}}$$

finalmente multiplicando la parte derecha por  $x_0 k$  tanto en el numerador como en el denominador

$$x(t) = \frac{x_0 k}{e^{-rt}(k - x_0) + x_0}$$

que es la solución de la ecuación diferencial del modelo logístico y se conoce como **función logística**

### 10.3.3. Capacidad de carga

Según los manuales de lombricultura expuestos en el marco teórico del presente proyecto se sabe que la *Eisenia Foetida* es una especie que alcanza los 50000 individuos por  $m^2$

**NOTA:** Es importante considerar que cuando se habla de cantidad de lombrices por metro cuadrado se refiere a la cantidad de anélidos que hay en un metro de largo por uno de ancho y entre 12 y 40 cm de profundidad (no por aumentar la profundidad del lecho se pueden obtener más lombrices).

#### Capacidad de carga Muestra 1 (7 L)

La muestra 1 es un recipiente cilíndrico, pero en este caso se halla el área de la circunferencia que lo compone ya que la profundidad con la que cuenta se encuentra en el rango del hábitat normal de la *Eisenia Foetida* (12cm a 40 cm) de modo que el número de anélidos no varía al variar la profundidad (altura); así

- Diámetro = 28cm
- Radio = 14cm
- Profundidad (altura) = 12cm

$$\pi r^2 = \pi(14)^2 \approx 616cm^2$$

Según lo anterior se sabe que la capacidad de carga es de 50000 anélidos por metro cuadrado; entonces realizando una regla de tres tenemos

$$10000cm^2 \longrightarrow 50000$$

$$616cm^2 \longrightarrow x$$

$$x = \frac{(616)(50000)}{10000} = 3080$$

que equivale a 3080 lombrices como capacidad de carga en la muestra 1.

### **Capacidad de carga Muestra 2 (15 L)**

La muestra 2 es un recipiente rectangular , pero en este caso al igual que el anterior se halla el área de su base ya que la profundidad con la que cuenta se encuentra en el rango del habitat normal de la Eisenia Foétida (12cm a 40 cm) de modo que el número de anélidos no varía al variar la profundidad (altura); así

- ☛ Largo =  $36cm$
- ☛ ancho =  $16cm$
- ☛ Profundidad (altura) =  $12cm$

$$(36cm)(16cm) = 576cm^2$$

realizando una regla de tres como en el caso anterior se tiene

$$10000cm^2 \longrightarrow 50000$$

$$x = \frac{(576)(50000)}{10000} = 2880$$

que equivale a 2280 lombrices como capacidad de carga en la muestra 2.

### Capacidad de carga Camas 1 (200 L)

La cama es una construcción fija rectangular, al igual que el anterior se halla el área de su base ya que la profundidad con la que cuenta se encuentra en el rango del habitat normal de la Eisenia Foétida; así

- Largo =  $150cm$
- Ancho =  $90cm$
- Profundidad (altura) =  $20cm$

$$(150cm)(90cm) = 13500cm^2$$

realizando una regla de tres como en el caso anterior se tiene

$$10000cm^2 \longrightarrow 50000$$

$$13500cm^2 \longrightarrow x$$
$$x = \frac{(13500)(50000)}{10000} = 67500$$

que equivale a 67500 lombrices como capacidad de carga en la cama 1.

En el modelo logístico las poblaciones inicialmente pueden comportarse de manera exponencial, básicamente cuando hay pocos individuos y gran cantidad de recursos, pero cuando el número de individuos aumenta los recursos empiezas a ser insuficientes; esto desacelera el crecimiento y con el tiempo el comportamiento poblacional tiende a nivelarse en su capacidad de carga.

#### 10.3.4. Puntos de equilibrio ( $\bar{x}$ )

##### Población inicial de 7 anélidos

dada las capacidades de carga anteriores se sabe que para 7 anélidos  $k = 3080$

Si en (1),  $x(t) = 0$  se tiene que

$$(0, 189)(0) \left(1 - \frac{0}{3080}\right) = 0$$
$$0 = 0$$

por lo que  $x(t) = 0$  es un punto de equilibrio

si nuevamente se reemplaza en (1), pero ahora  $x(t) = 3080$

$$(0, 189)(3080) \left(1 - \frac{3080}{3080}\right) = 0$$
$$(0, 189)(3080) (1 - 1) = 0$$
$$0 = 0$$

por lo que  $x(t) = 3080$  es punto de equilibrio.

##### Población inicial de 15 anélidos

En este caso  $k = 2880$

Si en (1),  $x(t) = 0$  se tiene que

$$(0, 189)(0) \left(1 - \frac{0}{2880}\right) = 0$$
$$0 = 0$$

por lo que  $x(t) = 0$  es un punto de equilibrio



si nuevamente se reemplaza en (1), pero ahora  $x(t) = 2880$

$$\begin{aligned}(0, 189)(2880) \left(1 - \frac{2880}{2880}\right) &= 0 \\(0, 189)(2880)(1 - 1) &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

por lo que  $x(t) = 2880$  es punto de equilibrio.

### **Población inicial de 200 anélidos**

En este caso  $k = 67500$

Si en (1),  $x(t) = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned}(0, 189)(0) \left(1 - \frac{0}{67500}\right) &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

por lo que  $x(t) = 0$  es un punto de equilibrio

si nuevamente se reemplaza en (1), pero ahora  $x(t) = 67500$

$$\begin{aligned}(0, 189)(67500) \left(1 - \frac{67500}{67500}\right) &= 0 \\(0, 189)(67500)(1 - 1) &= 0 \\0 &= 0\end{aligned}$$

por lo que  $x(t) = 67500$  es punto de equilibrio.

### 10.3.5. Atractores y repulsores

#### 7 Anélidos

Tomando (2) y reemplazando los puntos de equilibrio  $x(t) = 0$  y  $x(t) = 3080$ , siendo  $k = 3080$  se obtiene

$$\bar{x} = 0$$

$$(0, 189) \left( 1 - \frac{0}{3080} \right) + (0, 189)(0) \left( \frac{-1}{3080} \right) = 0, 189$$

como  $0, 189 > 0$  según el teorema 2,  $\bar{x}$  es un repulsor local.

ahora  $\bar{x} = 3080$

$$(0, 189) \left( 1 - \frac{3080}{3080} \right) + (0, 189)(3080) \left( \frac{-1}{3080} \right) = -0, 189$$

como  $-0, 189 < 0$  nuevamente según el teorema 2,  $\bar{x}$  es un atractor local.

#### 15 Anélidos

Tomando (2) y reemplazando los puntos de equilibrio  $x(t) = 0$  y  $x(t) = 2880$ , siendo  $k = 2880$  se obtiene

$$\bar{x} = 0$$

$$(0, 189) \left( 1 - \frac{0}{2880} \right) + (0, 189)(0) \left( \frac{-1}{2880} \right) = 0, 189$$

como  $0, 189 > 0$  según el teorema 2,  $\bar{x}$  es un repulsor local.

ahora  $\bar{x} = 2880$

$$(0, 189) \left( 1 - \frac{2880}{2880} \right) + (0, 189)(2880) \left( \frac{-1}{2880} \right) = -0,189$$

como  $-0,189 < 0$  nuevamente según el teorema 2,  $\bar{x}$  es un atractor local.

## 200 Anélidos

Tomando (2) y remplazando los puntos de equilibrio  $x(t) = 0$  y  $x(t) = 67500$ , siendo  $k67500$  se obtiene

$\bar{x} = 0$

$$(0, 189) \left( 1 - \frac{0}{67500} \right) + (0, 189)(0) \left( \frac{-1}{67500} \right) = 0,189$$

como  $0,189 > 0$  según el teorema 2,  $\bar{x}$  es un repulsor local.

ahora  $\bar{x} = 67500$

$$(0, 189) \left( 1 - \frac{67500}{67500} \right) + (0, 189)(67500) \left( \frac{-1}{67500} \right) = -0,189$$

como  $-0,189 < 0$  nuevamente según el teorema 2,  $\bar{x}$  es un atractor local.

### 10.3.6. Función logística continua

$$x(t) = \frac{x_0 k}{e^{-rt}(k - x_0) + x_0} \quad (9)$$

Esta ecuación es útil para todas las muestras y lechos implementados, pues al estar en su forma general, permite variar la cantidad de individuos y iniciales al igual que su capacidad de carga. Por lo cual no es necesario un modelo para cada caso.

De esta manera como el experimento realizado no posee recursos ni espacio infinitos para que se comporte únicamente de forma exponencial, y como ya se conocen los valores de la capacidad de carga de cada muestra, al aplicar la función logística a este experimento obtenemos.

#### Para 7 Lombrices.

tomando los valores  $r$  y  $x_0$  de la ecuación (3) y remplazándolos en (9) tenemos

•  $r = 0,189$

•  $x_0 = 13,392$

•  $k = 3080$

$$x(t) = \frac{(13,392)(3080)}{e^{-0,189t}(3080 - 13,392) + 13,392}$$
$$x(t) = \frac{(41247,36)}{e^{-0,189t}(3066,608) + 13,392}$$

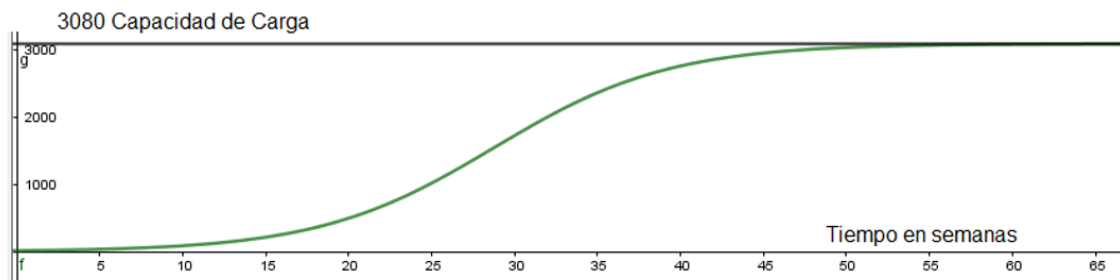


Figura 19: Función logística 7L

López, E. 2017. Función logística 7 L. Gráfica

En la figura 19 podemos observar el crecimiento poblacional para una cantidad inicial de 7 anélidos adultos, donde sus puntos equilibrios son 0 y 3080. 0 es un repulsor local y 3080 es un atractor local.

**Para 15 Lombrices.**

tomando los valores  $r$  y  $x_0$  de la ecuación (4) y remplazándolos en (9) tenemos

☛  $r = 0,189$

☛  $x_0 = 28,707$

☛  $k = 2880$

$$x(t) = \frac{(28,707)(2880)}{e^{-0,189t}(2880 - 28,707) + 28,707}$$

$$x(t) = \frac{(82676,16)}{e^{-0,189t}(2251,293) + 28,707}$$

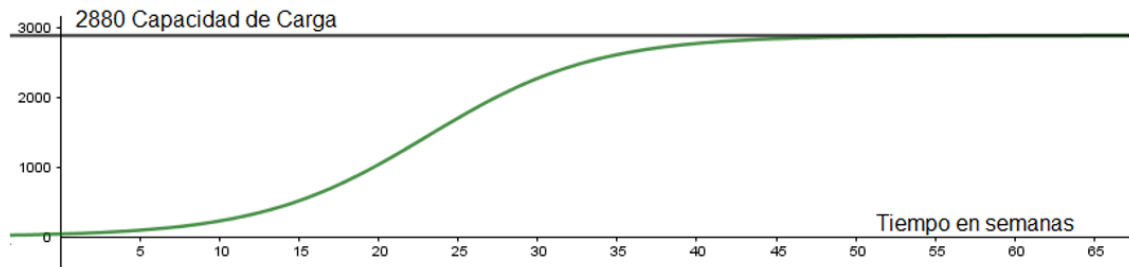


Figura 20: Función logística 15L

López, E. 2017. Función logística 15 L. Gráfica

En la figura 20 podemos observar el crecimiento poblacional para una cantidad inicial de 15 anélidos adultos, donde sus puntos equilibrios son 0 y 2880. 0 es un repulsor local y 2880 es un atractor local.

### Para 200 Lombrices.

tomando los valores  $r$  y  $x_0$  de la ecuación (5) y remplazándolos en (9) tenemos

☛  $r = 0,189$

☛  $x_0 = 382,72$

☛  $k = 67500$

$$x(t) = \frac{(382,72)(67500)}{e^{-0,189t}(67500 - 382,72) + 382,72}$$
$$x(t) = \frac{(25833600)}{e^{-0,189t}(67117,28) + 382,72}$$

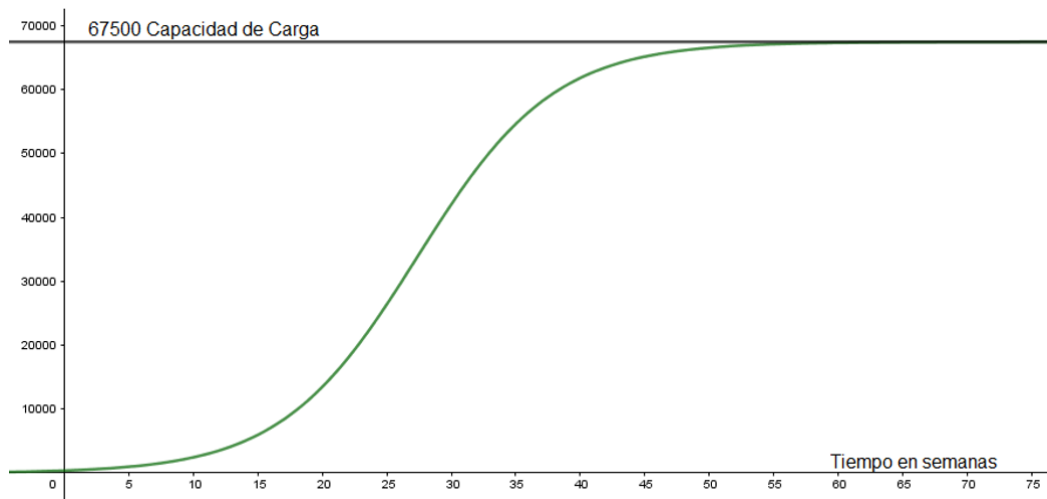


Figura 21: Función logística 200L

López, E. 2017. Función logística 200 L. Gráfica

En la figura 33 podemos observar el crecimiento poblacional para una cantidad inicial de 200 anélidos adultos, donde sus puntos de equilibrio son 0 y 67500. 0 es un repulsor local y 67500 es un atractor local.

### 10.3.7. Relación modelo de crecimiento logístico continuo - modelo de crecimiento exponencial

#### 7 Anélidos

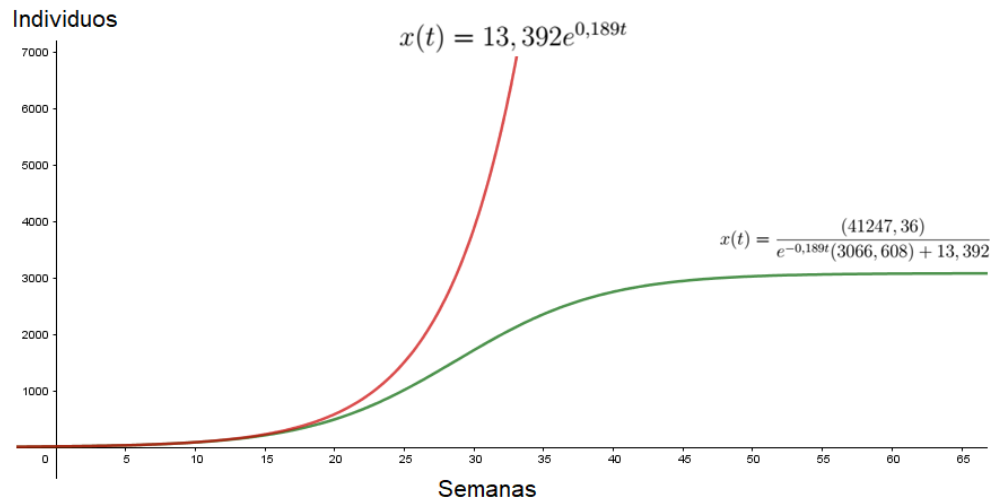


Figura 22: Relación 7 individuos

López, E. 2017. Relación 7 individuos. Gráfico.

En el gráfico se puede observar que los dos modelos tienen el mismo comportamiento poblacional aproximadamente hasta las 16 semanas, de allí en adelante el modelo de crecimiento exponencial tiende al infinito, mientras el modelo logístico continuo a su capacidad de alojamiento (3080); siendo este último el que más se acerca a los conteos realizados para dicha muestra (7 anélidos iniciales).

## 15 Anélidos

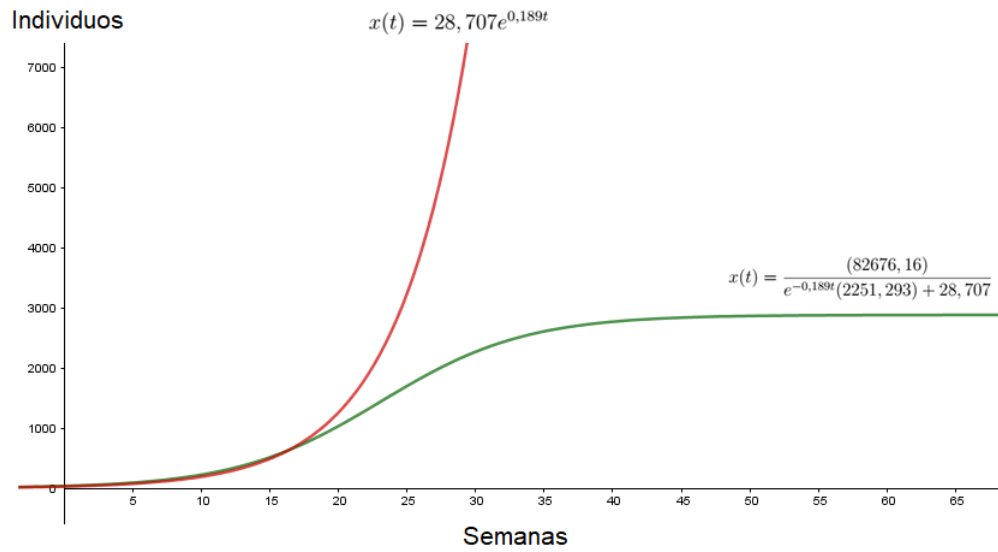


Figura 23: Relación 15 individuos

López, E. 2017. Relación 15 individuos. Gráfico.

En el gráfico se puede observar que los dos modelos tienen el mismo comportamiento poblacional aproximadamente hasta las 18 semanas, de allí en adelante el modelo de crecimiento exponencial tiende al infinito, mientras el modelo logístico continúa a su capacidad de alojamiento (2880); siendo este último el que más se acerca a los conteos realizados para dicha muestra (15 anélidos iniciales).



## 200 Anélidos

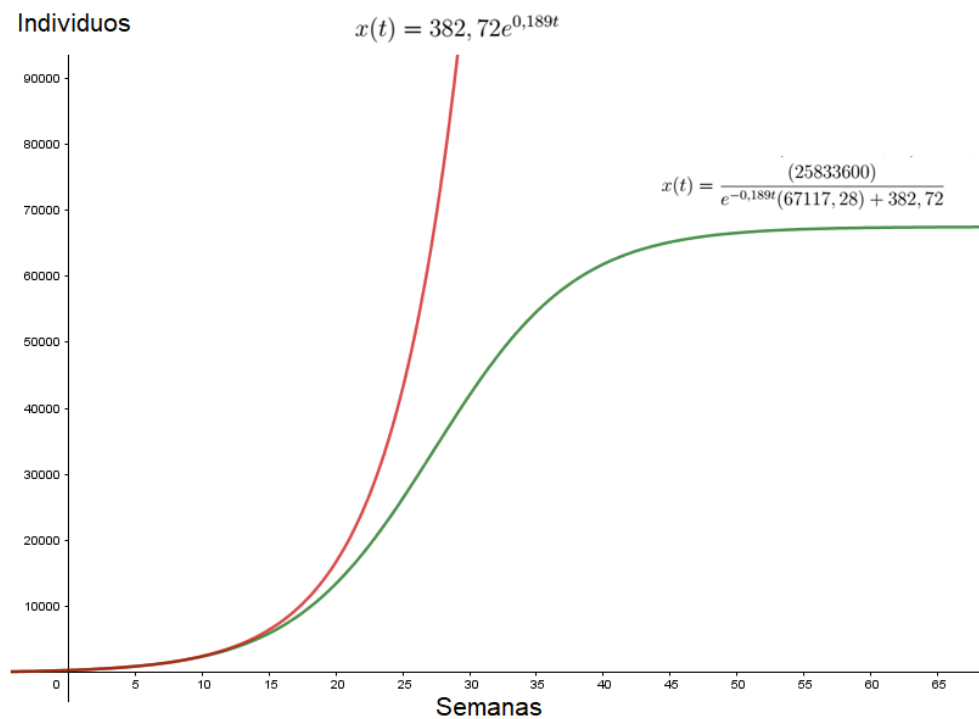


Figura 24: Relación 200 individuos

López, E. 2017. Relación 200 individuos. Gráfico.

En el gráfico se puede observar que los dos modelos tienen el mismo comportamiento poblacional aproximadamente hasta las 15 semanas, de allí en adelante el modelo de crecimiento exponencial tiende al infinito, mientras el modelo logístico continúa a su capacidad de alojamiento (67500); siendo este último el que más se acerca a los conteos realizados para dicho lecho (200 anélidos iniciales).

### 10.3.8. Relación conteos-modelo logístico continuo

#### Muestra 1, conteo 1

Según la función logística para 7L pasadas 4 semanas se esperaba aproximadamente 28 anélidos y el dato real fue 18; se observa una diferencia de 10 anélidos más de los esperados.

#### Muestra 1, conteo 2

A los dos meses ( 9 semanas aproximadamente ) la función arroja el valor de 72 anélidos. El valor real fue 186 cuya diferencia es 114 individuos menos de los obtenidos.

#### Muestra 2, conteo 1

Según la ecuación logística para 15L a las 4 semanas se esperaban una población de 76 individuos, el dato real del conteo fue 33; la diferencia es de 43 anélidos más de los hallados.

#### Muestra 2, conteo 2

Con la función logística a las 9 semanas se esperaban 188 anélidos y el dato real fue 266, para una diferencia de 78 individuos más de los esperados.

#### Cama 1, conteo 1

Según la ecuación logística para 200L a los 3 meses (13 semanas) se esperaban 4211 anélidos, mientras que el dato real fue 2093, lo que muestra una diferencia de 2118 individuos más del dato real.

En conclusión los datos prominentes de las funciones logísticas son más cercanos a los datos reales a comparación de los inferidos de las ecuaciones exponenciales expuestas anteriormente, ya que el modelo logístico es más cercano a la realidad que el exponencial. A pesar de que existen diferencias entre los datos reales (conteos) y los inferidos por las ecuaciones logísticas, estas diferencias no son abismales ya que si se realizaran más conteos dicha diferencia iría disminuyendo; aún así no es posible llegar a un ajuste del 100 %; pues como ya era de nuestro conocimiento los valores del  $R^2$  no son netamente 1 lo que implica cierto margen de error y esto sucede al estudiar cualquier tipo de especie no solo la *Eisenia Foetida*, ya que las poblaciones no siguen un solo patrón de comportamiento.

## Tasa de natalidad y mortalidad

La tasa de mortalidad es la misma que de natalidad, solo que esta empieza a presentarse luego de 6 años (72 meses) que es la máxima edad de la Eisenia Foétida. Primero se llega a la capacidad de carga que al inicio de la tasa de mortalidad incluso con una cantidad de anélidos iniciales muy pequeña. Para este caso no se tienen en cuenta las muertes por enfermedad o depredadores ya que se considera que las condiciones de vida son las óptimas y además porque estos anélidos son muy resistentes a las enfermedades.

## 10.4. OPTIMIZACIÓN DEL HUMUS

Dado que la capacidad de carga representa el tamaño máximo de población que puede soportar el ambiente en óptimas condiciones; es precisamente al llegar a este valor cuando se producirá la mayor cantidad de humus, pues son todas las posibles lombrices que soporta el lecho quienes estarán trabajando en la producción de este abono. Según nuestras gráficas esta capacidad se colma al pasar el año (52 semanas).

Una lombriz excreta diariamente el 60 % de lo que consume en humus. Un anélido en edad adulta puede consumir hasta 1.4 gr y uno en edad joven la mitad de esta cantidad, es decir, 0.7 gr, para un promedio de 1,05 gr.

El 60 % de esta cantidad es 0,63 gr de humus.

- Para la muestra 1 tenemos:  $(3080)(0,63) = 1940,4$  que equivale aproximadamente a 2 kg de abono.
- Para la muestra 2 tenemos:  $(2880)(0,63) = 1814,4$  que también equivale aproximadamente a 2 kg de abono.
- Finalmente para la cama 1 se tiene:  $(67500)(0,63) = 42525$  que equivale aproximadamente a 43 kg de abono.

Estas cantidades de humus son las que se pueden hallar al llegar a la capacidad de carga de cada muestra y lecho. Utilizando la ecuación logística que describe el comportamiento poblacional de la especie estudiada, se halla la cantidad de anélidos en cualquier instante de tiempo  $t$ , con este dato se realiza el mismo procedimiento anterior y es posible saber la cantidad de abono para dicho instante.

## 10.5. EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DEL HUMUS

### 10.5.1. Primer cultivo (en su totalidad testigo)

Para la evaluación de la calidad del humus como primera medida se sembró un cultivo de habichuela en todo el terreno sin aplicación alguna de agroquímicos o fertilizantes;

realizando labores como tutorado, colgado y aporcado.

Durante el proceso de crecimiento muchas de las plantas murieron y otras alcanzaron su etapa de producción arrojando  $12,85kg$  de habichuela extrafina.

### 10.5.2. Segundo cultivo (Diseño experimental)

Como segunda medida se realizó un diseño experimental de bloques completamente al azar (BDCA) que consistió en dividir el terreno en nueve regiones con igual cantidad de plantas en cada una de ellas (10 plantas). Estas plantas fueron tratadas con tres tratamientos  $T_0$  que se refiere a siembra directa o testigo sin aplicación alguna de fertilizantes,  $T_1$  que se refiere a la aplicación del humus de la Eisenia Foétida y  $T_2$  a la aplicación de un fertilizante químico (tripe quince). Se realizaron tres repeticiones por tratamiento  $R_1, R_2, R_3$  distribuidos aleatoriamente en todo el terreno.

Alternamente a esto se prepararon extractos vegetales; los cuales se realizaron con la finalidad de mantener en gran medida la planta libre de plagas y enfermedades y de esta manera lograr que en su producción solo influyeran los abonos utilizados.

- 1) Ají y ajeno.
- 2) Ajo y ají.

Como resultado de las cosechas se obtuvieron los siguientes datos

Tratamiento	Repetición	Cantidad
$T_0$	$R_1$	$0,8kg$
$T_0$	$R_2$	$1,32kg$
$T_0$	$R_3$	$0,54kg$
$T_1$	$R_1$	$4,02kg$
$T_1$	$R_2$	$2,96kg$
$T_1$	$R_3$	$6,12kg$
$T_2$	$R_1$	$0,28kg$
$T_2$	$R_2$	$1kg$
$T_2$	$R_3$	$3,66kg$

Cuadro 11: Producción tratamiento-repetición

Según la tabla para  $T_0$  se tiene un total de  $2,66kg$  de habichuela, para  $T_1$   $13,1kg$  y para  $T_2$   $4,94kg$  lo que nos lleva a concluir el tratamiento con mayor éxito fue  $T_1$  (humus), esto demuestra que la calidad del humus producido por los anélidos es muy buena.

La cantidad total de habichuela de este segundo siembro fue de  $20,7kg$  que a comparación del primero ( $12,85kg$ ) aumentó  $7,85kg$  gracias a los abonos utilizados.

## 11. RESULTADOS

- La ecuación logística para el caso continuo es quien mejor describe el comportamiento de la especie estudiada, pues a través de su solución se halla una función logística que permite inferir el crecimiento poblacional de la *Eisenia Foetida*, cuyas condiciones iniciales varían según la población inicial de anélidos al igual que la capacidad de carga de cada uno de los lechos donde habitan.
- Se encontró a través de la realización del diseño experimental, que el abono orgánico emanado de los anélidos o bien conocido como humus, presenta la mayor producción de *Phaseolus vulgaris* (Habichuela) ayudando de igual forma al vigor de la planta.
- Se garantizó las condiciones de vida óptimas para la *Eisenia Foetida*, es decir, se mantuvo la población bajo condiciones semicontroladas; esto se logró utilizando buen sustrato alimenticio, cuidando del PH cuya medida se infirió usando cintas indicadoras, de la temperatura y humedad con la ayuda de un termohigrómetro facilitado por el laboratorio de ciencias agropecuarias de la UdeC.

## 12. CONCLUSIONES

- Se halló un modelo matemático que describe el crecimiento poblacional de la lombriz roja californiana, de igual forma se garantizaron las condiciones de vida optimas para esta especie, y el diseño experimental permitió inferir la calidad del humus a la vez diferenciando los efectos de fertilizantes de carácter químico y orgánico.
- El modelo se ajusta a la dinámica de la población estudiada aunque no con el 100 % de probabilidad, pues como es de nuestro conocimiento el estudio de seres vivos no es una tarea fácil, porque su crecimiento poblacional no sigue reglas o patrones de comportamiento que nos permita saber a largo plazo el número exacto de individuos.
- El modelo permite optimizar la cantidad de humus, pues justamente cuando se habla de una capacidad de carga nos referimos al mayor número de individuos que puede sostener un ecosistema en optimas condiciones de vida; de esta manera sabemos que es en este punto donde se produce la mayor cantidad de abono, con las mejores condiciones para los productores.
- Según los resultados del diseño experimental, el humus beneficia en alto grado al aumento de producción y vigor de un cultivo de habichuela.
- Se logró mostrar la aplicabilidad de las ciencias exactas en las agropecuarias, y así se propuso una solución amable con el medio ambiente a la problemática de la aplicación de insumos de carácter tóxico.
- En la construcción del marco de antecedentes se hallaron varios estudios realizados sobre esta misma especie, en algunos de ellos se encontró bastante relación con el proceso realizado en este proyecto y de hecho se llegan a algunas conclusiones iguales pero mediante caminos diferentes.

## 13. RECOMENDACIONES

- Se recomienda realizar el mismo experimento pero alimentando poblaciones de anélidos con diferentes tipos de sustrato, observando si el crecimiento poblacional presenta cambios representativos.
- De igual forma se recomienda pesar el sustrato que se suministra ya que de esta manera es más sencillo hallar la cantidad de humus producido por los anélidos.
- Para este estudio es esencial utilizar lechos pequeños, pues a la hora de realizar el conteo facilita el trabajo y se ahorra tiempo.
- Se recomienda el uso de herramientas computacionales que permitan verificar los resultados encontrados y que contribuyan a la solución del sistema. De igual forma se destaca la importancia de los gráficos de dispersión, pues mediante ellos es posible observar el comportamiento de los datos y nos lleva a elegir el mejor modelo que se ajusta al comportamiento de los mismos.

## 14. REFERENCIAS

- 1) ABRAMSON, Guillermo. *Las matemáticas de los sistemas biológicos*. S.l. Instituto Balseiro. Universidad nacional de Cuyo. 2014. 285p.
- 2) CANO CANELA, Alfredo. *Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional*. Madrid España. Universidad Nacional de educación a distancia (UNED). 2011. 154p.
- 3) COLIN W, Clark. *Mathematical Bioeconomics: the optimal management of renewable resources*. Estados Unidos de América. Wiley & Sons, Inc. Segunda Edición. 1990. 387p.
- 4) FERRUZZI, Carlo. *Manual de lombricultura*. Madrid España. Ediciones mundiprensa. 2001. Libro biblioteca Universidad de Cundinamarca. 138p.
- 5) GÓMEZ AÍZA, Ricardo y GURUPRASAD, Samanta. *Modelos dinámicos de poblaciones simples de sistemas depredador-presa*. México, DF. Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México - Departamento de Matemáticas Universidad de Ingeniería y Ciencias de Bengala. 2014. 34p.
- 6) HENRÍQUEZ, Carlos y DURÁN, Lolita. *Crecimiento y reproducción de la lombriz roja (*Eisenia foetida*) en cinco sustratos orgánicos*. Costa Rica. Universidad de Costa Rica. 2009. 8p.
- 7) MANSO MARTOS, Ignacio. *Simulación numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales a trozos*. Sevilla España. Universidad de Sevilla, Escuela técnica superior de ingeniería. 2012. 87p
- 8) MARTÍNEZ BRAVO, C et al. *Evaluación reproductiva de la lombriz roja californiana *Eisenia foetida* alimentada con diferentes sustratos en el trópico bajo colombiano*. Colombia. Universidad de Córdoba. 2017.
- 9) MEJIA ARAYA, Pedro . *Manual de lombricultura*. Camino Villarrica Loncoche Chile. Agroflor lombricultura. s.f. 55p.
- 10) MENDOZA GÓMEZ , Lennis . *Manual de lombricultura*. Chiapas México. Colegio de estudios científicos y tecnológicos. Secretaría de educación pública. 2008. 39 p.
- 11) NUÑEZ DIAS, Ana Minerva. *Monitoreo de la dinámica poblacional de la lombriz de tierra roja Californiana (*Eisenia Foetida* L) en cuatro sustratos orgánicos*. Coahuila México. Universidad autónoma agraria Antonio Narro. 2017. 56p.
- 12) PEÑA RAMOS, Fidel Maximiano. *Un modelo de simulación para estimar la dinámica de una población ideal de *Eisenia Foetida* (Lombriz de tierra, roja Californiana)*. Coahuila México. Universidad autónoma agraria Antonio Narro. 2004. 125p.



- 13) RODRÍGUEZ, Rogelio. *Lombricultura casera*. [en línea.] 24 mayo 2015 [revizado 28 Octubre 2017]. Disponible en internet <http://lombricultura-casera.com/cada-cuando-hay-que-recoger-el-humus-de-lombriz/>
- 14) RUIZ ÁLVAREZ, Juan. *modelos biológicos*. España. Departamento de Matemáticas. Universidad de Alcalá de Henares. Sf. 29p.
- 15) SANCHEZ BARBOSA, Dolly Mónica. *Comparación de la prolificidad, producción y calidad del lombricomposto de la lombriz iridiscente caqueteña (*Glossoscolex Sp*) y roja californiana (*Eisenia Foétida*) utilizando como sustrato ovinaza en el municipio de Armero Guayabal (Tolima)*. Fusagasugá Colombia. universidad de Cundinamarca programa de zootecnia. 2005. 78p.
- 16) SCHEINERMAN, Edward R. . *Invitation to Dynamical Systems*. s.l. Department of Mathematical Sciences The Johns Hopkins University. 1996. ISBN 0-13-185000-8. 273p.
- 17) UNIVERSIDAD DE SEVILLA, DPTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO *Tema 2: Modelos discretos en Biología*. España. Matemáticas aplicadas a la Biología - Grado en Biología. . 2016. 81-128 p.
- 18) VAZQUEZ PEREZ, Rafael. *Introducción a la optimización*. sl. Inteligencia Artificial II. sf. 23p.